

НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ КРУГЛЫХ ПЛАСТИН С ВЫРЕЗАМИ. МЕТОД R -ФУНКЦИЙ

Исследуются колебания геометрически нелинейных круглых пластин с двумя вырезами. Для определения собственных частот колебаний применяется метод R -функций. Нелинейные колебания пластины раскладываются по собственным формам линейных колебаний, содержащим R -функции. В результате применения метода Бубнова – Галеркина получается динамическая система с тремя степенями свободы, которая исследуется методом многих масштабов.

1. Введение. Круглые пластины являются несущими элементами многих конструкций и машин. Они широко используются в газотурбинных двигателях, гидравлических турбинах, тормозных системах автомобилей, резервуарах. Известно, что если пластина прогибается больше, чем на половину толщины, то необходимо учитывать геометрическую нелинейность в ее модели [10]. В монографии [1] рассматриваются параметрические колебания круглых пластин под действием параметрических нагрузок. Получена система обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами, описывающая параметрические колебания. Осесимметричные колебания круглых защемленных пластин рассматривали С. Е. Farnsworth и Р. М. Evan-Iwanowski [5]. Для исследования нелинейных колебаний применяли метод гармонического баланса. Е. Г. Голоскоков и А. П. Филиппов [2] исследовали проход через резонанс круглых дисков постоянной толщины, предполагая, что частота возмущающей силы изменяется по линейному закону. В монографии [7] колебания круглых дисков описываются уравнениями Кармана. Показано, что для круглых пластин часто выполняется условие внутреннего резонанса.

В современных исследованиях по нелинейной динамике круглых пластин, в основном, рассматривается взаимодействие двух сопряженных форм колебаний [8, 6].

В этой статье метод R -функций применяется для нахождения собственных форм колебаний пластины с вырезами. Нелинейные колебания пластины раскладываются по найденным собственным формам, содержащим R -функции. Исследуется нелинейное взаимодействие сопряженных мод колебаний и осесимметричной формы пластины с вырезами. Для исследования этого взаимодействия применяется метод многих масштабов.

2. Постановка задачи. Рассмотрим колебания круглой пластины с двумя вырезами (рис. 1). Предполагается, что деформирование пластинки является геометрически нелинейным. Колебания рассмотрим в цилиндрической системе координат (r, θ, z) . Тогда перемещения точек вдоль осей r, θ, z обозначим, через u_r, u_θ, u_z , соответственно. Для получения уравнений колебаний пластинки воспользуемся общими уравнениями геометрически нелинейной теории оболочек произвольной формы в криволинейных координатах, которые представлены в монографии [3].

Из них следуют уравнения нелинейных колебаний пластин в полярных координатах:

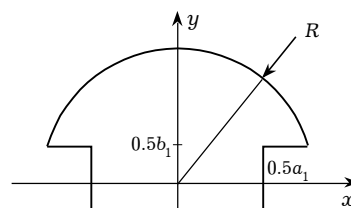


Рис. 1

$$\begin{aligned}
& u_{r,rr} - \frac{(3-\nu)u_{\theta,0}}{2r^2} + \frac{(1+\nu)}{2r}u_{\theta,0r} + \frac{1-\nu}{2r^2}u_{r,0\theta} + \frac{u_{r,r}}{r} - \frac{u_r}{r^2} + u_{z,r}u_{z,rr} - \\
& - \frac{1+\nu}{2r^3}u_{z,0}^2 + \frac{\nu+1}{2r^2}u_{z,0}u_{z,\theta r} + \frac{1-\nu}{2r^2}u_{z,r}u_{z,\theta\theta} + \\
& + \frac{1-\nu}{2r}u_{z,r}^2 = \mu \frac{1-\nu^2}{Eh} \ddot{u}_r, \\
& \frac{1}{r^2}u_{0,0\theta} + \frac{3-\nu}{2r^2}u_{r,\theta} + \frac{1+\nu}{2r}u_{r,r\theta} + \frac{1-\nu}{2r}u_{0,r} - \frac{1-\nu}{2r^2}u_0 + \\
& + \frac{1-\nu}{2}u_{0,rr} + \frac{1}{r^3}u_{z,0}u_{z,\theta\theta} + \frac{1+\nu}{2r}u_{z,r}u_{z,r\theta} + \\
& + \frac{1-\nu}{2r^2}u_{z,r}u_{z,\theta} + \frac{1-\nu}{2r}u_{z,rr}u_{z,\theta} = \mu \ddot{u}_0 \frac{1-\nu^2}{Eh}, \\
& \frac{h^2}{12} \nabla^4 u_z = -\mu \frac{1-\nu^2}{Eh} \ddot{u}_z + \frac{1}{r}(ru_{z,r})_{,r} \left(u_{r,r} + \frac{1}{2}u_{z,r}^2 + \frac{\nu}{r}u_r + \frac{\nu}{r}u_{0,\theta} + \right. \\
& \left. + \frac{\nu}{2r^2}u_{z,0}^2 \right) + \frac{1-\nu}{r}u_{z,0r} \left(u_{0,r} + \frac{1}{r}u_{r,\theta} - \frac{1}{r}u_0 + \frac{1}{r}u_{z,r}u_{z,\theta} \right) + \\
& + \frac{1}{r^2}u_{z,0\theta} \left(\frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r}u_{0,0} + \frac{1}{2r^2}u_{z,0}^2 + \nu u_{r,r} + \frac{\nu}{2}u_{z,r}^2 \right), \quad (1)
\end{aligned}$$

где $\ddot{u}_0 = \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}$; $u_{z,r} = \frac{\partial u_z}{\partial r}$; μ – масса единицы площади пластины; E – модуль Юнга; ν – коэффициент Пуассона; h – толщина пластины; $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$.

3. Линейные свободные колебания пластины. Для дискретизации уравнений колебаний пластины (1) воспользуемся методом Бубнова – Галлеркина. Тогда нелинейные колебания пластины с вырезами раскладываются по собственным формам линейных колебаний. Для получения этих собственных форм колебаний воспользуемся методом Релея – Ритца, в котором используется потенциальная энергия деформирования пластины Π . Эта энергия в полярных координатах принимает следующий вид:

$$\begin{aligned}
\Pi = & \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \int_{\Omega} \left\{ u_{r,r}^2 + \frac{2\nu}{r}(u_{\theta,\theta} + u_r)u_{r,r} + \frac{1}{r^2}(u_{\theta,\theta} + u_r)^2 + \right. \\
& \left. + \frac{1-\nu}{2} \left(u_{0,r} - \frac{u_0}{r} + \frac{1}{r}u_{r,\theta} \right)^2 \right\} r dr d\theta + \frac{D}{2} \int_{\Omega} \left\{ u_{z,rr}^2 + \right. \\
& \left. + 2\nu u_{z,rr} \left(\frac{1}{r^2}u_{z,0\theta} + \frac{1}{r}u_{z,r} \right) + \left(\frac{1}{r^2}u_{z,0\theta} + \frac{1}{r}u_{z,r} \right)^2 + \right. \\
& \left. + 2(1-\nu) \left(\frac{1}{r}u_{z,r\theta} - \frac{1}{r^2}u_{z,\theta} \right)^2 \right\} r dr d\theta,
\end{aligned}$$

где Ω – область на плоскости (r, θ) , которую занимает пластина. Кинетическую энергию пластины представим так:

$$T = \frac{\mu}{2} \int_{\Omega} (\dot{u}_r^2 + \dot{u}_\theta^2 + \dot{u}_z^2) r dr d\theta,$$

где μ – масса единицы длины.

Линейные колебания пластины с вырезами представим так:

$$\begin{aligned}
& [u_r(r, \theta, t), u_\theta(r, \theta, t), u_z(r, \theta, t)] = \\
& = [\bar{u}_r(r, \theta), \bar{u}_\theta(r, \theta), \bar{u}_z(r, \theta)] \sin(pt + \alpha). \quad (2)
\end{aligned}$$

Соотношения (2) введем в действие по Гамильтону и произведем необходимое интегрирование. В результате получим следующий функционал:

$$\begin{aligned}
S = & \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \int_{\Omega} \left\{ \bar{u}_{r,r}^2 + \frac{2\nu}{r} (\bar{u}_{\theta,\theta} + \bar{u}_r) \bar{u}_{r,r} + \frac{1}{r^2} (\bar{u}_{\theta,\theta} + \bar{u}_r)^2 + \right. \\
& \left. + \frac{1-\nu}{2} \left(\bar{u}_{\theta,r} - \frac{\bar{u}_\theta}{r} + \frac{\bar{u}_{r,\theta}}{r} \right)^2 \right\} r dr d\theta + \frac{D}{2} \int_{\Omega} \left\{ \bar{u}_{z,rr}^2 + \right. \\
& \left. + 2\nu \bar{u}_{z,rr} \left(\frac{1}{r^2} \bar{u}_{z,\theta\theta} + \frac{1}{r} \bar{u}_{z,r} \right) + \left(\frac{1}{r^2} \bar{u}_{z,\theta\theta} + \frac{1}{r} \bar{u}_{z,r} \right)^2 + \right. \\
& \left. + 2(1-\nu) \left(\frac{1}{r} \bar{u}_{z,r\theta} - \frac{1}{r^2} \bar{u}_{z,\theta} \right)^2 \right\} r dr d\theta - \\
& - \frac{\mu}{2} p^2 \int_{\Omega} (\bar{u}_r^2 + \bar{u}_\theta^2 + \bar{u}_z^2) r dr d\theta. \tag{3}
\end{aligned}$$

В дальнейшем рассмотрим защемленную по всему контуру пластину. Границу пластины с вырезами обозначим через $\partial\Omega$. Граничные условия для защемленной пластины представим так:

$$\bar{u}_z|_{\partial\Omega} = \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial r} \Big|_{\partial\Omega} = u_\theta|_{\partial\Omega} = u_r|_{\partial\Omega} = 0. \tag{4}$$

Для удовлетворения граничным условиям запишем в аналитическом виде уравнение границы области $\partial\Omega$ (рис. 1). Для этого воспользуемся теорией R -функций, которая представлена в работах [4, 9]. R -функция выбирается так:

$$\omega(r, \theta) = 0 \quad \forall (r, \theta) \in \partial\Omega, \quad \omega(r, \theta) > 0 \quad \forall (r, \theta) \in \Omega.$$

Для построения функции $\omega(r, \theta)$ используются правила, представленные в [4]. Для круглой пластины с вырезом R -функция принимает следующий вид:

$$\begin{aligned}
\omega(x, y) &= (\eta_2 \vee_0 \eta_3) \wedge_0 \eta_1, & \eta_1 &= \frac{1}{2R} (R^2 - x^2 - y^2), \\
\eta_2 &= \frac{1}{a_1} \left(\frac{a_1^2}{4} - x^2 \right), & \eta_3 &= \frac{1}{b_1} \left(y^2 - \frac{b_1^2}{4} \right),
\end{aligned}$$

где \wedge_0, \vee_0 – булевы операции конъюнкции и дизъюнкции, которые выражаются так [2]:

$$\begin{aligned}
\eta_2 \vee_0 \eta_3 &= \eta_2 + \eta_3 + \sqrt{\eta_2^2 + \eta_3^2}, \\
\eta_4 \wedge_0 \eta_1 &= \eta_4 + \eta_1 - \sqrt{\eta_4^2 + \eta_1^2}, \tag{5}
\end{aligned}$$

где $\eta_4 = \eta_2 \vee_0 \eta_3$. Соотношения (5) используются для построения функции $\omega(x, y)$. Представим функцию $\omega(x, y)$ в полярных координатах.

Формы свободных колебаний круглой пластины с вырезами, удовлетворяющие граничным условиям (4), представим в следующем виде:

$$\begin{aligned}
\bar{u}_z(r, \theta) &= \omega^2(r, \theta) \sum_{k=0}^m [Z_k^{(c)}(r) \cos(k\theta) + Z_k^{(s)}(r) \sin(k\theta)], \\
\bar{u}_\theta(r, \theta) &= \omega(r, \theta) \sum_{k=0}^m [\Theta_k^{(c)}(r) \cos(k\theta) + \Theta_k^{(s)}(r) \sin(k\theta)], \\
\bar{u}_r(r, \theta) &= \omega(r, \theta) \sum_{k=0}^m [R_k^{(c)}(r) \cos(k\theta) + R_k^{(s)}(r) \sin(k\theta)], \tag{6}
\end{aligned}$$

где функции $Z_k^{(c)}(r)$, $Z_k^{(s)}(r), \dots, R_k^{(s)}(r)$ представляются в виде полиномов:

$$\begin{aligned} Z_k^{(c)}(r) &= \sum_{j=0}^M A_{k,j}^{(c)} r^j, & Z_k^{(s)}(r) &= \sum_{j=0}^M A_{k,j}^{(s)} r^j, \\ \Theta_k^{(c)}(r) &= \sum_{j=0}^M B_{k,j}^{(c)} r^j, & \Theta_k^{(s)}(r) &= \sum_{j=0}^M B_{k,j}^{(s)} r^j, \\ R_k^{(c)}(r) &= \sum_{j=0}^M C_{k,j}^{(c)} r^j, & R_k^{(s)}(r) &= \sum_{j=0}^M C_{k,j}^{(s)} r^j, \quad k = 0, \dots, m. \end{aligned} \quad (7)$$

Соотношения (6), (7) вводим в (3). После интегрирования по площади пластины Ω приходим к функционалу

$$S = S(a_0, \dots, a_\ell), \quad \ell = 6(M+1)(m+1), \quad (8)$$

где a_0, \dots, a_ℓ – коэффициенты полиномов (7):

$$X = (a_0, \dots, a_\ell) = (A_{0,0}^{(c)}, A_{0,1}^{(c)}, \dots, C_{m,M}^{(s)}).$$

Следуя методу Релея – Ритца для минимизации функционала (8), составим систему линейных уравнений

$$\frac{\partial S}{\partial a_j} = 0, \quad j = 0, \dots, \ell. \quad (9)$$

Из соотношений (9) приходим к проблеме собственных значений, которая принимает следующий вид:

$$(K - p^2 M)X = 0,$$

где $K = \|k_{ij}\|_{j=1, \dots, \ell+1}^{i=1, \dots, \ell+1}$, $M = \|m_{ij}\|_{j=1, \dots, \ell+1}^{i=1, \dots, \ell+1}$.

Как следует из функционала (3), изгибные линейные колебания пластинки u_z и колебания в плоскости u_r, u_θ являются независимыми. Поэтому их можно исследовать отдельно. Рассмотрим стальную пластинку со следующими параметрами:

$$\begin{aligned} a_1 &= 0.46 \text{ м}, & b_1 &= 0.02 \text{ м}, & R &= 0.25 \text{ м}, & E &= 2 \cdot 10^{11} \text{ Па}, \\ \nu &= 0.3, & \rho &= 7800 \text{ кг/м}^3, & h &= 5 \cdot 10^{-3} \text{ м}. \end{aligned}$$

Таблица 1

	Круглая пластина	$M = 5$	$M = 8$
	Собственные частоты p_i , рад/с		
1	1252	1733	1841
2	2606	2767	2772
3	2606	3318	3350
4	4878	4941	4869

Для этих значений параметров производился расчет собственных частот и форм колебаний. Результаты расчета собственных частот представлены в табл. 1. В первом столбце показаны собственные частоты колебаний для идеально круглой пластины. Во втором столбце показаны собственные частоты, полученные с использованием аппроксимации форм колебаний (6), (7) при $M = 5$. В третьем столбце представлены результаты расчета с аппроксимацией форм при $M = 8$. Отметим, что вторая и третья частоты для круглой пластины совпадают, так как они являются кратными. Однако, если форма контура пластины не идеально круглая, то кратные частоты распадаются, что наблюдается в решаемой нами задаче. Как видно, кратные собственные частоты для идеально круглой пластины и для пластины с вырезами значительно отличаются.

Первые три формы колебаний пластины представлены на рис. 2. На рис. 2а показана первая зонтичная форма колебаний. Вторая собственная форма показана на рис. 2б. Первые три формы изгибных колебаний пластины обозначим через $\bar{u}_z^{(i)}(r, \theta)$, $i = 1, 2, 3$. Эти формы соответствуют частотам p_i , $i = 1, 2, 3$, которые представлены в табл. 1.

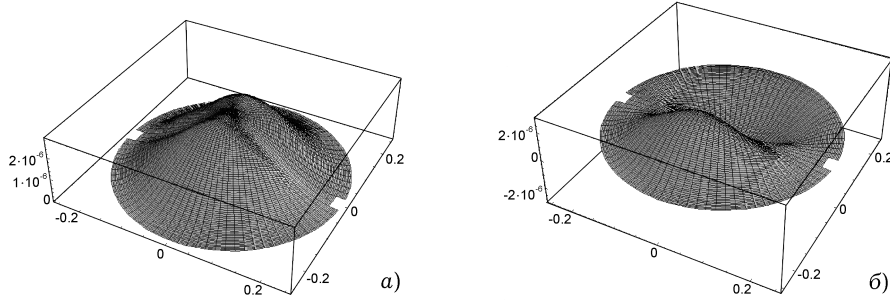


Рис. 2

Теперь исследуем линейные колебания u_θ , u_r , происходящие в плоскости пластины. Результаты расчета собственных частот линейных колебаний при различных порядках полинома M представлены в табл. 2. Как следует из таблицы, частоты при изменении порядков полиномов близки. Частоты p_i , $i = 1, 2, 4, 5$, соответствуют двум сопряженным формам колебаний. В дальнейшем для сопряженных форм колебаний будем использовать порядок полинома $M = 3$.

Таблица 2

		Собственные частоты p_i , рад/с				
i		1	2	3	4	5
M						
$M = 2$		42503	42732	50581	66037	69460
$M = 3$		42325	42550	50083	64323	67498

4. Дискретная модель нелинейных колебаний. Нелинейные колебания пластины представим так:

$$u_z = \sum_{i=1}^3 q_i(t) \bar{u}_z^{(i)}(r, \theta), \quad u_\theta = \sum_{i=1}^3 \psi_i(t) \bar{u}_\theta^{(i)}(r, \theta), \quad u_r = \sum_{i=1}^3 \varphi_i(t) \bar{u}_r^{(i)}(r, \theta), \quad (10)$$

где $q_1(t)$, $q_2(t)$, ..., $\varphi_3(t)$ – обобщенные координаты. Введем соотношения (10) в первые два уравнения системы (1), отбрасывая инерционные слагаемые. Эта операция возможна, так как собственные частоты колебаний пластины в плоскости значительно выше изгибных собственных частот. В результате получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно $(\varphi_1, \dots, \psi_3)$, которая принимает следующий вид:

$$[B] \cdot [\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \psi_1, \psi_2, \psi_3]^T = \sum_{\ell=1}^3 \sum_{\mu=1}^3 q_\ell q_\mu [A_{\ell\mu}^{(1)}, A_{\ell\mu}^{(2)}, A_{\ell\mu}^{(3)}, D_{\ell\mu}^{(1)}, D_{\ell\mu}^{(2)}, D_{\ell\mu}^{(3)}]^T. \quad (11)$$

Параметры системы (11) в статье не приводим для краткости.

Введем матрицу $R = (r_{ij})_{j=1, \dots, 6}^{i=1, \dots, 6}$, $R = B^{-1}$. Тогда перемещения в срединной плоскости пластины представим так:

$$u_\theta = \sum_{i=1}^3 \sum_{\ell=1}^3 \sum_{\mu=1}^3 \alpha_{\ell\mu}^{(i)} \bar{u}_\theta^{(i)}(r, \theta) q_\ell q_\mu, \quad u_r = \sum_{i=1}^3 \sum_{\ell=1}^3 \sum_{\mu=1}^3 \chi_{\ell\mu}^{(i)} \bar{u}_r^{(i)}(r, \theta) q_\ell q_\mu, \quad (12)$$

где параметры $\chi_{\ell\mu}^{(j)}$, $\alpha_{\ell\mu}^{(j)}$ не представлены для краткости. Соотношения (12) введем в третье уравнение системы (1) и воспользуемся методом Бубнова – Галеркина. Используя условие ортогональности собственных форм $\bar{u}_z^{(i)}$, получим следующую динамическую систему с тремя степенями свободы:

$$\ddot{q}_k + p_k^2 q_k = \sum_{i=1}^3 \sum_{\ell=1}^3 \sum_{\mu=1}^3 G_{i\ell\mu}^{(k)} q_i q_\ell q_\mu, \quad k = 1, 2, 3. \quad (13)$$

Параметры $G_{i\ell\mu}^{(k)}$ здесь не представлены для краткости. Приведем систему (13) к следующим безразмерным переменным и параметрам:

$$\tau = p_1 t, \quad \xi_i = \frac{q_i}{h}, \quad i = 1, 2, 3, \quad \varepsilon H_{i\ell\mu}^{(k)} = \frac{h^2}{p_1^2} G_{i\ell\mu}^{(k)}, \quad \ell, \mu = 1, 2, 3,$$

где $0 < \varepsilon \ll 1$. Тогда динамическая система (13) примет следующий вид:

$$\ddot{\xi}_k + \omega_k^2 \xi_k = \varepsilon \sum_{i,\ell,\mu} H_{i\ell\mu}^{(k)} \xi_i \xi_\ell \xi_\mu, \quad k = 1, 2, 3. \quad (14)$$

Как следует из результатов расчета, представленных в табл. 1, в системе (14) наблюдается два внутренних резонанса:

$$\omega_3 = 2\omega_1 + \varepsilon\gamma, \quad \omega_3 = \omega_2 + \varepsilon\sigma, \quad (15)$$

где γ, σ – параметры расстройки.

Итак, система (14) описывает свободные нелинейные колебания круглой пластины с вырезами в присутствии двух внутренних резонансов (15).

5. Анализ нелинейных колебаний. Для исследования динамики системы (14) воспользуемся методом многих масштабов. Тогда решение представим так:

$$\xi_k = \xi_{k,0}(T_0, T_1, \dots) + \varepsilon \xi_{k,1}(T_0, T_1, \dots) + \dots, \quad (16)$$

где $T_0 = \tau$, $T_1 = \varepsilon\tau$. Введем (16) в (14) и приравняем слагаемые при ε^0 и ε^1 . В результате получим следующие соотношения:

$$\xi_{k,0} = A_k \exp(i\omega_k T_0) + \bar{A}_k \exp(-i\omega_k T_0), \quad k = 1, 2, 3, \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \xi_{k,1}}{\partial T_0^2} + \omega_k^2 \xi_{k,1} + 2 \frac{\partial^2 \xi_{k,0}}{\partial T_0 \partial T_1} &= \sum_{j=1}^3 R_{jk} A_k A_j \bar{A}_j \exp(i\omega_k T_0) + \\ &+ G_k A_3 A_k \bar{A}_2 \exp[iT_0(\omega_k + \varepsilon\sigma)] + \\ &+ G_k \bar{A}_3 A_k A_2 \exp[iT_0(\omega_k - \varepsilon\sigma)] + \\ &+ 3H_{k\ell\mu}^{(k)} A_k^2 \bar{A}_k \exp(i\omega_k T_0) + P_k A_2^2 \bar{A}_3 \exp[i(\omega_2 - \varepsilon\sigma)] + \\ &+ F_k A_3^2 \bar{A}_2 \exp[iT_0(\omega_3 + \varepsilon\sigma)] + \text{Н.С.Ч.}, \quad k = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (18)$$

где Н.С.Ч. – несущественные для дальнейшего анализа слагаемые. Параметры R_{jk} , G_k , P_k не представлены для краткости. Введем (17) в (18) и приравняем нулю секулярные члены. В результате получим следующую систему модуляционных уравнений относительно комплексных переменных (A_1, A_2, A_3) :

$$\begin{aligned} 2i\omega_1 \frac{\partial A_1}{\partial T_1} &= A_1 \sum_{j=1}^3 R_{j1} A_j \bar{A}_j + G_1 A_3 \bar{A}_2 A_1 \exp(i\sigma T_1) + \\ &+ G_1 A_1 A_2 \bar{A}_3 \exp(-i\sigma T_1) + 3H_{111}^{(1)} A_1^2 \bar{A}_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2i\omega_2 \frac{\partial A_2}{\partial T_1} &= A_2 \sum_{j=1}^3 R_{j2} A_j \bar{A}_j + G_2 A_3 \bar{A}_2 A_2 \exp(i\sigma T_1) + \\
&+ G_2 A_2^2 \bar{A}_3 \exp(-i\sigma T_1) + \\
&+ P_2 A_2^2 \bar{A}_3 \exp(-i\sigma T_1) + F_2 A_3^2 \bar{A}_2 \exp(i2\sigma T_1) + 3H_{222}^{(2)} A_2^2 \bar{A}_2, \\
2i\omega_3 \frac{\partial A_3}{\partial T_1} &= A_3 \sum_{j=1}^3 R_{j3} A_j \bar{A}_j + G_3 A_3^2 \bar{A}_2 \exp(i\sigma T_1) + \\
&+ G_3 A_2 \bar{A}_3 A_3 \exp(-i\sigma T_1) + P_3 A_2^2 \bar{A}_3 \exp(-i2\sigma T_1) + \\
&+ F_3 A_3^2 \bar{A}_2 \exp(i\sigma T_1) + 3H_{333}^{(3)} A_3^2 \bar{A}_3. \tag{19}
\end{aligned}$$

К системе уравнений (19) применим замену переменных $A_j = 0.5a_j \exp(i\Psi_j)$, $j = 1, 2, 3$. В результате получим систему шести модуляционных уравнений относительно действительных переменных. К полученной системе применим следующую замену переменных:

$$(a_1, a_2, a_3, \Psi_1, \Psi_2, \Psi_3) = (a_1, a_2, a_3, \gamma), \quad \gamma = \Psi_3 - \Psi_2 + \sigma T_1.$$

В результате система модуляционных уравнений примет вид

$$\begin{aligned}
a_1' &= 0, \quad a_2' = -\frac{P_2}{8\omega_2} a_2^2 a_3 \sin \gamma + \frac{F_2}{8\omega_2} a_3^2 a_2 \sin(2\gamma), \\
a_3' &= \frac{F_3}{8\omega_3} a_3^2 a_2 \sin \gamma - \frac{P_3}{8\omega_3} a_2^2 a_3 \sin(2\gamma), \\
\gamma' &= \sigma + \frac{1}{8\omega_2 \omega_3} \sum_j \delta_j a_j^2 + \frac{\delta_*}{8\omega_2 \omega_3} a_2 a_3 \cos \gamma + \\
&+ \left(\frac{F_2}{8\omega_2} a_3^2 - \frac{P_3}{8\omega_3} a_2^2 \right) \cos(2\gamma) + \frac{3}{8\omega_2} H_{222}^{(2)} a_2^2 - \frac{3}{8\omega_3} H_{333}^{(3)} a_3^2, \tag{20}
\end{aligned}$$

где $\delta_* = \omega_3(2G_2 + P_2) - \omega_2(2G_3 + F_3)$, $\delta_j = R_{j2}\omega_3 - R_{j3}\omega_2$, $j = 1, 2, 3$.

Неподвижные точки системы модуляционных уравнений (20) описывают колебания системы (14):

$$\begin{aligned}
\xi_k &= a_k \cos(\Omega_k t), \quad \Omega_k = \omega_k - \varepsilon D_k, \quad k = 1, 2, 3, \\
D_1 &= \frac{1}{8\omega_1} \sum_{j=1}^3 R_{j1} a_j^2 + \frac{3}{8\omega_1} H_{111}^{(1)} a_1^2 + \frac{G_1}{4\omega_1} a_2 a_3 \cos \gamma, \\
D_2 &= \frac{1}{8\omega_2} \sum_{j=1}^3 R_{j2} a_j^2 + \frac{2G_2 + P_2}{8\omega_2} a_2 a_3 \cos \gamma + \frac{F_2}{8\omega_2} a_3^2 \cos(2\gamma) + \frac{3}{8\omega_2} H_{222}^{(2)} a_2^{(2)}, \\
D_3 &= \frac{1}{8\omega_3} \sum_{j=1}^3 R_{j3} a_j^2 + \frac{2G_3 + F_3}{8\omega_3} a_3 a_2 \cos \gamma + \frac{P_3}{8\omega_3} a_2^2 \cos(2\gamma) + \frac{3}{8\omega_3} H_{333}^{(3)} a_3^2.
\end{aligned}$$

В системе автономных уравнений (20) существуют следующие группы неподвижных точек:

$$\begin{aligned}
1^\circ) & a_1 = 0, \quad \gamma_1 = 0, \quad a_2 \neq 0, \quad a_3 \neq 0; \\
2^\circ) & a_1 = 0, \quad \gamma_2 = \pi, \quad a_2 \neq 0, \quad a_3 \neq 0; \\
3^\circ) & a_1 = 0, \quad a_2 = 0, \quad a_3 \neq 0, \quad \gamma \neq 0; \\
4^\circ) & a_1 = 0, \quad a_3 = 0, \quad a_2 \neq 0, \quad \gamma \neq 0; \\
5^\circ) & a_1 \neq 0, \quad a_2 \neq 0, \quad a_3 \neq 0, \quad \gamma \neq 0.
\end{aligned}$$

Для исследования колебаний, соответствующих неподвижным точкам группы 1°), параметр a_2 задается с некоторым шагом. Для каждого значения a_2 параметр a_3 определяется из следующего квадратного уравнения:

$$8\omega_2\omega_3\sigma + a_2^2(\delta_2 - P_3\omega_2 + 3\omega_3H_{222}^{(2)}) + a_3^2(\delta_3 + F_2\omega_3 - 3\omega_2H_{333}^{(3)}) + \delta_*a_2a_3 = 0.$$

Эти неподвижные точки соответствуют колебаниям системы (16), которые определяются соотношениями $\xi_1 = 0$, $\xi_2 \neq 0$, $\xi_3 = 0$.

Если к системе уравнений, описывающей неподвижные точки группы 2°), применить замену переменных $a_3 \rightarrow -a_3$, то придем к системе уравнений, описывающих неподвижные точки группы 1°).

Для исследования движений, описывающихся неподвижными точками группы 3°), переменная a_3 задается с некоторым шагом. Для каждого значения a_3 параметр γ находится из уравнения

$$\cos(2\gamma) = \frac{\omega_2}{F_2} \left(\frac{3}{\omega_3} H_{333}^{(3)} - \frac{\delta_3}{\omega_2\omega_3} - \frac{8\sigma}{a_3^2} \right).$$

Неподвижным точкам группы 3°) отвечают такие колебания системы (16):

$$\xi_1 = \xi_2 = 0, \quad \xi_3 = a_3 \cos(\Omega_3 t), \quad \Omega_3 = \omega_3 - \varepsilon \frac{R_{33} + 3H_{333}^{(3)}}{8\omega_3} a_3^2.$$

Для исследования колебаний, соответствующих неподвижным точкам группы 4°), a_2 задается с некоторым шагом. Для каждого значения a_2 угол γ находится из уравнения

$$\cos(2\gamma) = \frac{\omega_3}{P_3} \left(\frac{\delta_2}{\omega_2\omega_3} + \frac{3}{\omega_2} H_{222}^{(2)} + \frac{8\sigma}{a_2^2} \right).$$

Неподвижным точкам группы 4°) соответствуют такие колебания системы (16):

$$\xi_1 = \xi_3 = 0, \quad \xi_2 = a_2 \cos(\Omega_2 t), \quad \Omega_2 = \omega_2 - \varepsilon \frac{R_{22} + 3H_{222}^{(2)}}{8\omega_2} a_2^2.$$

Для исследования колебаний, соответствующих неподвижным точкам группы 5°), величина a_2 задается с некоторым шагом. Для каждого значения a_2 величины γ , a_3 , a_1 находятся из уравнений

$$\begin{aligned} \cos \gamma &= \frac{P_2 a_2}{2F_2 a_3}, & a_3 &= a_2 \sqrt{\frac{P_2 P_3}{F_2 F_3}}, \\ a_1^2 &= \delta_1^{-1} [-8\sigma\omega_2\omega_3 - a_2^2(\delta_2 + 3\omega_3H_{222}^{(2)}) + a_3^2(3\omega_2H_{333}^{(3)} - \delta_3) - \\ &\quad - \delta_* a_2 a_3 \cos \gamma - (F_2\omega_3 a_3^2 - P_3\omega_2 a_2^2) \cos(2\gamma)]. \end{aligned}$$

6. Численный анализ колебаний. Исследуем колебания пластины с параметрами, представленными в п. 3. Рассмотрим случай 1°), который соответствует возбуждению двух сопряженных форм колебаний. Осесимметричная зонтичная форма колебаний в этом случае не возбуждается. Скелетные кривые таких движений представлены на рис. 3, где показаны зависимости двух частот колебаний Ω_2, Ω_3 от a_3 . Скелетные кривые, описывающие движения по двум сопряженным модам колебаний, являются жесткими.

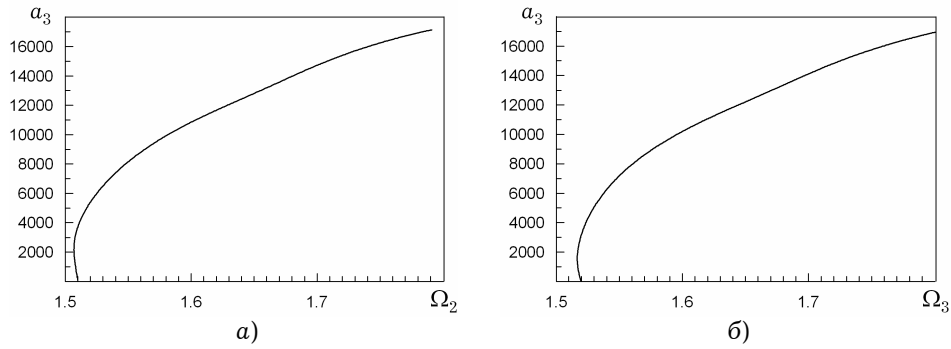


Рис. 3

Рассмотрим случай 5°), который соответствует возбуждению как двух сопряженных форм, так и осесимметричной зонтичной формы колебаний. Скелетные кривые, описывающие зависимость Ω_j , $j = 1, 2$, от a_2 , представлены на рис. 4. Скелетная кривая, описывающая колебания пластины по осесимметричной зонтичной форме (рис. 4а), является жесткой. Скелетные кривые, описывающие колебания по двум сопряженным формам (рис. 4б), являются мягкими.

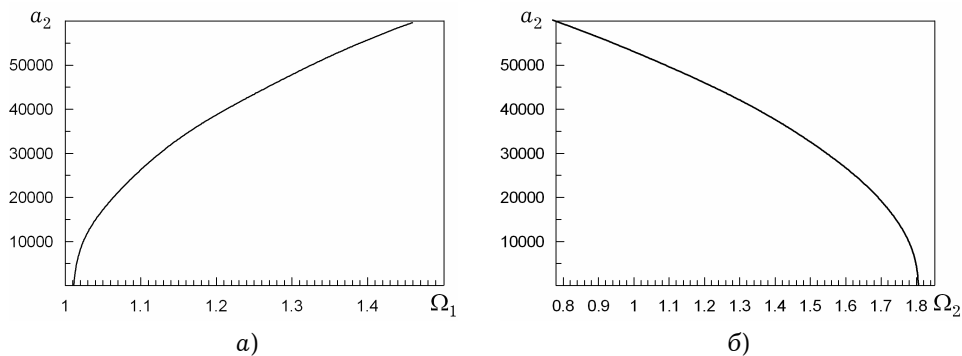


Рис. 4

7. Заключение. В статье исследованы разные случаи нелинейного взаимодействия между формами свободных колебаний. Рассмотрены случаи, когда только две сопряженные формы колебаний возбуждаются, а осесимметричная зонтичная форма не возбуждается, а также случаи, когда возбуждаются как зонтичная, так и сопряженные формы колебаний. При возбуждении только сопряженных форм колебаний скелетные кривые этих форм являются жесткими. Однако при совместном возбуждении и осесимметричной зонтичной, и сопряженных форм вид скелетных кривых сопряженных форм качественно изменяется и превращается из жестких в мягкие.

1. Болотин В. В. Динамическая устойчивость упругих систем. – Москва: Физматлит, 1956. – 750 с.
2. Голоскоков Е. Г., Филиппов А. П. Нестационарные колебания деформируемых систем. – Киев: Наук. думка, 1977. – 344 с.
3. Григложок Э. И., Кабанов В. В. Устойчивость оболочек. – Москва: Наука, 1978. – 344 с.
4. Рвачев В. Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. – Киев: Наук. думка, 1982. – 566 с.
5. Farnsworth C. E., Evan-Iwanowski R. M. Resonance response of nonlinear circular plates subjected to uniform static load // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1969. – 7. – P. 11–16.
6. Luo A., Tan C. Resonant and stationary waves in rotating disks // Nonlinear Dynamics. – 2001. – 24. – P. 359–372.

7. Nayfeh A. H., Mook D. T. Nonlinear oscillations. – New York: Wiley and Sons, 1979. – 830 p.
8. Raman A., Mote C. D. Nonlinear oscillations of circular plate near a critical speed resonance // Int. J. of Nonlinear Mech. – 1999. – **34**. – P. 139–157.
9. Rvachev V. L., Sheiko T. I., Shapiro V., Tsukanov I. On completeness of RFM-solution structure // Computat. Mech. – 2000. – **25**. – P. 305–316.
10. White R. G. Effect of nonlinearity due to large deflections in the resonance testing of structures // J. Sound and Vibr. – 1972. – **16**. – P. 255–267.

**НЕЛІНІЙНІ КОЛИВАННЯ КРУГЛИХ ПЛАСТИН З ВИРІЗАМИ.
МЕТОД R-ФУНКЦІЙ**

Досліджуються коливання геометрично нелінійних круглих пластин з двома вирізами. Для дослідження власних частот коливань застосовується метод R-функцій. Нелінійні коливання пластини розкладаються за власними формами лінійних коливань, які містять R-функції. У результаті застосування методу Бубнова – Гальоркіна отримуємо динамічну систему з трьома ступенями вільності, яка досліджується методом багатьох масштабів.

**NONLINEAR VIBRATIONS OF CIRCULAR PLATES WITH CUTS.
R-FUNCTION METHOD**

The nonlinear vibrations of circular plates with two cuts are analyzed. R-function method is used to obtain the natural frequencies of vibrations. Nonlinear vibrations of the plate are expanded by using eigenmodes, which contain R-function. The dynamical system with three degrees of freedom is derived using the Bubnov – Galerkin procedure. This system is analyzed by multiple scales method.

Ин-т проблем машиностроения
им. А. Н. Подгорного НАН Украины, Харьков

Получено
15.07.08