

РІВНОВАГА НЕСТИСЛИВОГО ПІВПРОСТОРУ, ПОСЛАБЛЕНОГО ВНУТРІШНЬОЮ V-ПОДІБНОЮ СИМЕТРИЧНОЮ ТРІЩИНОЮ, ВЕРШИНА ЯКОЇ ВИХОДИТЬ НА ПОВЕРХНЮ

Розглянуто задачу про рівновагу нестисливого півпростору з внутрішньою симетричною V-подібною тріщиною, вершина якої виходить на поверхню півпростору. На базі знайдених однорідних розв'язків визначено характер поведінки напружень при підході до вершини тріщини.

1. Вступ. На сьогоднішньому етапі розвитку науки і техніки накопичено величезний досвід, пов'язаний із вивченням напружено-деформованого стану у тілах різноманітної форми. Отримані результати були покладені в основу для розробки сучасних чисельних методів. Але в той же час було встановлено, що для розробки ефективних методів важливим є знання про характер розподілу деформацій і напружень всередині тіла. Особливо це стосується тіл із так званими нерегулярними точками, оскільки в околах таких точок напруження, як правило, мають особливості. Прикладами таких тіл можна назвати тіла із внутрішніми дефектами типу тріщин, жорстких включень, якщо крива, що визначає кромку дефекту не є гладкою, тобто має кутову точку, або ж тіла із приповерхневими дефектами, ребра яких виходять під певними кутами на поверхню тіла, тощо. Аналізуючи відомі результати [1, 12, 16–18], бачимо, що при підході до гладкої точки фронту внутрішньої тріщини напруження мають класичну кореневу особливість. Якщо ж розглядати кутову точку, то у випадку, коли ребра тріщини утворюють кут, менший від π , напруження в цій точці мають степеневу особливість, яка слабша від класичної кореневої, а у випадку, коли ребра утворюють кут, більший ніж π , то в кутовій точці фронту тріщини особливість буде сильніша від класичної кореневої. Аналогічна ситуація спостерігається і у випадку, коли в тілі є дві внутрішні тріщини, які взаємодіють одна з одною [7, 13, 14]. Деяка інша ситуація спостерігається у випадку тіла із однією або двома приповерхневими тріщинами [3, 6, 8, 9, 16, 17]. У цьому випадку можливі такі співвідношення між геометричними параметрами тріщин, що в точці виходу їх фронтів на поверхню тіла напруження залишаються обмеженими, а при інших – у такій точці реалізується логарифмічна або степенева особливість, яка може бути як слабшою, так і сильнішою від класичної кореневої особливості.

Проведений аналіз результатів вказує, що локальна геометрія в околі нерегулярної точки внутрішнього або приповерхневого дефекту може суттєво впливати на характер розподілу напружень в околі цієї точки. Тому навіть відносно невелика зміна геометрії дефекту може призвести якщо не до якісних, то до кількісних змін у характері поведінки поля напружень поблизу дефекту, що може значно вплинути на отримані чисельні результати.

У цій роботі розглядається задача про рівновагу пружного нестисливого півпростору, послабленого внутрішньою V-подібною тріщиною, яка лежить у площині, перпендикулярній до поверхні півпростору, а її вершина виходить на поверхню півпростору (рис. 1). Основною метою роботи є визначення характеру поведінки напружень при підході до вершини тріщини. Запропоновану роботу можна розглядати як продовження робіт [6, 8, 9].

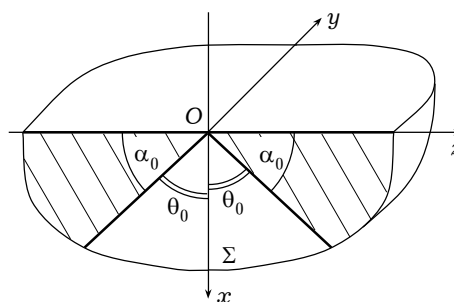


Рис. 1

2. Постановка задачі. Нехай пружний півпростір займає область $x > 0$, а тріщина розташована у площині $y = 0$ і займає там двовимірну область Σ . Зауважимо, що вісь Ox буде бісектрисою кута, утвореного ребрами тріщини. Позначимо цей кут через $2\theta_0$, де $0 < \theta_0 < \pi/2$ (див. рис. 1). Будемо вважати, що поверхня півпростору та стінки тріщини вільні від напружень, а на сам півпростір діють зовнішні симетричні розтягувальні навантаження, напрямлені вздовж осі Oy . Очевидно, що в такому випадку задача буде симетричною за координатою y , і її розв'язок досить шукати у чверті простору $\Omega = \{x > 0, y > 0\}$ при умові симетричності поля напружень за координатою y . Для досягнення поставленої мети будемо шукати тільки однорідні розв'язки задачі, які є нетривіальними розв'язками однорідної системи рівнянь Ляме та задовольняють такі однорідні крайові умови:

– умови на вільній поверхні півпростору

$$\sigma_x|_{x=0} = \tau_{xy}|_{x=0} = \tau_{xz}|_{x=0} = 0; \quad (1)$$

– умови на стінці тріщини

$$\sigma_y|_{y=0} = 0, \quad \tau_{yx}|_{y=0} = \tau_{yz}|_{y=0} = 0, \quad (x, z) \in \Sigma; \quad (2)$$

– умови симетричності напружень за координатою y

$$u_y|_{y=0} = 0, \quad \tau_{yx}|_{y=0} = \tau_{yz}|_{y=0} = 0, \quad (x, z) \notin \Sigma. \quad (3)$$

При цьому умови регулярності на нескінченності не ставимо.

Подамо вектор пружних зміщень у формі Папковича – Нейбера [15]

$$2G\mathbf{u} = 4(1 - \nu)(\mathbf{i}\Phi_1 + \mathbf{j}\Phi_2) - \text{grad}(x\Phi_1 + y\Phi_2 + \Phi), \quad (4)$$

де ν , G – коефіцієнт Пуассона та модуль зсуву пружного матеріалу; \mathbf{i} , \mathbf{j} – орти осей Ox , Oy декартової системи координат; $\Phi = (1 - 2\nu)(\Phi_1^* + \Phi_2^*)$,

$\Phi_{1,2}^*$, $\Phi_1 = \frac{\partial\Phi_1^*}{\partial x}$, $\Phi_2 = \frac{\partial\Phi_2^*}{\partial y}$ – невідомі гармонічні в області Ω функції.

З умови відсутності дотичних напружень при $x = 0$ та при $y = 0$ для невідомих гармонічних функції $\Phi_{1,2}$ отримаємо

$$\frac{\partial\Phi_2}{\partial x}\Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial\Phi_1}{\partial y}\Big|_{y=0} = 0, \quad (5)$$

при цьому для нормальних напружень і зміщень при $x = 0$ та при $y = 0$ можна записати

$$\begin{aligned} \sigma_x|_{x=0} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\Phi_1 + \frac{\partial\Phi_2}{\partial\varphi} \right) \Big|_{x=0} + (1 - 2\nu) \frac{\partial^2\Phi_2^*}{\partial z^2} \Big|_{x=0}, \\ \sigma_y|_{y=0} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\Phi_2 - \frac{\partial\Phi_1}{\partial\varphi} \right) \Big|_{y=0} + (1 - 2\nu) \frac{\partial^2\Phi_1^*}{\partial z^2} \Big|_{y=0}, \\ 2Gu_y|_{y=0} &= 2(1 - \nu)\Phi_2|_{y=0}, \end{aligned} \quad (6)$$

де φ – кильцева координата, наприклад, сферичної або циліндричної систем координат [4].

Враховуючи геометрію задачі, для її розв'язання введемо сферичні координати ρ , θ , φ [4], в яких

$$\begin{aligned} \Omega &= \{\rho > 0, 0 < \theta < \pi, 0 < \varphi < \pi/2\}, \\ \Sigma &= \{\rho > 0, \alpha_0 < \theta < \pi - \alpha_0, \varphi = 0\}, \end{aligned}$$

де $\alpha_0 = \frac{\pi}{2} - \theta_0$, $0 < \alpha_0 < \frac{\pi}{2}$.

У випадку нестисливого матеріалу ($\nu = 1/2$) розв'язання задачі зводиться до відшукування лише невідомих гармонічних функції $\Phi_{1,2}$, які з урахуванням умов (1)–(3), (5), співвідношень (6) і правил обчислення похідних у сферичних координатах задовольнятимуть такі змішані крайові умови:

$$\left. \frac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi} \right|_{\varphi=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial \Phi_2}{\partial \varphi} \right|_{\varphi=\pi/2} = 0, \quad (7)$$

$$\sigma_x \Big|_{\varphi=\pi/2} = -\frac{1}{\rho \sin \theta} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial \varphi^2} \right) \Big|_{\varphi=\pi/2} = 0, \quad (8)$$

$$\sigma_y \Big|_{\varphi=0} = \frac{1}{\rho \sin \theta} \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial \varphi} - \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \varphi^2} \right) \Big|_{\varphi=0} = 0, \quad \alpha_0 < \theta < \pi - \alpha_0, \quad (9)$$

$$2Gu_y \Big|_{\varphi=0} = \Phi_2 \Big|_{\varphi=0} = 0, \quad 0 \leq \theta \leq \alpha_0 \quad \text{або} \quad \pi - \alpha_0 \leq \theta \leq \pi. \quad (10)$$

3. Побудова гармонічних функцій. Аналізуючи умови (7)–(10), бачимо, що отримана задача є симетричною за сферичною координатою θ відносно $\theta = \pi/2$. Тому фактично вихідна задача розпадається на відшукування парних і непарних за θ однорідних розв'язків. Обмежимося відшукуванням парних, оскільки саме вони визначають характер особливості напружень у вершині тріщини. В результаті шукатимемо невідомі гармонічні функції $\Phi_{1,2}$, які задовольнятимуть умову парності за координатою θ :

$$\Phi_{1,2}(\rho, \theta, \varphi) = \Phi_{1,2}(\rho, \pi - \theta, \varphi). \quad (11)$$

Подамо функції $\Phi_{1,2}$ у вигляді інтегралів типу Мелера – Фока за функціями Лежандра [5], записаними у комплексній формі:

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \rho^{s-1/2} \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \mu a_s^{(1)}(\mu) \cos(\mu\varphi) G_s(\mu) P_{s-1/2}^{-\mu}(\cos \theta) d\mu, \\ \Phi_2 &= \rho^{s-1/2} \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \mu a_s^{(2)}(\mu) \cos\left(\mu\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)\right) G_s(\mu) P_{s-1/2}^{-\mu}(\cos \theta) d\mu, \end{aligned} \quad (12)$$

де $a_s^{(1,2)}(\mu)$ – невідомі функції; s – невідомий параметр, який поки що вважаємо чисто уявним числом; $P_{s-1/2}^{-\mu}(\cos \theta)$ – функція Лежандра [2]; $G_s(\mu) = \Gamma\left(\frac{1}{2} - s + \mu\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} + s + \mu\right)$, $\Gamma(\xi)$ – гамма-функція Ейлера [2, 4].

При такому виборі невідомих гармонічних функцій $\Phi_{1,2}$ умови (7) вже виконані. Підставимо подання (12) у крайову умову (8). Після застосування формул інтегрального перетворення типу Мелера – Фока [5] отримаємо

$$a_s^{(2)}(\mu) = -\frac{a_s^{(1)}(\mu)}{\mu} \sin \frac{\pi\mu}{2}. \quad (13)$$

Підставивши розвинення (12) у змішані крайові умови (9), (10) та продовживши отримані рівності на весь проміжок $0 < \theta < \pi$ невідомими функціями, з урахуванням (13) та умови парності (11) прийдемо до співвідношень:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \mu \left[\mu^2 - \sin^2 \frac{\pi\mu}{2} \right] a_s^{(1)}(\mu) G_s(\mu) P_{s-1/2}^{-\mu}(\cos \theta) d\mu = \\ = \begin{cases} \sigma_s(\theta) \sin \theta, & 0 < \theta < \alpha_0, \\ 0, & \alpha_0 < \theta < \pi - \alpha_0, \\ \sigma_s(\pi - \theta) \sin \theta, & \pi - \alpha_0 < \theta < \pi, \end{cases} \end{aligned} \quad (14)$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} a_s^{(1)}(\mu) \sin(\pi\mu) G_s(\mu) P_{s-1/2}^{-\mu}(\cos\theta) d\mu =$$

$$= \begin{cases} 0, & 0 \leq \theta \leq \alpha_0, \\ u_s(\theta), & \alpha_0 \leq \theta \leq \pi - \alpha_0, \\ 0, & \pi - \alpha_0 \leq \theta \leq \pi, \end{cases} \quad (15)$$

де $\sigma_s(\theta)$ – невідома функція, яка відповідає за розподіл нормальних напружень у площині розташування тріщини, а $u_s(\theta)$ – невідома функція, яка відповідає за нормальні зміщення стінок тріщини, при цьому $\sigma_s(\theta)$ та $u_s(\theta)$ повинні задовольняти такі умови:

$$\sigma_s \in C(0 \leq \theta < \alpha_0), \quad \sigma_s(\theta) \sim \text{const} \cdot \sin^{-1/2}(\alpha_0 - \theta), \quad \theta \rightarrow \alpha_0 - 0, \quad (16)$$

$$u_s \in C(\alpha_0 \leq \theta \leq \pi - \alpha_0), \quad u_s(\theta) = u_s(\pi - \theta),$$

$$u_s(\theta) \sim \text{const} \cdot \sin^{1/2}(\theta - \alpha_0), \quad \theta \rightarrow \alpha_0 + 0. \quad (17)$$

Якщо застосувати до рівностей (14), (15) формули інтегрального перетворення типу Мелера – Фока [5], то, використовуючи формули для функцій Лежандра від'ємного аргументу, а також тригонометричні розвинення для цих функцій [2], дістанемо такі співвідношення:

$$\left[\mu^2 - \sin^2 \frac{\pi\mu}{2} \right] a_s^{(1)}(\mu) =$$

$$= \left[1 - \frac{\cos(\pi s)}{\sin(\pi\mu)} \right] d_0^\mu \frac{Y_s^{(+)}(\mu)}{\Gamma(1+\mu)} + \frac{\pi}{\sin(\pi\mu)} \frac{d_0^{-\mu}}{G_s(\mu)} \frac{Y_s^{+}(-\mu)}{\Gamma(1-\mu)},$$

$$\frac{\sin(\pi\mu)}{\mu} a_s^{(1)}(\mu) = d_0^{-\mu} \frac{X_s^{(+)}(\mu)}{\Gamma(1+\mu)}, \quad (18)$$

де $d_0 = \text{tg}\left(\frac{\alpha_0}{2}\right)$, причому $0 < d_0 < 1$, оскільки $0 < \alpha_0 < \frac{\pi}{2}$,

$$Y_s^{(+)}(\mu) = \int_0^{\alpha_0} \sigma_s(t) \left(\frac{\text{tg}\left(\frac{t}{2}\right)}{\text{tg}\left(\frac{\alpha_0}{2}\right)} \right)^\mu F\left(\frac{1}{2} - s; \frac{1}{2} + s; 1 + \mu; \sin^2 \frac{t}{2}\right) dt,$$

$$X_s^{(+)}(\mu) = \int_{\alpha_0}^{\pi - \alpha_0} \frac{u_s(t)}{\sin t} \left(\frac{\text{tg}\left(\frac{t}{2}\right)}{\text{ctg}\left(\frac{\alpha_0}{2}\right)} \right)^\mu F\left(\frac{1}{2} - s; \frac{1}{2} + s; 1 + \mu; \sin^2 \frac{t}{2}\right) dt,$$

– невідомі функції, які із урахуванням обмежень (16), (17), накладених на σ_s і u_s , властивостей гіпергеометричної функції $F(a; b; c; \xi)$ [2] та леми Ватсона [11] будуть аналітичними при $\text{Re } \mu > -\frac{1}{2}$ і при $\mu \rightarrow \infty$ поведуть себе, як $C \cdot \mu^{-1/2}$ та $C \cdot \mu^{-3/2}$ ($C = \text{const}$) відповідно. Зауважимо, що рівності (18) мають виконуватись при чисто уявних значеннях μ .

Вилучаємо в рівностях (18) з розгляду невідому функцію $a_s^{(1)}(\mu)$. В результаті отримаємо рівняння типу Вінера – Гопфа [10]

$$\begin{aligned}
& -\mu \frac{X_s^{(+)}(\mu)}{\Gamma(1+\mu)} + \frac{\cos(\pi s) - \sin(\pi\mu)}{\sin^2\left(\frac{\pi\mu}{2}\right) - \mu^2} d_0^{2\mu} \frac{Y_s^{(+)}(\mu)}{\Gamma(1+\mu)} = \\
& = \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi\mu}{2}\right) - \mu^2} \frac{\pi}{G_s(\mu)} \frac{Y_s^{(+)}(-\mu)}{\Gamma(1-\mu)}, \tag{19}
\end{aligned}$$

яке з урахуванням аналітичних властивостей невідомих функцій $X_s^{(+)}(\mu)$, $Y_s^{(+)}(\mu)$ та коефіцієнтів рівняння можна аналітично продовжити на смугу $|\operatorname{Re} \mu| < \frac{1}{2}$.

Для розв'язання рівняння (19) застосуємо той самий підхід, що застосовувався у роботах [6, 8, 9]. Розв'язування базується на факторизації функції $g(\mu) = \sin^2\left(\frac{\pi\mu}{2}\right) - \mu^2$, яке можна здійснити шляхом її розвинення у нескінченний добуток за нулями [10]. Функція $g(\mu)$ має в комплексній площині три дійсних нулі: нуль другого порядку в точці $\mu = 0$, два простих нулі в точках $\mu = \pm 1$, а також зліченну кількість простих комплексних нулів у точках $\mu = \pm \beta_j$, $\mu = \pm \bar{\beta}_j$, $j = 1, 2, \dots$, які можна знайти лише за допомогою чисельних методів. При цьому $\operatorname{Re} \beta_j > 1$, $\operatorname{Im} \beta_j > 0$, $\beta_j \sim 2j + 1 + i \frac{2}{\pi} \ln(2(2j + 1))$, $j \rightarrow \infty$. В результаті можемо записати

$$\begin{aligned}
& \sin^2 \frac{\pi\mu}{2} - \mu^2 = \\
& = \frac{\pi}{4} \left(\frac{\pi^2}{4} - 1\right) \mu^2 \frac{L^{(+)}(\mu)L^{(+)}(-\mu)}{\Gamma(1+\mu)\Gamma(1-\mu)} \frac{\Gamma\left(1 + \frac{\mu}{2}\right)\Gamma\left(1 - \frac{\mu}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2} + \frac{\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2} - \frac{\mu}{2}\right)}, \tag{20}
\end{aligned}$$

де

$$L^{(+)}(\mu) = \prod_{j=1}^{\infty} \frac{\left(1 + \frac{\mu}{\beta_j}\right)\left(1 + \frac{\mu}{\bar{\beta}_j}\right)}{\left(1 + \frac{\mu}{(2j+1)}\right)^2}.$$

З урахуванням властивостей величин β_j та асимптотичних властивостей нескінченних добутків [10] можна встановити, що $L^{(+)}(\mu)$ буде аналітичною функцією при $\operatorname{Re} \mu > -1$, а при $\mu \rightarrow \infty$ поводить себе, як константа.

Використовуючи факторизацію (20), перепишемо рівняння (19):

$$\begin{aligned}
& \frac{K^{(+)}(-\mu)}{\mu} \tilde{Y}_s^{(+)}(-\mu) = -\mu^2 \tilde{X}_s^{(+)}(\mu) + \\
& + \mu \frac{\cos(\pi s) - \sin(\pi\mu)}{\sin^2\left(\frac{\pi\mu}{2}\right) - \mu^2} d_0^{2\mu} \tilde{Y}_s^{(+)}(\mu), \quad |\operatorname{Re} \mu| < \frac{1}{2}. \tag{21}
\end{aligned}$$

Тут для зручності введено нові невідомі функції

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{X}_s^{(+)}(\mu) \\ \tilde{Y}_s^{(+)}(\mu) \end{array} \right\} = L^{(+)}(\mu) \frac{G_s(\mu)}{\Gamma^2(1+\mu)} \frac{\Gamma\left(1 + \frac{\mu}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2} + \frac{\mu}{2}\right)} \left\{ \begin{array}{l} X_s^{(+)}(\mu) \\ Y_s^{(+)}(\mu) \end{array} \right\}, \tag{22}$$

які з урахуванням властивостей функції $L^{(+)}(\mu)$, гамма-функції [2, 4] і невідомих функцій $X_s^{(+)}(\mu)$, $Y_s^{(+)}(\mu)$ будуть аналітичними при $\operatorname{Re} \mu > -\frac{1}{2}$, а при $\mu \rightarrow \infty$ будуть поводити себе, як $C \cdot \mu^{-3}$ та $C \cdot \mu^{-2}$ ($C = \text{const}$) відповідно, а також коефіцієнт

$$K_s^{(+)}(\mu) = \frac{16}{\pi^2 - 4} \frac{1}{(L^{(+)}(\mu))^2} \frac{\Gamma^2\left(\frac{3}{2} + \frac{\mu}{2}\right) \Gamma^2(1 + \mu)}{\Gamma^2\left(1 + \frac{\mu}{2}\right) G_s(\mu)},$$

який буде аналітичним при $\operatorname{Re} \mu > -\frac{1}{2}$, а на нескінченності поводить себе, як $C \cdot \mu^2$.

Проаналізуємо отриману рівність (21). З урахуванням властивостей невідомої функції $\tilde{Y}_s^{(+)}(\mu)$, функції $K^{(+)}(\mu)$ та гамма-функції [2, 4] ліва частина цієї рівності є аналітичною функцією у півплощині $\operatorname{Re} \mu < \frac{1}{2}$, за винятком простого полюса в точці $\mu = 0$. Права частина (21), якщо врахувати властивості обох невідомих функцій $\tilde{X}_s^{(+)}(\mu)$ та $\tilde{Y}_s^{(+)}(\mu)$, буде аналітичною при $\operatorname{Re} \mu > -\frac{1}{2}$, за винятком простих полюсів у точках $\mu = 0$, $\mu = 1$, $\mu = \beta_j$, $\mu = \bar{\beta}_j$ (нулі знаменника другого доданка). Позбавившись від особливостей у правій частині (21) у точках $\mu = 1$, $\mu = \beta_j$, $\mu = \bar{\beta}_j$, $j = 1, 2, \dots$, рівняння (21) перепишемо у такому вигляді:

$$\begin{aligned} \frac{K_s^{(+)}(-\mu)}{\mu} \tilde{Y}_s^{(+)}(-\mu) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi s) - \sin(\pi \lambda_k)}{\frac{\pi}{2} \sin(\pi \lambda_k) - 2\lambda_k} \frac{d_0^{2\lambda_k}}{\mu - \lambda_k} y_k = \\ = -\mu^2 \tilde{X}_s^{(+)}(\mu) + \mu \frac{\cos(\pi s) - \sin(\pi \mu)}{\sin^2\left(\frac{\pi \mu}{2}\right) - \mu^2} d_0^{2\mu} \tilde{Y}_s^{(+)}(\mu) - \\ - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi s) - \sin(\pi \lambda_k)}{\frac{\pi}{2} \sin(\pi \lambda_k) - 2\lambda_k} \frac{d_0^{2\lambda_k}}{\mu - \lambda_k} y_k, \quad |\operatorname{Re} \mu| < \frac{1}{2}, \quad (23) \end{aligned}$$

де для спрощення записів використано такі позначення: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \beta_1$, $\lambda_3 = \bar{\beta}_1, \dots$, $\lambda_{2j} = \beta_j$, $\lambda_{2j+1} = \bar{\beta}_j$, $j = 1, 2, \dots$, а також введено невідомі величини $y_k = y_k(s) = \lambda_k \tilde{Y}_s^{(+)}(\lambda_k)$, $k = 1, 2, \dots$. Зауважимо, що враховуючи поведінку невідомої функції $\tilde{Y}_s^{(+)}(\mu)$ на нескінченності, для введених невідомих величин можна записати асимптотичну рівність

$$y_k = y_k(s) \sim \frac{C(s)}{\lambda_k} = O(k^{-1}), \quad k \rightarrow \infty.$$

Зазначимо, що ряди, які входять у праву та ліву частини отриманої рівності (23), будуть абсолютно збіжними, це впливає з поведінки величин λ_k і y_k при $k \rightarrow \infty$ та того, що $0 < d_0 < 1$.

Додаткові доданки рівності (23) підібрані так, що ліва її частина аналітична у півплощині $\operatorname{Re} \mu < \frac{1}{2}$, за винятком простого полюса в точці $\mu = 0$, а

права – у півплощині $\operatorname{Re} \mu > -\frac{1}{2}$ з простим полюсом у тій самій точці. При цьому, враховуючи поведінку окремих складових рівності (23) при $\mu \rightarrow \infty$, можемо стверджувати, що ліва й права частини рівності поводять себе, як $C \cdot \mu^{-1}$ при $\mu \rightarrow \infty$ в областях їх аналітичності. Тоді, використовуючи принцип аналітичного продовження та узагальнену теорему Ліувілля [10], отримуємо дві рівності, що визначають невідомі функції $\tilde{X}_s^{(+)}(\mu)$ та $\tilde{Y}_s^{(+)}(\mu)$:

$$\frac{K_s^{(+)}(\mu)}{\mu} \tilde{Y}_s^{(+)}(\mu) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi s) - \sin(\pi \lambda_k)}{\frac{\pi}{2} \sin(\pi \lambda_k) - 2\lambda_k} \frac{d_0^{2\lambda_k}}{\mu + \lambda_k} y_k = \frac{y_0}{\mu}, \quad (24)$$

$$\begin{aligned} & -\mu^2 \tilde{X}_s^{(+)}(\mu) + \mu \frac{\cos(\pi s) - \sin(\pi \mu)}{\sin^2\left(\frac{\pi \mu}{2}\right) - \mu^2} d_0^{2\mu} \tilde{Y}_s^{(+)}(\mu) - \\ & - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi s) - \sin(\pi \lambda_k)}{\frac{\pi}{2} \sin(\pi \lambda_k) - 2\lambda_k} \frac{d_0^{2\lambda_k}}{\mu - \lambda_k} y_k = \frac{y_0}{\mu}, \end{aligned} \quad (25)$$

де $y_0 = y_0(s)$ – деяка невідома величина, яка появляється внаслідок застосування узагальненої теореми Ліувілля. Отримані рівності (24) і (25) справджуються у півплощині $\operatorname{Re} \mu > -\frac{1}{2}$.

Для повного визначення функцій $\tilde{X}_s^{(+)}(\mu)$ та $\tilde{Y}_s^{(+)}(\mu)$ з рівностей (24), (25) необхідно знайти невідомі величини $y_0, y_k, k = 1, 2, \dots$. Враховуючи правило, за яким введено величини $y_k, k = 1, 2, \dots$, для їх визначення послідовно покладемо в рівності (24) $\mu = \lambda_m, m = 1, 2, \dots$. В результаті отримаємо злічений набір рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{K_s^{+}(\lambda_m)}{\lambda_m^2} y_m - \frac{y_0}{\lambda_m} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi s) - \sin(\pi \lambda_k)}{\frac{\pi}{2} \sin(\pi \lambda_k) - 2\lambda_k} \frac{d_0^{2\lambda_k}}{\lambda_m + \lambda_k} y_k = 0, \\ m = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (26)$$

Зауважимо, що отримані рівняння (26) не утворюють замкненої нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно усіх невідомих $y_0, y_k, k = 1, 2, \dots$, оскільки не містить рівняння для визначення y_0 . Для отримання цього останнього рівняння, яке замкне нескінченну систему, визначимо з рівності (24) функцію $\tilde{Y}_s^{(+)}(\mu)$. Підставимо отриманий вираз у рівність (25) і після цього спрямуємо $\mu \rightarrow 0$. В результаті дістанемо шукане рівняння

$$\begin{aligned} & \left[\ln d_0^2 + 4 \sum_{j=1}^{\infty} \left(\operatorname{Re} \frac{1}{\lambda_j} - \frac{1}{2j+1} \right) - \psi\left(\frac{3}{2}\right) - \psi(1) + \psi\left(\frac{1}{2} + s\right) - \right. \\ & \left. - \pi \frac{1 + \sin(\pi s)}{\cos(\pi s)} \right] y_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi s) - \sin(\pi \lambda_k)}{\frac{\pi}{2} \sin(\pi \lambda_k) - 2\lambda_k} \frac{d_0^{2\lambda_k}}{\lambda_k} y_k = 0, \end{aligned} \quad (27)$$

де $\psi(\xi)$ – логарифмічна похідна від гамма-функції [2, 4].

Зазначимо, що отримана нескінченна система лінійних алгебраїчних рівнянь (26), (27) буде квазіцілком регулярною при кожному фіксованому значенні параметра s .

До цього часу приймали, що параметр s приймає лише чисто уявні значення. Виведемо для шуканих гармонічних функцій $\Phi_{1,2}$ подання через розв'язки системи (26), (27), яке можна буде аналітично продовжити з уявної осі на всю комплексну площину s . Для цього у співвідношеннях (12) замість функцій $a_s^{(1,2)}(\mu)$ слід підставити їх вирази через функції $\tilde{X}_s^{(+)}(\mu)$ та $\tilde{Y}_s^{(+)}(\mu)$ із урахуванням рівностей (13), (18) і (22). Використовуючи другу з рівностей (18), запишемо функції $\Phi_{1,2}$ у вигляді

$$\Phi_1 = \frac{\rho^{s-1/2}}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \mu^2 \frac{\cos(\mu\varphi)}{\sin(\pi\mu)} \tilde{X}_s^{(+)}(\mu) \frac{\Gamma(1+\mu)}{L^{(+)}(\mu)} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2} + \frac{\mu}{2}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{\mu}{2}\right)} d_0^{-\mu} P_{s-1/2}^{-\mu}(\cos\theta) d\mu,$$

$$\Phi_2 = \frac{\rho^{s-1/2}}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \mu \frac{\cos\mu\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi\mu}{2}\right)} \tilde{X}_s^{(+)}(\mu) \frac{\Gamma(1+\mu)}{L^{(+)}(\mu)} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2} + \frac{\mu}{2}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{\mu}{2}\right)} d_0^{-\mu} P_{s-1/2}^{-\mu}(\cos\theta) d\mu.$$

При $0 < \theta < \alpha_0$ інтеграли в отриманих рівностях можна порахувати шляхом замикання контуру інтегрування у півплощині $\text{Re}\mu > 0$ та обчислення суми лишків за усіма особливими точками, які лежать у цій півплощині. В результаті отримаємо

$$\Phi_1 = -\frac{\rho^{s-1/2}}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \tilde{X}_s^{(+)}(k) \cos(k\varphi) \times$$

$$\times \frac{k^2 \Gamma(1+k)}{L^{(+)}(k)} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2} + \frac{k}{2}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{k}{2}\right)} d_0^{-k} P_{s-1/2}^{-k}(\cos\theta),$$

$$\Phi_2 = -\frac{\rho^{s-1/2}}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{X}_s^{(+)}(2k+1) \sin((2k+1)\varphi) \times$$

$$\times \frac{(2k+1)\Gamma(2k+2)}{L^{(+)}(2k+1)} \frac{\Gamma(k+2)}{\Gamma\left(\frac{3}{2} + k\right)} d_0^{-2k-1} P_{s-1/2}^{-2k-1}(\cos\theta). \quad (28)$$

Використовуючи співвідношення (24), (25), величини $\tilde{X}_s^{(+)}(m)$, $m = 1, 2, \dots$, визначаємо через лінійні комбінації величин y_0, y_k , $k = 1, 2, \dots$, які є розв'язками системи (26), (27). При цьому $\tilde{X}_s^{(+)}(m) \sim C(s)/m$, $m \rightarrow +\infty$. Використовуючи регулярність системи (26), (27), подання (28) можемо розглядати не лише при уявних s , але й при довільних значеннях цього параметра.

Для отримання подання гармонічних функцій $\Phi_{1,2}$ на проміжку $\pi - \alpha_0 < \theta < \pi$ у рівностях (28) досить поміняти θ на $\pi - \theta$, оскільки для цих функцій виконується умова парності (11). На проміжку $\alpha_0 \leq \theta \leq \pi - \alpha_0$ також можна отримати подання, аналогічні до (28), але в цьому випадку замість другої з рівностей (18) слід використовувати першу.

Аналізуючи подання (28), можемо зробити висновок, що гармонічні функції $\Phi_{1,2}$ будуть відмінними від тривіальних лише у тому випадку, коли нескінченна система (26), (27) буде мати нетривіальний розв'язок. Оскільки система (26), (27) однорідна, то вона матиме такий розв'язок лише у випадку, коли її основний визначник перетворюється в нуль. Це дозволяє знайти можливі значення невідомого параметра s . Відшукання нулів визначника системи (26), (27) виконували чисельно шляхом редукції системи до скінченної.

4. Аналіз розподілу напружень. Використовуючи співвідношення (6), правило обчислення похідних у сферичних координатах і подання (28) для гармонічних функцій $\Phi_{1,2}$, для нормальних (розриваючих) напружень у площині розташування тріщини можемо записати

$$\begin{aligned} \sigma_y \Big|_{y=0} &= \sigma_y \Big|_{\varphi=0} = \frac{1}{\rho \sin \theta} \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial \varphi} - \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \varphi^2} \right) \Big|_{\varphi=0} = \\ &= -\frac{1}{\pi} \frac{\rho^{s-3/2}}{\sin \theta} \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \left(k^2 - \sin^2 \frac{\pi k}{2} \right) \tilde{X}_s^{(+)}(k) \times \\ &\times \frac{k^2 k!}{L^{(+)}(k)} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2} + \frac{k}{2}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{k}{2}\right)} d_0^{-k} P_{s-1/2}^{-k}(\cos \theta), \quad \rho > 0, \quad 0 < \theta < \alpha_0. \end{aligned} \quad (29)$$

Аналізуючи отримане подання (29), можемо зробити висновок, що характер поведінки напружень в околі вершини тріщини ($\rho \rightarrow 0+$) визначається нулями визначника системи (26), (27), які лежать у півплощині $\text{Re } s > 0$. У роботі шукали лише дійсні додатні нулі цього визначника. Чисельний аналіз показав, що їх розташування залежить від величини кута θ_0 , утвореного ребрами тріщини. З отриманих результатів випливає, що в залежності від кута θ_0 можливі якісно різні картини поведінки напружень в околі вершини тріщини.

1^о). Якщо $0 < \theta_0 < \theta_0^* \approx 0.2262\pi$, то найменшими додатними нулями визначника системи (26), (27) будуть $s = s_0 = \frac{3}{2}$ та $s = s_1 > \frac{3}{2}$ (наближені значення наведено у табл. 1). Обидва нулі прості. В цьому випадку, подавши розв'язок задачі у вигляді суперпозиції однорідних розв'язків, отримаємо, що при підході до вершини тріщини для нормальних напружень справджується така асимптотична поведінка:

$$\sigma_y \Big|_{\varphi=0} \sim K_0(\theta) + K_1(\theta) \rho^\gamma, \quad \rho \rightarrow 0+, \quad \theta \in (0, \alpha_0) - \text{фіксоване}, \quad (30)$$

де $\gamma = s_1 - \frac{3}{2}$, $K_{0,1}$ - деякі неперервні функції від θ . Враховуючи результати, наведені у табл. 1, бачимо, що у цьому випадку показник $\gamma > 0$ і напруження залишаються обмеженими при підході до вершини тріщини.

2^о). Якщо $\theta_0 = \theta_0^*$, то найменшим додатним нулем визначника системи (26), (27) буде $s = s_0 = s_1 = \frac{3}{2}$, але, на відміну від попереднього випадку, це буде нуль другого порядку. Суперпозиція однорідних розв'язків у цьому випадку визначає для напружень таку поведінку при підході до вершини тріщини:

$$\sigma_y \Big|_{\varphi=0} \sim K_0(\theta) + K_1(\theta) \ln \rho, \quad \rho \rightarrow 0+, \quad \theta \in (0, \alpha_0) - \text{фіксоване}.$$

З отриманого зображення бачимо, що напруження мають у точці O логарифмічну особливість, яка значно слабша від класичної кореневої особливості, що має місце на ребрах тріщини.

Таблиця 1

θ_0/π	s_1	γ	θ_0/π	s_1	γ	θ_0/π	s_1	γ
0	2.5	1.0	0.25	1.4138	-0.0862	0.46	0.8333	-0.6667
0.05	2.3041	0.8041	0.3	1.2531	-0.2469	0.47	0.8034	-0.6966
0.1	2.0695	0.5695	0.35	1.1138	-0.3862	0.48	0.7694	-0.7306
0.15	1.8251	0.3251	0.3949	1.0	-0.5	0.49	0.7262	-0.7738
0.2	1.6033	0.1033	0.4	0.9872	-0.5128	0.4999	0.6101	-0.8899
0.2262	1.5	0.0	0.45	0.8610	-0.6390	0.5	0.5	-1.0

3°). Якщо ж $\theta_0^* < \theta_0 < \frac{\pi}{2}$, то найменшими додатними нулями визначника системи (26), (27) будуть нулі у точках $s = s_1 < \frac{3}{2}$ (наближені значення наведені у табл. 1) та $s = s_0 = \frac{3}{2}$, які будуть простими нулями. Тоді аналогічно, як у випадку 1°), поведінка напружень при підході до вершини тріщини буде описуватись асимптотичною рівністю (30), але показник $\gamma = s_1 - \frac{3}{2} < 0$ (див. табл. 1). У цьому випадку напруження у точці O матимуть локальну степеневу особливість. При цьому, як впливає із результатів, наведених у таблиці, при $\theta_0^* < \theta_0 < \theta_0^{**} \approx 0.3949\pi$ степенева особливість у вершині тріщини буде слабшою від класичної кореневої, що має місце на ребрах, тобто концентрація напружень на ребрах тріщини буде сильнішою, ніж у вершині. При $\theta_0 = \theta_0^{**}$ у вершині тріщини напруження матимуть класичну кореневу особливість, таку саму, як і на ребрах, тобто концентрація напружень на ребрах тріщини та у її вершині буде приблизно однаковою (конкретні значення залежатимуть від прикладених до тіла навантажень). Нарешті, при $\theta_0^{**} < \theta_0 < \frac{\pi}{2}$ степенева особливість напружень у вершині тріщини буде сильнішою від класичної кореневої, яка має місце на ребрах, тобто у вершині напруження концентруватимуться сильніше, ніж на ребрах.

Проведений якісний аналіз розподілу напружень дозволяє спрогнозувати процес розповсюдження в тілі внутрішньої симетричної V -подібної тріщини, вершина якої виходить на його поверхню.

1. Андрейкив А. Е. Пространственные задачи теории трещин. – Киев: Наук. думка, 1982. – 348 с.
2. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции: В 3 т. – Т. 1. – Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. – Москва: Наука, 1965. – 294 с.
3. Глушков Е. В., Глушкова Н. В., Лапина О. Н. Показатели сингулярности упругих напряжений в точке выхода трещины на поверхность // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1998. – № 5. – С. 146–153.
4. Лебедев Н. Н. Специальные функции и их приложения. – Москва: Физматгиз, 1963. – 379 с.

5. Лебедев Н. Н., Скальская И. П. Интегральные разложения, родственные преобразованиям Мелера-Фока // Дифференц. уравнения. – 1986. – **22**, № 9. – С. 1515–1523.
6. Ловейкин А. В., Улитко А. Ф. Анализ напряженно-деформированного состояния в несжимаемом полупространстве с приповерхностной клиновидной трещиной // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2006. – № 1. – С. 136–148.
7. Ловейкин А. В., Улитко А. Ф. О распределении напряжений в упругом пространстве, ослабленном двумя клиновидными разрезами, лежащими в одной плоскости // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2004. – № 1. – С. 40–49.
8. Ловейкін А. В. Про особливості поля напружень у нестисливному півпросторі з клиноподібним приповерхневим розрізом при великих кутах занурення ребра // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2004. – **47**, № 3. – С. 126–133.
9. Ловейкін А. В., Улітко А. Ф. Рівновага нестисливого півпростору, послабленого двома V-подібними приповерхневими тріщинами, що мають спільну вершину // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2007. – **50**, № 2. – С. 35–44.
10. Нобл Б. Метод Винера – Хопфа. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1968. – 279 с.
11. Олвер Ф. Асимптотика и специальные функции. – Москва: Наука, 1990. – 528 с.
12. Панасюк В. В., Андрейкив А. Е., Стадник М. М. Пространственные задачи теории трещин: (Обзор). Ч. 1. Основные механические концепции и математические методы в пространственных задачах теории трещин // Физ.-хим. механика материалов. – 1979. – **15**, № 4. – С. 39–55.
13. Улітко А. Ф., Ловейкін А. В. Задача про визначення напружень у пружному просторі з двома клиноподібними розрізами, розміщеними в одній площині // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2001. – **44**, № 4. – С. 70–76.
14. Улітко А. Ф., Ловейкін А. В. Задача про рівновагу простору з двома розрізами – по півплощині та клиноподібним у плані, які лежать в одній площині // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2000. – **43**, № 1. – С. 109–114.
15. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. – Ленинград: Наука, 1967. – 402 с.
16. Glushkov E., Glushkova N., Lapina O. 3D elastic stress singularity at polyhedral corner points // Int. J. Solids Struct. – 1999. – **36**. – P. 1105–1128.
17. Sinclair G. B. Stress singularities in classical elasticity-II: Asymptotic identification // Appl. Mech. Rev. – 2004. – **57**, No. 5. – P. 385–439.
18. Xu L., Kundu T. Stress singularities at crack corners // J. Elasticity. – 1995. – **39**. – P. 1–16.

**РАВНОВЕСИЕ НЕСЖИМАЕМОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА,
ОСЛАБЛЕННОГО ВНУТРЕННЕЙ V-ОБРАЗНОЙ СИММЕТРИЧНОЙ ТРЕЩИНОЙ,
ВЕРШИНА КОТОРОЙ ВЫХОДИТ НА ПОВЕРХНОСТЬ**

Рассмотрена задача о равновесии несжимаемого полупространства с внутренней симметричной V-образной трещиной, вершина которой выходит на поверхность полупространства. На основании найденных однородных решений определен характер поведения напряжений при подходе к вершине трещины.

**EQUILIBRIUM OF INCOMPRESSIBLE HALF-SPACE
WEAKENED BY THE INTERNAL SYMMETRICAL V-SHAPED CRACK
WITH VERTEX WHICH LIES ON THE SURFACE**

This paper deals with the problem on equilibrium of an incompressible half-space with the internal symmetrical V-shaped crack vertex of which lies on the half-space surface. Using the determined homogeneous solutions of the problem the stress behavior in the neighborhood of the crack vertex is defined.

Київ. нац. ун-т ім. Тараса Шевченка, Київ

Одержано
13.07.08