

**ПЕРІОДИЧНА СИСТЕМА ЕЛЕКТРОПРОНИКНИХ ТРІЩИН
НА МЕЖІ ДВОХ П'ЄЗОЕЛЕКТРИЧНИХ МАТЕРІАЛІВ**

Побудовано замкнений розв'язок для біматеріальної площини, що складається з двох різнорідних п'єзоелектричних півплощин, із періодичною системою електропроникних тріщин на лінії поділу матеріалів (інтерфейсі). Приймається до уваги наявність зон гладкого контакту берегів біля вершин тріщин. Шляхом подання характеристик електромеханічних полів через кусково-аналітичні функції задачу зведено до періодичної задачі Діріхле – Рімана, яку розв'язано точно. В результаті чисельного аналізу одержаного розв'язку для різних комбінацій п'єзоелектриків досліджено залежність відносної довжини зон контакту та коефіцієнтів інтенсивності напружень від відношення довжини тріщин до величини періоду.

Вступ. Завдяки зв'язаності електромеханічних полів, притаманній п'єзоелектричним матеріалам, вони широко використовуються в інженерній практиці як сенсори, датчики та перемикачі. Але п'єзокераміка часто містить мікродфекти, такі як тріщини, що зменшують її міцність. Задачам про тріщину в однорідному п'єзоелектричному матеріалі приділяється значна увага в літературі. Водночас міжфазним тріщинам, незважаючи на їх важливість, присвячено менше досліджень через складність задач. У статті [4] аналітично розв'язана задача для однієї тріщини з електропроникними берегами на межі поділу двох п'єзоелектриків. Сингулярність напружень міжфазних тріщин в залежності від різних граничних умов на берегах тріщини досліджена в роботі [17]. Необхідно зазначити, що ці дослідження виконані в рамках класичної моделі міжфазної тріщини, що призводить до осцилюючої особливості в околі її вершин і до фізично нереального взаємопроникнення матеріалів.

З метою усунення вказаної осцилюючої особливості було запропоновано модель міжфазної тріщини, в якій враховується контакт берегів біля її вершин [11]. Подальший розвиток цієї моделі отримано в [9, 10], де відповідно для гладкого та фрикційного контакту побудовано аналітичні розв'язки поставленої задачі. Інший спосіб моделювання привершинних зон міжфазної тріщини реалізовано у [2, 6] шляхом введення зон послаблених міжчастинкових зв'язків на продовженні тріщини. У випадку, коли розглядається п'єзоелектричний біматеріал, задача ускладнюється за рахунок взаємозв'язку механічних полів з електричними. Контактна модель електропроникної тріщини для таких матеріалів розглядалась у [14].

Періодична система тріщин, розміщених на лінії поділу двох п'єзоелектриків, у рамках «класичної» моделі досліджувалась в роботах [5, 12, 13]. У рамках «контактної» моделі періодична система міжфазних тріщин між ізотропними матеріалами вивчалась у роботі [16] шляхом чисельного розв'язання системи сингулярних інтегральних рівнянь та аналітично – у роботі [3]; задача для періодичної системи міжфазних тріщин між анізотропними матеріалами розв'язана в [15] методами теорії функції комплексної змінної. Для випадку ж п'єзоелектричних матеріалів аналогічна задача ще не була розглянута. У пропонуваній роботі побудовано аналітичний розв'язок задачі для періодичної системи тріщин із зонами контакту між двома п'єзоелектричними матеріалами та отримано формули для обчислення відносних довжин зон контакту і коефіцієнтів інтенсивності напружень (КІН). Як частковий випадок одержаного розв'язку досліджено періодичну систему електропроникних тріщин у рамках «осциляційної» моделі. Проведено порівняння поведінки полів напружень на продовженні тріщини для обох моделей. Для випадку тріщини малої (відносно періоду) довжини результати порівнюються з результатами для однієї тріщини.

Формулювання та розв'язування основних рівнянь. Визначальні рівняння для п'єзоелектричного матеріалу мають вигляд

$$\Pi_{iJ} = E_{iJK\ell} V_{K,\ell}, \quad (1)$$

$$\Pi_{iJ,i} = 0, \quad (2)$$

де

$$V_K = \begin{cases} u_k, & K = 1, 2, 3, \\ \varphi, & K = 4, \end{cases} \quad (3)$$

$$\Pi_{iJ} = \begin{cases} \sigma_{iJ}, & i, J = 1, 2, 3, \\ D_i, & i = 1, 2, 3, \quad J = 4, \end{cases} \quad (4)$$

$$E_{iJK\ell} = \begin{cases} C_{ijk\ell}, & J, K = 1, 2, 3, \\ e_{\ell ij}, & J = 1, 2, 3, \quad K = 4, \\ e_{ik\ell}, & K = 1, 2, 3, \quad J = 4, \\ -\varepsilon_{i\ell}, & J = K = 4. \end{cases} \quad (5)$$

Тут $u_k, \varphi, \sigma_{ij}, D_i$ – переміщення, електричний потенціал, напруження та електрична індукція відповідно. У рівняннях (1)–(5) нижні індекси, записані малими літерами, змінюються від 1 до 3, великими – від 1 до 4.

Вважаємо, що всі поля є незалежними від координати x_2 . Тоді розв'язок рівнянь (1), (2) можна подати у вигляді

$$\mathbf{V} = \mathbf{a}\mathbf{f}(z),$$

де $z = x_1 + px_3$, $\mathbf{V} = \{u_1, u_2, u_3, \varphi\}^\top$, $\mathbf{f}(z) = \{f_1(z_1), f_2(z_2), f_3(z_3), f_4(z_4)\}^\top$ – довільна аналітична вектор-функція, яку потрібно визначити, вектор $\mathbf{a} = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}^\top$ знаходимо з наступного рівняння:

$$[\mathbf{Q} + p(\mathbf{R} + \mathbf{R}^\top) + p^2\mathbf{T}]\mathbf{a} = 0. \quad (6)$$

Елементи матриць \mathbf{Q}, \mathbf{R} і \mathbf{T} розміру 4×4 визначаються як

$$Q_{JK} = E_{1JK1}, \quad R_{JK} = E_{1JK3}, \quad T_{JK} = E_{3JK3}.$$

Нетривіальний розв'язок рівняння (6) існує, якщо p є коренем рівняння

$$\det[\mathbf{Q} + p(\mathbf{R} + \mathbf{R}^\top) + p^2\mathbf{T}] = 0. \quad (7)$$

Оскільки рівняння (7) не має дійсних коренів [17], позначимо корені рівняння (7) з додатними уявними частинами через p_α , а відповідні їм власні вектори рівняння (6) – через \mathbf{a}_α (індекс α приймає значення 1, 2, 3, 4). Загальний розв'язок рівнянь (1), (2) можна подати у такому вигляді [17]:

$$\mathbf{V} = \mathbf{A}\mathbf{f}(z) + \overline{\mathbf{A}}\overline{\mathbf{f}}(\bar{z}), \quad (8)$$

де $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4]$ – матриця, складена з власних векторів, $z_\alpha = x_1 + p_\alpha x_3$. Введемо вектор

$$\mathbf{t} = \{\sigma_{13}, \sigma_{23}, \sigma_{33}, D_3\}^\top.$$

Використовуючи рівняння (1) і залежність (8), цей вектор подамо у формі

$$\mathbf{t} = \mathbf{B}\mathbf{f}'(z) + \overline{\mathbf{B}}\overline{\mathbf{f}}'(\bar{z}), \quad (9)$$

де матриця \mathbf{B} розміру 4×4 та вектор $\mathbf{f}'(z)$ мають наступний вигляд:

$$B_{KL} = (E_{2KJ1} + p_L E_{2KJ2})A_{JL},$$

$$\mathbf{f}'(z) = \left[\frac{df_1(z_1)}{dz_1}, \frac{df_2(z_2)}{dz_2}, \frac{df_3(z_3)}{dz_3}, \frac{df_4(z_4)}{dz_4} \right]^\top.$$

Постановка задачі. Розглянемо періодичну систему тріщин, розміщених на лінії стику двох різнорідних п'єзоелектричних півплощин (рис. 1). Характеристики матеріалів задано пружними модулями $C_{ijkl}^{(m)}$, п'єзоелектричними константами $e_{ikl}^{(m)}$ та діелектричними константами $\varepsilon_{il}^{(m)}$. Індекс $m = 1$ ($m = 2$) відповідає «верхній» («нижній») півплощині.

Вважаємо, що на нескінченності діють рівномірно розподілені розтягувальні σ та зсувні τ навантаження, а також задано рівномірно розподілене електричне зміщення D . Під дією цих чинників тріщини частково розкриваються, а біля їхніх вершин виникає контакт берегів. Ці зони контакту для реальних комбінацій п'єзоелектриків є малими, оскільки параметри, що характеризують відмінність електромеханічних

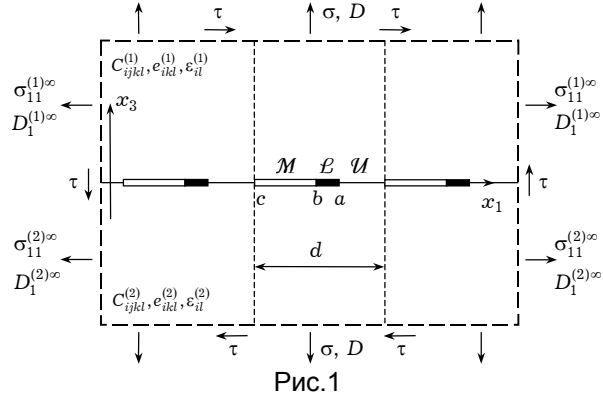


Рис. 1

властивостей матеріалів, зазвичай відрізняються несуттєво. Координати вершин тріщини у фундаментальній стрічці [1] позначимо через c та a , а період вважаємо рівним d . Крім того, сукупність відкритих ділянок позначимо через \mathcal{M} , зону контакту – через \mathcal{L} , ділянки жорсткого зчеплення – через \mathcal{U} . Зони контакту вводимо лише біля правих вершин тріщин. Це спрощує задачу і є виправданим для нульових і від'ємних зсувних навантажень, оскільки в цьому випадку ліві зони контакту є дуже малими і їх врахування не впливає на результати. Якщо зсувні навантаження додатні, то аналогічним чином зони контакту можуть бути враховані біля лівих вершин тріщин. Зазначимо, що на рис. 1 стрілками показано напрям дії додатних зсувних навантажень τ на нескінченності.

Вважаючи зони контакту гладкими, відкриті частини тріщин ненавантаженими, а береги тріщин електропроникними, умови спряження та граничні умови для збурених тріщинами електромеханічних полів можна записати у вигляді

$$[[\mathbf{V}]] = 0, \quad [[\mathbf{t}]] = 0, \quad x_1 \in \mathcal{U}, \quad (10)$$

$$\sigma_{13}^{\pm} = 0, \quad [[\sigma_{33}]] = 0, \quad [[u_3]] = 0, \quad [[\varphi]] = 0, \quad [[D_3]] = 0, \quad x_1 \in \mathcal{L}, \quad (11)$$

$$\sigma_{13}^{\pm} = 0, \quad \sigma_{33}^{\pm} = 0, \quad [[\varphi]] = 0, \quad [[D_3]] = 0, \quad x_1 \in \mathcal{M}, \quad (12)$$

де $[[\cdot]]$ означає стрибок функції при переході через інтерфейс.

Загальний аналітичний розв'язок. На основі подань (8), (9) аналогічно, як у [14], отримуємо такі вирази для стрибка переміщень та електричного потенціалу, а також компонент тензора напружень і вектора електричної індукції на межі поділу матеріалів:

$$[[\mathbf{V}'(x_1)]] = \mathbf{W}^+(x_1) - \mathbf{W}^-(x_1), \quad \mathbf{t}^{(1)}(x_1) = \mathbf{G}\mathbf{W}^+(x_1) - \bar{\mathbf{G}}\mathbf{W}^-(x_1), \quad (13)$$

де

$$\mathbf{G} = \mathbf{B}^{(1)}\mathbf{D}^{-1}, \quad \mathbf{D} = \mathbf{A}^{(1)} - \bar{\mathbf{A}}^{(2)}(\bar{\mathbf{B}}^{(2)})^{-1}\mathbf{B}^{(1)},$$

$\mathbf{W}(z)$ – функція, аналітична у всій площині, за винятком області тріщин.

Припустимо, що складові біматеріалу є матеріалами класу bmm [8], поляризованими в напрямку осі Ox_3 . Тоді для розглядуваного навантаження реалізується плоска деформація і матриця \mathbf{G} без другого рядка і стовпця

має таку структуру:

$$\mathbf{G} = \begin{vmatrix} ig_{11} & g_{13} & g_{14} \\ g_{31} & ig_{33} & ig_{34} \\ g_{41} & ig_{43} & ig_{44} \end{vmatrix},$$

причому усі g_{ij} , $i, j = 1, 3, 4$, є дійсними та визначаються електромеханічними константами п'єзоелектричного композита.

Вводячи нову функцію

$$F_j(z) = t_j(W_1(z) + is_j W_2(z)) + \frac{\sigma_0}{1 + \gamma_j}, \quad j = 1, 2,$$

яка є аналітичною всюди, за винятком ділянки $\mathcal{L} \cup \mathcal{M}$, та комбінуючи співвідношення (13), отримуємо такі вирази для напружень і стрибка переміщень на лінії поділу матеріалів:

$$\begin{aligned} \sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0) - im_j \sigma_{13}^{(1)}(x_1, 0) &= F_j^+(x_1) + \gamma_j F_j^-(x_1), \\ \llbracket u_1'(x_1, 0) \rrbracket + is_j \llbracket u_3'(x_1, 0) \rrbracket &= (F_j^+(x_1) - F_j^-(x_1)) \frac{1}{t_j}, \end{aligned} \quad (14)$$

де

$$\begin{aligned} m_{1,2} &= \pm \sqrt{\frac{g_{33}g_{31}}{g_{11}g_{13}}}, \quad s_j = \frac{g_{33} + m_j g_{13}}{g_{31} - m_j g_{11}}, \quad t_j = g_{31} + m_j g_{11}, \\ \gamma_j &= \frac{-g_{31} + m_j g_{11}}{m_j g_{11} + g_{31}}, \quad \sigma_0 = -\frac{g_{34}}{g_{33}g_{44} - g_{34}g_{43}}(g_{43}\sigma - g_{33}D), \end{aligned}$$

причому

$$F_j(z) \Big|_{z \rightarrow \pm i\infty} = \frac{\sigma - im_j \tau}{1 + \gamma_j}, \quad j = 1, 2. \quad (15)$$

За допомогою співвідношень (14) можна сформулювати широке коло задач електропружності для біматеріальних п'єзоелектричних областей з тріщинами.

Задовольняючи граничні умови (11) і (12) з урахуванням (14), отримуємо наступну крайову задачу:

$$\begin{aligned} F_j^+(x_1) + \gamma F_j^-(x_1) &= 0, & x_1 \in \mathcal{M}, \\ \text{Im } F_j^\pm(x_1) &= 0, & x_1 \in \mathcal{L}. \end{aligned} \quad (16)$$

Для знаходження всіх необхідних електромеханічних характеристик достатньо розглянути задачу (16) лише при $j = 1$. Тому в подальшому індекс j опускаємо, припускаючи, що розв'язок будується для $j = 1$.

Таким чином, задача звелася до визначення тільки однієї функції $F(z)$, аналітичної у всій площині, за винятком відрізків $\mathcal{L} \cup \mathcal{M}$, де повинні виконуватися рівності (16).

Задача (16) є періодичною однорідною комбінованою крайовою задачею Діріхле – Рімана. Згідно з [7] її розв'язок будемо шукати у формі

$$S(z) = Z(z)e^{i\psi(z)} \sin^{-\alpha}(z - a), \quad (17)$$

де $Z(z) = \left(\frac{\sin(z - b)}{\sin(z - c)} \right)^{1/2 - i\varepsilon}$ – відомий канонічний розв'язок періодичної задачі Рімана; α – ціле число; $\varepsilon = \ln \gamma / 2\pi$; $\psi(z)$ – розв'язок періодичної задачі Діріхле

$$\operatorname{Re} \psi^\pm(x) = h^\pm(x), \quad x \in \mathcal{L}, \quad (18)$$

$$h^\pm(x) = \pi n^\pm - \arg Z^\pm(x) + \alpha [\arg \sin(x-a)]^\pm,$$

обмежений у вузлах та на нескінченності, n^\pm – цілі числа.

Згідно з [1] розв'язок (18) можна записати у формі

$$\psi(z) = \frac{Y(z)}{4\pi i} \int_E \frac{h^+(t) + h^-(t)}{Y^+(t) \sin(t-z)} dt + \frac{1}{4\pi i} \int_E (h^+(t) - h^-(t)) \operatorname{ctg}(t-z) dt,$$

де $Y(z) = \sqrt{\sin(z-b)\sin(z-a)}$.

Надаючи n^\pm та α усі можливі значення, отримуємо множину канонічних розв'язків, два з яких

$$S_1(z) = \frac{e^{i\varphi(z)}}{\sqrt{\sin(z-c)\sin(z-b)}}, \quad S_2(z) = \frac{ie^{i\varphi(z)}}{\sqrt{\sin(z-c)\sin(z-a)}} \quad (19)$$

є лінійно незалежними. Тут

$$\varphi(z) = -\frac{\varepsilon Y(z)}{2} \int_M \frac{dt}{Y(t) \sin(t-z)}.$$

Загальний розв'язок крайової задачі (16) можна записати як

$$F(z) = S_1(z)P(e^{iz}) + S_2(z)Q(e^{iz}), \quad (20)$$

де $P(e^{iz})$, $Q(e^{iz})$ – довільні поліноми. Для того щоб задовольнялися умови на нескінченності, вони повинні мати таку форму:

$$P(z) = C_1 \cos(z - a_*) + C_2 \sin(z - a_*), \quad a_* = \frac{c+b}{2},$$

$$Q(z) = D_1 \cos(z - b_*) + D_2 \sin(z - b_*), \quad b_* = \frac{c+a}{2},$$

C_1, C_2, D_1, D_2 – довільні дійсні сталі.

Підставляючи (19) у (20), загальний розв'язок періодичної однорідної комбінованої крайової задачі Діріхле – Рімана (16) запишемо у формі

$$F(z) = \frac{\exp(i\varphi(z))}{\sqrt{\sin(z-c)}} \left(\frac{P(z)}{\sqrt{\sin(z-b)}} + i \frac{Q(z)}{\sqrt{\sin(z-a)}} \right), \quad (21)$$

де $\varphi(z) = 2\varepsilon \ln \left(\frac{\sqrt{\sin(a-b)\sin(z-c)}}{\sqrt{\sin(a-c)\sin(z-b)} + \sqrt{\sin(b-c)\sin(z-a)}} \right)$.

Дійсні сталі C_1, C_2, D_1, D_2 мають бути визначені з поведінки функції на нескінченності (при $z \rightarrow \pm i\infty$), яка приводить до системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$e^{\chi}(\cos \zeta - i \sin \zeta)[C_2 - iC_1 + D_1 + iD_2] = (\sigma - im\tau) \frac{1}{1+\gamma},$$

$$e^{-\chi}(\cos \zeta - i \sin \zeta)[C_2 + iC_1 - D_1 + iD_2] = (\sigma - im\tau) \frac{1}{1+\gamma}.$$

Тут

$$\chi = 2\varepsilon \arctan \frac{\sqrt{\sin(a-c)} \sin \frac{b-c}{2} + \sqrt{\sin(b-c)} \sin \frac{a-c}{2}}{\sqrt{\sin(a-c)} \cos \frac{b-c}{2} + \sqrt{\sin(b-c)} \cos \frac{a-c}{2}},$$

$$\zeta = \varepsilon \ln \frac{\sin \frac{a+b-2c}{2} + \sqrt{\sin(a-c)\sin(b-c)}}{\sin \frac{a-b}{2}}. \quad (22)$$

Розв'язками отриманої системи лінійних алгебраїчних рівнянь є

$$\begin{aligned} C_1 &= \sinh \chi (-m\tau \cos \zeta + \sigma \sin \zeta) \frac{1}{1 + \gamma}, \\ C_2 &= \cosh \chi (\sigma \cos \zeta + m\tau \sin \zeta) \frac{1}{1 + \gamma}, \\ D_1 &= -\sinh \chi (\sigma \cos \zeta + m\tau \sin \zeta) \frac{1}{1 + \gamma}, \\ D_2 &= \cosh \chi (-m\tau \cos \zeta + \sigma \sin \zeta) \frac{1}{1 + \gamma}. \end{aligned} \quad (23)$$

Знайдений у рамках «контактної» моделі розв'язок можна звести аналітично до осциляційного у припущенні, що зона контакту прямує до нуля:

$$\begin{aligned} F(z) \Big|_{b \rightarrow a} &= \\ = e^{i2\varepsilon \ln \frac{\sqrt{\sin(a-b)\sin(z-c)}}{2\sqrt{\sin(a-c)\sin(z-a)}}} &\frac{[C_1 + iD_1] \cos\left(z - \frac{c+a}{2}\right) + [C_2 + iD_2] \sin\left(z - \frac{c+a}{2}\right)}{\sqrt{\sin(z-c)\sin(z-a)}} \Big|_{b \rightarrow a}. \end{aligned}$$

Використовуючи формули (23), отримуємо

$$\begin{aligned} F(z) \Big|_{b \rightarrow a} &= e^{i\varepsilon \ln \frac{\sin(a-b)\sin(z-c)}{4\sin(a-c)\sin(z-a)}} \times \\ &\times \frac{[-i \cos \zeta + \sin \zeta] \sinh \chi \cos\left(z - \frac{c+a}{2}\right) + [\cos \zeta + i \sin \zeta] \cosh \chi \sin\left(z - \frac{c+a}{2}\right)}{\sqrt{\sin(z-c)\sin(z-a)}} \frac{\sigma - im\tau}{1 + \gamma} \Big|_{b \rightarrow a}. \end{aligned}$$

Після елементарних перетворень маємо

$$\begin{aligned} F(z) \Big|_{b \rightarrow a} &= e^{i\varepsilon \ln \frac{\sin(a-b)\sin(z-c)}{4\sin(a-c)\sin(z-a)}} e^{i\zeta} \times \\ &\times \frac{-i \sinh \chi \cos\left(z - \frac{c+a}{2}\right) + \cosh \chi \sin\left(z - \frac{c+a}{2}\right)}{\sqrt{\sin(z-c)\sin(z-a)}} \frac{\sigma - im\tau}{1 + \gamma} \Big|_{b \rightarrow a}. \end{aligned}$$

Далі, застосовуючи формули (22) і враховуючи поведінку функцій ζ та χ при $b \rightarrow a$, приходимо до формули

$$\begin{aligned} F(z) \Big|_{b \rightarrow a} &= \left[\frac{\sin(z-c)}{\sin(z-a)} \right]^{i\varepsilon} \times \\ &\times \frac{-\sin[i\varepsilon(a-c)] \cos\left(z - \frac{c+a}{2}\right) + \cos[i\varepsilon(a-c)] \sin\left(z - \frac{c+a}{2}\right)}{\sqrt{\sin(z-c)\sin(z-a)}} \frac{\sigma - im\tau}{1 + \gamma}, \end{aligned}$$

і, остаточно,

$$F(z) \Big|_{b \rightarrow a} = \frac{\sin\left(z - \frac{c+a}{2} - i\varepsilon(a-c)\right)}{\sqrt{\sin(z-c)\sin(z-a)}} \left[\frac{\sin(z-c)}{\sin(z-a)} \right]^{i\varepsilon} \frac{\sigma - im\tau}{1 + \gamma}.$$

Одержаний вираз для функції $F(z)$ співпадає з відповідним виразом для класичної моделі, який отриманий на основі розв'язку [4].

Визначення зон контакту та КІН. Використовуючи подання (14) і розв'язок (21), приходимо до наступних виразів для напружень та похідної від стрибка переміщень на межі поділу матеріалів:

$$\sigma_{33}^{(1)}(x_1) = \frac{2g \exp(\pi\varepsilon)}{\sqrt{\sin(x_1 - c)}} \left(\frac{P(x_1)}{\sqrt{\sin(x_1 - b)}} \operatorname{ch}(\tilde{\varphi}(x_1) - \pi\varepsilon) + \frac{Q(x_1)}{\sqrt{\sin(a - x_1)}} \operatorname{sh}(\tilde{\varphi}(x_1) - \pi\varepsilon) \right), \quad x_1 \in \mathcal{L}, \quad (24)$$

$$\sigma_{33}^{(1)}(x_1) - im\sigma_{13}^{(1)}(x_1) = \frac{g(1 + \gamma) \exp(i\varphi(x_1))}{\sqrt{\sin(x_1 - c)}} \left(\frac{P(x_1)}{\sqrt{\sin(x_1 - b)}} + i \frac{Q(x_1)}{\sqrt{\sin(x_1 - a)}} \right), \quad x_1 \in \mathcal{U}, \quad (25)$$

$$\llbracket u_3'(x_1) \rrbracket = \frac{2 \operatorname{ch}(\pi\varepsilon)}{s_1 t_1 \sqrt{\sin(x_1 - c)}} \left(\frac{P(x_1)}{\sqrt{\sin(b - x_1)}} \cos \varphi^*(x_1) - \frac{Q(x_1)}{\sqrt{\sin(a - x_1)}} \sin \varphi^*(x_1) \right), \quad x_1 \in \mathcal{M}, \quad (26)$$

де

$$\tilde{\varphi}(x_1) = 2\varepsilon \operatorname{arctan} \sqrt{\frac{\sin(b - c) \sin(a - x_1)}{\sin(a - c) \sin(x_1 - b)}}, \quad x_1 \in \mathcal{L},$$

$$\varphi^*(x_1) = 2\varepsilon \ln \frac{\sqrt{\sin(a - b) \sin(x_1 - c)}}{\sqrt{\sin(a - c) \sin(b - x_1)} + \sqrt{\sin(b - c) \sin(a - x_1)}}, \quad x_1 \in \mathcal{M}.$$

Розв'язок (21)–(23) може бути використаний для будь-якого положення точки b , але він буде фізично обґрунтованим за умови, що в зоні контакту діють напруження стиску, а береги тріщин є взаємонепроникними і плавно змикаються у точці b . Математично ці умови можна записати таким чином:

$$\begin{aligned} \llbracket u_3'(b) \rrbracket &= 0, & \sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0) &\leq 0, & x_1 &\in \mathcal{L}, \\ \llbracket u_3(x_1) \rrbracket &\geq 0, & x_1 &\in \mathcal{M}. \end{aligned} \quad (27)$$

Використовуючи умову (27₁) та розкладаючи рівняння (26) в ряд Тейлора в околі b , отримуємо трансцендентне рівняння для визначення довжини зони контакту:

$$P(b) = 0. \quad (28)$$

Правильний вибір кореня забезпечується виконанням умов (27₂) та (27₃). Рівняння (28) можна записати так:

$$\tan \frac{b - c}{2} = - \frac{-m\tau \cos \zeta + \sigma \sin \zeta}{\sigma \cos \zeta + m\tau \sin \zeta} \tanh \chi. \quad (29)$$

КІН у вершині тріщини a вводимо за формулою

$$K_1 - iK_2 = \lim_{x_1 \rightarrow a} (\sigma_{33}(x_1, 0) - i\sigma_{13}(x_1, 0)) \sqrt{\sin(x_1 - a)}.$$

Використовуючи рівняння (25), отримуємо

$$K_1 = 0,$$

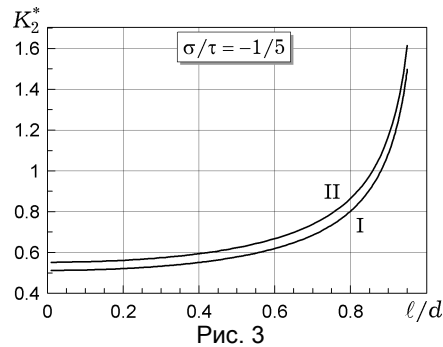
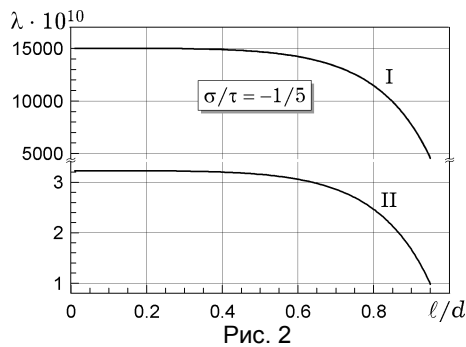
$$K_2 = - \frac{1 + \gamma}{m\sqrt{\sin(a - c)}} \left(D_1 \cos \frac{a - c}{2} + D_2 \sin \frac{a - c}{2} \right) =$$

$$= - \frac{-(\sigma \cos \zeta + \tau \sin \zeta) \sinh \chi \cos \frac{a - c}{2} + (-\tau \cos \zeta + \sigma \sin \zeta) \cosh \chi \sin \frac{a - c}{2}}{m\sqrt{\sin(a - c)}}. \quad (30)$$

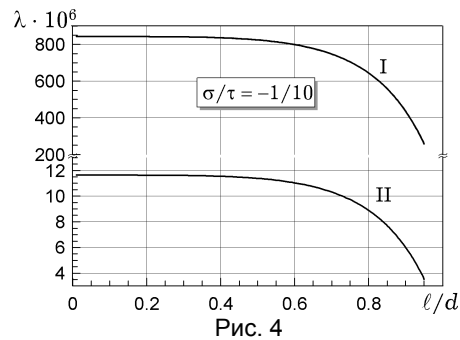
Аналіз результатів. Для дослідження періодичної системи міжфазних тріщин встановимо залежність відносної довжини зони контакту $\lambda = (a - b)/\ell$ та КІН у вершині a тріщини від довжини ℓ тріщини та кута β нахилу вектора результуючого навантаження $p = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}$ до осі Oy ($\tan\beta = \tau/\sigma$). Параметр β змінюється у межах $-\pi/2 \leq \beta \leq \pi/2$. Додатні (від'ємні) значення ε ($\varepsilon = \ln \gamma/2\pi$) вказують на те, що «нижній» («верхній») матеріал більш жорсткий.

Для чисельного аналізу розглянемо біматеріали, складені з п'єзоелектриків класу 6mm, які поляризовані за напрямком x_3 . Відповідні графіки для композита, що складається з сульфїду кадмію («верхній» матеріал) та ніобату барію-натрію («нижній») ($m = 0.976$, $\varepsilon = 0.0158$) мають позначку I, PZT-5 та PZT-4 ($m = 0.905$, $\varepsilon = 0.0102$) – II.

На рис. 2 показано залежність відносної довжини зони контакту λ від відстані між тріщинами при віддаленому комбінованому ($\sigma = 1$ МПа, $\tau = -5$ МПа) навантаженні. Відповідні результати залежності безрозмірного КІН $K_2^* = mK_2/(p\sqrt{\ell})$ від відносної відстані між тріщинами при такому ж навантаженні наведено на рис. 3. Як і було очікувано, зменшення відстані між тріщинами суттєво впливає на довжину зони контакту тільки для ℓ/d , близьких до 1, і призводить до суттєвого росту КІН.



На рис. 4 наведено результати для відносної довжини зони контакту при більшому, ніж для рис. 2, зсувному навантаженні ($\sigma = 1$ МПа, $\tau = -10$ МПа). Порівнюючи з рис. 2, бачимо, що збільшення величини зсувного навантаження приводить до зростання зони контакту. Це пояснюється тим, що верхній матеріал менш жорсткий, ніж нижній. Слід також відмітити, що при такому напрямку прикладання зсувного навантаження в околі досліджуваної вершини тріщини формується більша зона контакту, ніж біля лівої вершини.



На рис. 5 наведено порівняння полів нормальних напружень на продовженні тріщини по лінії поділу матеріалів, отриманих в рамках осциляційної та контактної моделей для комбінованого навантаження. Композит складається з сульфїду кадмію (верхній матеріал) і ніобату барію-натрію (нижній), відношення зсувного навантаження до розтягуючого дорівнює -10 , довжина тріщини становить половину періоду, відносна довжина зони контакту дорівнює $0.827962 \cdot 10^{-3}$, $x'_1 = (x_1 - a)/\ell$. З результатів видно, що,

починаючи з відстані, що дорівнює 5 довжинам зон контакту, напруження практично співпадають.

На рис. 6 наведено порівняння стрибка нормальних переміщень в рамках осциляційної та контактної моделей при наближенні до правої вершини тріщини. Тут показаний лише малий окіл вершини тріщини, де поведінка переміщень відрізняється, але вже на малій відстані від вершини поля переміщень для обох моделей починають співпадати.

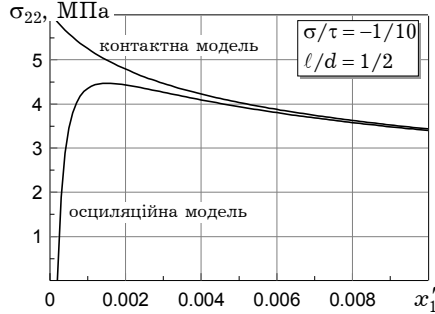


Рис. 5

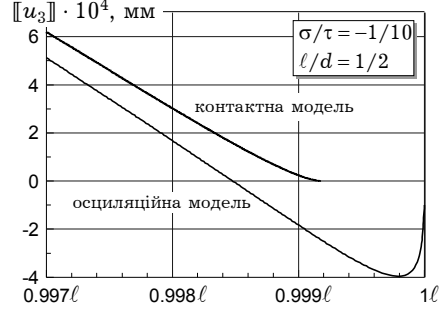


Рис. 6

На рис. 7, 8 для цих моделей наведено порівняння полів відповідно нормальних і дотичних напружень для композита, що складається з п'єзоелектрика (PZT-РІС 151) та діелектрика (карбіду кремнію). При такій комбінації матеріалів відносна довжина зони контакту значно більша, ніж у випадку з'єднання двох п'єзоелектриків.

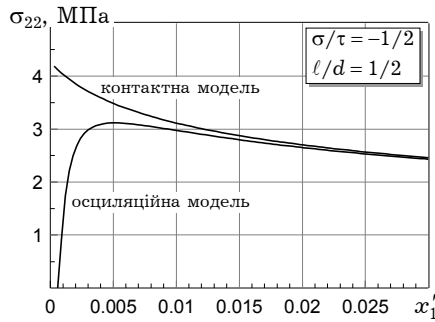


Рис. 7

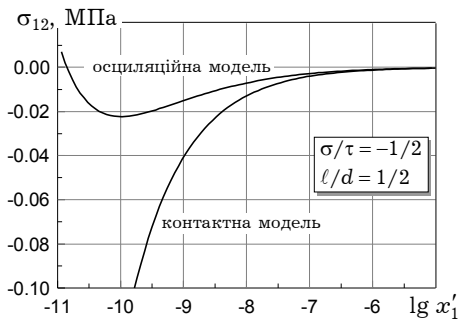


Рис. 8

Розглянемо тепер поведінку відносної довжини зони контакту для малого відношення ℓ/d і порівняємо її з результатами для однієї тріщини. У роботі [14] виведено таке трансцендентне рівняння для визначення λ у випадку однієї тріщини:

$$\arctan\left(\frac{\sqrt{1-\lambda}\sigma + 2\epsilon m\tau}{2\epsilon\sigma - \sqrt{1-\lambda}m\tau}\right) = \epsilon \log\left(\frac{1-\sqrt{1-\lambda}}{1+\sqrt{1-\lambda}}\right). \quad (31)$$

У табл. 1 наведено порівняння з результатами для однієї тріщини обчислених відносних довжин зони контакту для композита з PZT-5 («верхній» матеріал) і PZT-4 («нижній») при певних кутах нахилу зовнішнього навантаження та для деяких відношень довжини тріщини до періоду.

Таблиця 1

σ/τ	[14]	$\ell/d = 1/20$	$\ell/d = 1/5$	$\ell/d = 1/2$	$\ell/d = 3/4$
-1	$2.024382 \cdot 10^{-36}$	$2.024378 \cdot 10^{-36}$	$2.023468 \cdot 10^{-36}$	$1.979564 \cdot 10^{-36}$	$1.691503 \cdot 10^{-36}$
-1/2	$2.114394 \cdot 10^{-22}$	$2.114390 \cdot 10^{-22}$	$2.113439 \cdot 10^{-22}$	$2.067583 \cdot 10^{-22}$	$1.766714 \cdot 10^{-22}$
-1/5	$3.227956 \cdot 10^{-10}$	$3.227950 \cdot 10^{-10}$	$3.226499 \cdot 10^{-10}$	$3.156492 \cdot 10^{-10}$	$2.697168 \cdot 10^{-10}$
-1/10	$1.164344 \cdot 10^{-5}$	$1.164396 \cdot 10^{-5}$	$1.163818 \cdot 10^{-5}$	$1.138564 \cdot 10^{-5}$	$0.972887 \cdot 10^{-5}$

Бачимо, що при малих значеннях ℓ/d значення відносної довжини зони контакту співпадають з результатами для однієї тріщини. Так, для відношення $\ell/d \leq 1/5$ різниця між довжинами зон контакту значно менша 1%, для $\ell/d = 1/2$ вона становить 2.2%, а для $\ell/d = 3/4$ – 16.4% (див. рис. 2, рис. 4 і табл. 1).

Висновки. Одержано замкнутий аналітичний розв'язок пружної плоскої задачі для періодичної системи тріщин, що знаходяться на лінії поділу двох п'єзоелектричних матеріалів, з зонами гладкого контакту їх берегів. У результаті чисельного аналізу цього розв'язку проілюстровано зміну зон контакту і коефіцієнтів інтенсивності напружень в залежності від відстані між тріщинами та кута нахилу зовнішнього навантаження. На основі одержаних результатів можна зробити висновок про ступінь зменшення тріщиностійкості біматеріалу при зближенні тріщин. Для випадку тріщини малої (відносно періоду) довжини результати близькі до результатів для однієї тріщини. Також як частковий випадок одержаного розв'язку досліджено періодичну систему електропроникних тріщин в рамках «осциляційної» моделі. Проведено порівняння полів нормальних і дотичних напружень на продовженні тріщини, що були отримані в рамках класичної та контактної моделей.

1. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. – Москва: Наука, 1977. – 640 с.
2. Каминский А. А., Кипнис Л. А., Колмакова В. А. О модели Дагдейла для трещины на границе раздела различных сред // Прикл. механика. – 1999. – 35, № 1. – С. 63–68.
3. Козінов С. В., Лобода В. В., Харун І. В. Періодична система міжфазних тріщин із зонами контакту в ізотропному біматеріалі у полі розтягу та зсуву // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2006. – 42, № 4. – С. 101–107.
4. Кудрявцев Б. А., Партон В. З., Ракитин В. И. Механика разрушения пьезоэлектрических материалов. Прямолинейная тоннельная трещина на межфазной границе с проводником // Прикл. математика и механика. – 1975. – 39. – С. 149 – 159.
5. Кудрявцев Б. А., Ракитин В. И. Периодическая система трещин на границе пьезоэлектрика и твердого проводника // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1976. – 2. – С. 121–129.
6. Лобода В. В., Шевелева А. Е. Определение зон предразрушения у края трещины между двумя упругими ортотропными телами // Прикл. механика. – 2003. – 39, № 5. – С. 76–82.
7. Нахмейн Е. Л., Нуллер Б. М. Периодические комбинированные краевые задачи и их приложения в теории упругости // Прикл. математика и механика. – 1992. – 56, № 1. – С. 95–104.
8. Партон В. З., Кудрявцев Б. А. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. – Москва: Наука, 1988. – 470 с.
9. Симонов И. В. Трещина на границе раздела в однородном поле напряжений // Механика композитных материалов. – 1985. – 6. – С. 969–976.
10. Улітко А. Ф., Острик В. І. Міжфазна тріщина за умови фрикційного контакту берегів // Вісн. Київ. ун-ту. Сер. Фіз.-мат. науки. – 2002. – Вип. 2. – С. 133–141.
11. Comninou M. The interface crack // J. Appl. Mech. – 1977. – 44. – P. 631–636.
12. Gao C.-F., Housler C., Balke H. Periodic permeable interface cracks in piezoelectric materials // Int. J. Solids Struct. – 2004. – 41(2). – P. 323–335.
13. Gao C.-F., Wang M.-Z. Collinear permeable cracks between dissimilar piezoelectric materials // Int. J. Solids Struct. – 2000. – 37. – P. 4969–4986.
14. Herrmann K. P., Loboda V. V. Fracture-mechanical assessment of electrically permeable interface cracks in piezoelectric bimetals by consideration of various contact zone models // Archive of Appl. Mech. – 2000. – 70. – P. 127–143.
15. Kozinov S. V., Loboda V. V., Kharun I. V. Periodic set of the interface cracks with contact zones in an anisotropic bimaterial subjected to a uniform tension-shear loading // Int. J. Solids Struct. – 2007. – 44(14–15). – P. 4646–4655.
16. Schmuesser D., Comninou M. The periodic array of interface cracks and their interaction // Int. J. Solids Structures. – 1979. – 15. – P. 927–934.
17. Suo Z., Kuo C. M., Barnett D. M., Willis J. R. Fracture mechanics for piezoelectric ceramics // J. Mech. Phys. Solids. – 1992. – 40, No. 4. – P. 739–765.

ПЕРИОДИЧЕСКАЯ СИСТЕМА ЭЛЕКТРОПРОНИЦАЕМЫХ МЕЖФАЗНЫХ ТРЕЩИН НА ГРАНИЦЕ ДВУХ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ

Построено замкнутое решение для биматериальной плоскости, которая состоит из двух различных пьезоэлектрических полуплоскостей, с периодической системой электропроницаемых трещин на линии раздела материалов (интерфейсе). Принимается во внимание наличие зон гладкого контакта берегов вблизи вершин трещин. Путем представления электромеханических характеристик через кусочно-аналитические функции задача сведена к периодической задаче Дирихле – Римана, которая решена точно. В результате численного анализа полученного решения для разных комбинаций пьезоэлектриков исследовано поведение относительной длины зон контакта и коэффициентов интенсивности напряжений в зависимости от отношения длины трещины к величине периода.

PERIODIC SET OF ELECTRICALLY PERMEABLE INTERFACE CRACKS BETWEEN TWO PIEZOELECTRIC MATERIALS

A closed form solution for a bimaterial plane which consists of two different piezoelectric half-plane with a periodic set of electrically permeable interface cracks was obtained. The presence of the zones of smooth contact of edges near the crack tips was taken into account. By means of the electromechanical factors presentation via the piecewise analytic functions the problem was reduced to the periodic Dirichlet – Riemann problem which was solved exactly. As a result of numerical analysis of the derived solution the behavior of the relative contact zone length and the stress intensity factors vs. the ratio of the length of the cracks and the period magnitude was investigated for different piezoelectric material combinations.

Дніпропетр. нац. ун-т, Дніпропетровськ

Одержано
31.12.08