УДК 539.3

В. І. Острик[1], А. Ф. Улітко[2]

ПРО ОДНУ ВЛАСТИВІСТЬ РОЗВ'ЯЗКІВ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ ДВОХ ПІВПЛОЩИН АБО ПІВПРОСТОРІВ

Показано, що розв'язок будь-якої крайової задачі для двох спряжених півплощин з різними пружними сталими у випадку, коли напруження неперервно продовжувані через межу півплощин, виражається через одну сукупну пружну сталу, якщо напруження, а також зовнішні силові фактори віднести до зведеного модуля пружності. Завдяки цьому розв'язок задачі для двох спряжених півплощин можна отримати безпосередньо із розв'язку відповідної задачі для однієї пружної півплощини. Вказана властивість справедлива також і для осесиметричних задач, які формулюються для двох спряжених півпросторів.

Існує широкий клас крайових задач лінійної теорії пружності, які формулюються для двох різнорідних півплощин або півпросторів, причому при переході через межу поділу матеріалів напруження змінюються неперервним чином. До цього класу слід віднести задачі контактної взаємодії пружних тіл за різних умов контакту (гладкий контакт, ковзний контакт, контакт із повним зчепленням, контакт зі зчепленням і проковзуванням), а також задачі про міжфазні тріщини на межі поділу матеріалів. Для формулювання останньої групи задач використовуються різні моделі: модель відкритої тріщини з притаманними їй осциляціями напружень і переміщень в околах вершин міжфазної тріщини; модель Комніноу за наявності контакту берегів тріщини поблизу її вершин як без урахування, так і з урахуванням тертя.

Усі ці задачі є змішаними задачами для двох пружних півплощин або півпросторів, взагалі кажучи, з ділянками трьох типів крайових умов на межі поділу різнорідних матеріалів. Так, у зонах зчеплення (ділянки першого типу) задаються різниці нормальних і тангенціальних переміщень, на ділянках другого типу – нормальні та дотичні напруження, у зонах проковзування (ділянки третього типу) – різниця нормальних переміщень і лінійна комбінація нормальних і дотичних напружень (або відсутність дотичних напружень у випадку гладкого контакту). У певних випадках при формулюванні крайових умов виникають ділянки тільки двох типів: другого і третього – в задачах гладкого контакту пружних тіл; першого і другого – в задачах контакту з повним зчепленням і в задачах для відкритих міжфазних тріщин.

На межі $y = 0$ пружної півплощини $-\infty < x < \infty$, $0 \le y < \infty$ з модулем зсуву G і коефіцієнтом Пуассона ν похідні уздовж межі від переміщень виражаються через напруження за допомогою сингулярних інтегральних співвідношень [2]

$$\left.\frac{\partial u_x}{\partial x}\right|_{y=0} = \frac{1-2\nu}{2G}\sigma(x) - \frac{1-\nu}{\pi G}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\tau(s)}{s-x}\,ds\,,$$

$$\left.\frac{\partial u_y}{\partial x}\right|_{y=0} = -\frac{1-\nu}{\pi G}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sigma(s)}{s-x}\,ds - \frac{1-2\nu}{2G}\tau(x)\,,$$

$$\sigma(x) = \left.\sigma_y\right|_{y=0}, \qquad \tau(x) = \left.\tau_{xy}\right|_{y=0}, \qquad -\infty < x < \infty\,, \tag{1}$$

або у комплексному вигляді

$$\left.\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + i\frac{\partial u_y}{\partial x}\right)\right|_{y=0} = \frac{1-2\nu}{2G}[\sigma(x) - i\tau(x)] + \frac{1-\nu}{G}\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sigma(s)-i\tau(s)}{s-x}\,ds\,. \tag{2}$$

Співвідношення (1), (2) випливають із розв'язку задачі Фламана про дію нормальної зосередженої сили на межі пружної півплощини та розв'язку аналогічної задачі для дотичної зосередженої сили [16].

Розглянемо дві спряжені пружні півплощини $y \ge 0$ і $y \le 0$ з модулями зсуву G_1 і G_2 та коефіцієнтами Пуассона ν_1 і ν_2 відповідно, для яких граничні значення напружень співпадають:

$$\sigma_y^{(1)}\Big|_{y=0} = \sigma_y^{(2)}\Big|_{y=0} = \sigma(x), \qquad \tau_y^{(1)}\Big|_{y=0} = \tau_y^{(2)}\Big|_{y=0} = \tau(x). \tag{3}$$

Записавши співвідношення (2) для кожної з півплощин, $j = 1, 2$,

$$\left(\frac{\partial u_x^{(j)}}{\partial x} + i\frac{\partial u_y^{(j)}}{\partial x}\right)\Bigg|_{y=0} = \frac{1-2\nu_j}{2G_j}[\sigma(x) - i\tau(x)] + $$

$$+ \frac{1-\nu_j}{G_j}\frac{(-1)^{j+1}}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sigma(s) - i\tau(s)}{s-x}ds, \tag{4}$$

отримуємо похідні від різниці переміщень

$$\Delta u_x = u_x^{(1)}\Big|_{y=0} - u_x^{(2)}\Big|_{y=0}, \qquad \Delta u_y = u_y^{(1)}\Big|_{y=0} - u_y^{(2)}\Big|_{y=0} \tag{5}$$

на межі поділу півплощин у комплексному вигляді:

$$\frac{\partial \Delta u_x}{\partial x} + i\frac{\partial \Delta u_y}{\partial x} = \frac{2}{E^*}\operatorname{th}\pi\theta\cdot[\sigma(x) - i\tau(x)] + \frac{2}{E^*}\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sigma(s) - i\tau(s)}{s-x}ds, \tag{6}$$

де E^* – зведений модуль пружності, θ – сукупна пружна стала, які визначаються співвідношеннями

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1-\nu_1}{2G_1} + \frac{1-\nu_2}{2G_2} = \frac{G_1(æ_2+1) + G_2(æ_1+1)}{8G_1G_2},$$

$$\theta = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{G_1 + G_2æ_1}{G_1æ_2 + G_2},$$

$$\operatorname{ch}\pi\theta = \frac{1}{2}\frac{G_1(æ_2+1) + G_2(æ_1+1)}{\sqrt{(G_1 + G_2æ_1)(G_1æ_2 + G_2)}},$$

$$\operatorname{sh}\pi\theta = \frac{1}{2}\frac{G_2(æ_1-1) - G_1(æ_2-1)}{\sqrt{(G_1 + G_2æ_1)(G_1æ_2 + G_2)}}, \quad æ_1 = 3-4\nu_1, \quad æ_2 = 3-4\nu_2. \tag{7}$$

У граничному випадку абсолютно жорсткої півплощини $y \le 0$ співвідношення (6) переходить у рівність (2), в якій

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1-\nu}{2G}, \quad \theta = \frac{1}{2\pi}\ln(3-4\nu), \quad \operatorname{ch}\pi\theta = \frac{2(1-\nu)}{\sqrt{3-4\nu}}, \quad \operatorname{sh}\pi\theta = \frac{1-2\nu}{\sqrt{3-4\nu}},$$

$$G_1 = G, \qquad \nu_1 = \nu, \qquad G_2 = \infty. \tag{8}$$

З огляду на те, що при формулюванні крайових задач для двох спряжених півплощин переміщення входять до крайових умов у вигляді різниць (5), розв'язки таких задач за умови (3) неперервності напружень мають наступну

Властивість. *Якщо напруження віднести до зведеного модуля пружності* E^*, *то розв'язок задачі для двох різнорідних півплощин виражається через одну сукупну пружну сталу* θ *і відтворюється через розв'язок відповідної задачі для однієї пружної півплощини* ($G_2 = \infty$) *за допомогою переходу від пружних сталих* G, ν *до пружних сталих* G_1, ν_1, G_2, ν_2 *відповідно з формулами* (7), (8).

Ця властивість дозволяє спростити розв'язання змішаних задач для кусково-однорідної площини з прямолінійною межею і обмежитись розглядом однієї пружної півплощини, вважаючи іншу абсолютно жорсткою.

У задачах гладкого контакту пружних тіл, до яких відноситься задача Герца [2, 31] та її узагальнення на випадок дотику вищого порядку [22], напружений стан півплощин залежить тільки від зведеного модуля пружності E^* і не залежить від сталої θ. Якщо ж усі силові фактори, тобто напруження і зовнішні стискувальні сили, віднести до E^*, то розв'язок (визначені розміри області контакту, розподіл контактних напружень, напруження всередині пружних тіл) стає незалежним від пружних сталих матеріалів контактуючих тіл. До речі, поняття зведеного модуля пружності E^* вперше введено у теорії Герца контактної взаємодії пружних тіл [31].

У літературі зустрічається використання обговорюваної тут *властивості*. Нам відомий тільки один подібний приклад. Так, наближене визначення Д. А. Спенсом [34] відносного розміру зони зчеплення у задачі про контакт зі зчепленням і проковзуванням штампу з пружною півплощиною переноситься К. Джонсоном [2] на аналогічну задачу фрикційного контакту двох різнорідних пружних тіл. Пізніше в [4] для параболічного штампу і в [18] для двох пружних тіл знайдено точні розв'язки цих задач, для яких виконується дана властивість. Так само ця властивість має місце і в задачі про фрикційний контакт зі зчепленням і проковзуванням двох різнорідних дисків, що обертаються [11], і фактично зводить її до задачі про невільне обертання жорсткого і пружного дисків [10, 35]. Нарешті, аналіз розв'язків задач про міжфазні тріщини [1, 3, 6, 12–15, 17, 18, 20, 21, 23–30, 32, 33, 36] також приводить до даної властивості. Однак у перелічених роботах при розв'язанні відповідних задач ця властивість не використовується, а про те, що вона має місце, вказано лише у [18].

Далі відслідкуємо виявлену *властивість* на розв'язках змішаних задач для двох різнорідних пружних півплощин.

Основна змішана задача. Позначимо через $L' = \bigcup_{k=1}^{n} L'_k$ сукупність скінченного числа відрізків $[a_k, b_k]$, $k = 1,2,\ldots,n$, числової осі Ox $(-\infty < a_1 < b_1 < a_2 < \ldots < b_n < \infty)$. Будемо вважати, що на частині L' межі $y = 0$ пружної півплощини $y \geq 0$ задано переміщення, а на іншій її частині $L'' = \bigcup_{k=1}^{n+1} L''_k = L \backslash L'$ (L'' – сукупність проміжків $(-\infty, a_1)$, (b_k, a_{k+1}), $k = 1,2,\ldots,n-1$, (b_n, ∞), L – числова вісь Ox, рис. 1*а*) – напруження:

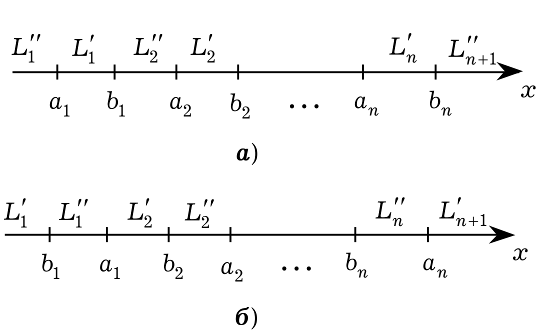

Рис. 1

$$u_x\big|_{L'} = g_1(x), \qquad u_y\big|_{L'} = g_2(x),$$

$$\sigma_y\big|_{L''} = g_3(x), \qquad \tau_{xy}\big|_{L''} = g_4(x). \tag{9}$$

Розв'язок основної змішаної задачі (9) для півплощини за допомогою функції

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2G}{3-4\nu}[g'_1(x) + ig'_2(x)], & x \in L', \\ g_3(x) - ig_4(x), & x \in L'', \end{cases} \tag{10}$$

на межі півплощини записується у вигляді [7]

$$(\sigma_y - i\tau_{xy})\big|_{L'} = -2G\frac{1-2\nu}{3-4\nu}[g_1'(x) + ig_2'(x)] +$$

$$+ 2(1-\nu)\frac{X(x)}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(s)}{X(s)(s-x)}ds + P_{n-1}(x)X(x),$$

$$2G\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + i\frac{\partial u_y}{\partial x}\right)\bigg|_{L''} = (1-2\nu)[g_3(x) - ig_4(x)] +$$

$$+ 2(1-\nu)\frac{X(x)}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(s)}{X(s)(s-x)}ds + P_{n-1}(x)X(x),$$

$$X(z) = \prod_{k=1}^{n}(z-a_k)^{-1/2-i\theta}(z-b_k)^{-1/2+i\theta}, \qquad \theta = \frac{1}{2\pi}\ln(3-4\nu),$$

$$X(x) = \begin{cases} X^+(x) = -\dfrac{1}{3-4\nu}X^-(x), & x \in L', \\ X^\pm(x), & x \in L'', \end{cases} \tag{11}$$

де $P_{n-1}(x)$ – довільний поліном степеня $n-1$ з комплексними коефіцієнтами, які визначаються з умов рівноваги і заданими значеннями переміщень у точках a_k, b_k, $k = 1,2,\ldots,n$, межі півплощини.

У розв'язку (11) від функції $X(x)$ перейдемо до функції

$$X_1(x) = (-1)^{n-m}\prod_{k=1}^{n}|x-a_k|^{-1/2-i\theta}|x-b_k|^{-1/2+i\theta}, \qquad x \in L_m' \cup L_{m+1}'',$$

$$X_1(x) = \begin{cases} i\sqrt{3-4\nu}\,X(x), & x \in L', \\ X(x), & x \in L''. \end{cases} \tag{12}$$

Тоді будемо мати

$$(\sigma_y - i\tau_{xy})\big|_{L'} = -2G\frac{1-2\nu}{3-4\nu}[g_1'(x) + ig_2'(x)] +$$

$$+ \frac{4(1-\nu)G}{3-4\nu}\frac{X_1(x)}{\pi i}\int_{L'}\frac{g_1'(s) + ig_2'(s)}{X_1(s)(s-x)}ds -$$

$$- \frac{2(1-\nu)}{\sqrt{3-4\nu}}\frac{X_1(x)}{\pi}\int_{L''}\frac{g_3(s) - ig_4(s)}{X_1(s)(s-x)}ds - \frac{i}{\sqrt{3-4\nu}}P_{n-1}(x)X_1(x),$$

$$\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + i\frac{\partial u_y}{\partial x}\right)\bigg|_{L''} = \frac{1-2\nu}{2G}[g_3(x) - ig_4(x)] +$$

$$+ \frac{2(1-\nu)}{\sqrt{3-4\nu}}\frac{X_1(x)}{\pi}\int_{L'}\frac{g_1'(s) + ig_2'(s)}{X_1(s)(s-x)}ds +$$

$$+ \frac{1-\nu}{G}\frac{X_1(x)}{\pi i}\int_{L''}\frac{g_3(s) - ig_4(s)}{X_1(s)(s-x)}ds + \frac{1}{2G}P_{n-1}(x)X_1(x). \tag{13}$$

Для побудови розв'язку задачі (9) в іншому випадку, відсутньому в [7], коли множина L' з заданими на ній переміщеннями включає напівнескінченні проміжки, а множина L'' з заданими напруженнями складається із скінченних проміжків, повторимо розв'язання задачі за методикою [7] так, щоб у задачі спряження шукана функція була неперервно продовжувана через L'. В результаті отримаємо розв'язок у формі (11), в якому у виразі для функції $X(z)$ значення a_k і b_k поміняються місцями. Тому, щоб залишити і в цьому випадку розв'язок у формі (11) і не змінювати вираз для функції $X(z)$, необхідно вважати, що $-\infty < b_1 < a_1 < b_2 < \ldots < a_n < \infty$ і $L'_1 = (-\infty, b_1]$, $L'_{k+1} = [a_k, b_{k+1}]$, $k = 1,2,\ldots,n-1$, $L'_{n+1} = [a_n, \infty)$, $L''_k = (b_k, a_k)$, $k = 1,2,\ldots,n$ (рис. 1*б*). Тобто, як і раніше, точки a_k є точками переходу (зліва направо) від проміжків множини L'' до проміжків множини L', а точки b_k – від L' до L'', $k = 1,2,\ldots,n$. Тоді розв'язок також можна подати у формі (13) з тією відмінністю, що у визначенні функції $X_1(x)$ із (12) значенню m відповідає $x \in L'_m \cup L''_m$.

В основній змішаній задачі для двох спряжених півплощин напруження при переході через межу $y = 0$ неперервні, на частині межі L' задано різниці переміщень, а на іншій частині L'' – напруження (рис. 1), тобто:

$$\sigma_y^{(1)}\Big|_L = \sigma_y^{(2)}\Big|_L, \qquad \tau_{xy}^{(1)}\Big|_L = \tau_{xy}^{(2)}\Big|_L,$$

$$\left(u_x^{(1)} - u_x^{(2)}\right)\Big|_{L'} = g_1(x), \qquad \left(u_y^{(1)} - u_y^{(2)}\right)\Big|_{L'} = g_2(x),$$

$$\sigma_y^{(1)}\Big|_{L''} = g_3(x), \qquad \tau_{xy}^{(1)}\Big|_{L''} = g_4(x). \tag{14}$$

Розв'язок задачі (14) у випадку одного відрізка множини L' і двох напівнескінченних інтервалів множини L'' ($n = 1$, рис. 1*а*), а також у випадку $n = 1$ із рис. 1*б*, $g_1(x) \equiv 0$, $g_2(x) \equiv 0$, побудовано у біполярних координатах з використанням інтегрального перетворення Фур'є в роботах [18] і [9] відповідно, а для будь-якого n для випадку, зображеного на рис. 1*б* ($g_1(x) \equiv 0$, $g_2(x) \equiv 0$) – у роботі [21] методом Мусхелішвілі.

Застосувавши підхід, розвинутий у [21], отримаємо розв'язок задачі (14). Зокрема, на загальній межі півплощин маємо

$$\begin{aligned}\left(\sigma_y^{(1)} - i\tau_{xy}^{(1)}\right)\Big|_{L'} = {} & -\frac{E^*}{4}\operatorname{sh}2\pi\theta\cdot[g_1'(x) + ig_2'(x)] + \\ & + E^*\operatorname{ch}^2\pi\theta\,\frac{X_1(x)}{2\pi i}\int_{L'}\frac{g_1'(s) + ig_2'(s)}{X_1(s)(s-x)}\,ds - \\ & - \operatorname{ch}\pi\theta\,\frac{X_1(x)}{\pi}\int_{L''}\frac{g_3(s) - ig_4(s)}{X_1(s)(s-x)}\,ds - ie^{-\pi\theta}P_{n-1}(x)X_1(x),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial\Delta u_x}{\partial x} + i\frac{\partial\Delta u_y}{\partial x}\right)\Bigg|_{L''} = {} & \frac{2}{E^*}\operatorname{th}\pi\theta\cdot[g_3(x) - ig_4(x)] + \\ & + \operatorname{ch}\pi\theta\,\frac{X_1(x)}{\pi}\int_{L'}\frac{g_1'(s) + ig_2'(s)}{X_1(s)(s-x)}\,ds + \\ & + \frac{2}{E^*}\frac{X_1(x)}{\pi i}\int_{L''}\frac{g_3(s) - ig_4(s)}{X_1(s)(s-x)}\,ds + \frac{2e^{-\pi\theta}}{E^*\operatorname{ch}\pi\theta}P_{n-1}(x)X_1(x).\end{aligned} \tag{15}$$

На основі співвідношень (7), (8) переконуємося, що вирази (13) і (15) співпадають, тобто із розв'язку (15) основної змішаної задачі для двох півплощин при $G_2 \to \infty$ отримуємо розв'язок (13) для однієї півплощини. Користуючись рівностями (7), (8), можна також зробити зворотний перехід і розв'язок (15) відтворити за розв'язком (13). Окрім того, після віднесення напружень до зведеного модуля пружності E^* залежність від пружних констант зводиться до однієї сталої θ. Отже, у випадку основної змішаної задачі сформульована вище *властивість* виконується.

Змішана задача з ділянками трьох типів крайових умов. Нехай між проміжками L' і L'' містяться $2n$ проміжків множини L''' (див. рис. 2).

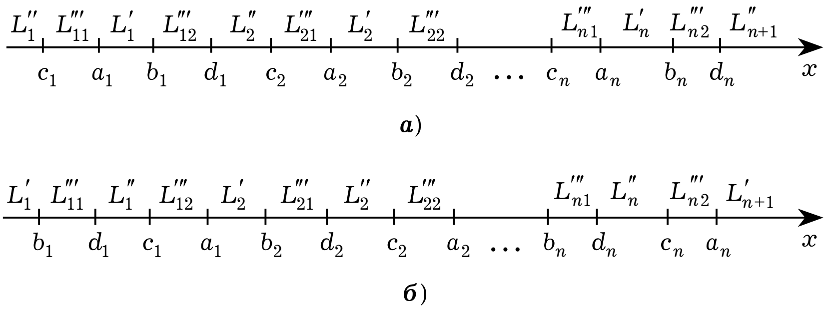

Рис. 2

На загальній межі $L = L' \cup L'' \cup L'''$ ($-\infty < x < \infty$, $y = 0$) різнорідних півплощин маємо крайові умови, які складаються із умов (14) і наступних:

$$\left(u_y^{(1)} - u_y^{(2)}\right)\Big|_{L'''} = g_2(x),$$

$$\tau_{xy}^{(1)}\Big|_{L'''} = (-1)^m \mu_0\, \sigma_y^{(1)}\Big|_{L'''}, \quad x \in L'''_{km}, \quad k = 1,2,\ldots,n, \quad m = 1,2. \tag{16}$$

Крайові умови (16), де μ_0 – коефіцієнт тертя, є умовами ковзного ($\mu_0 > 0$) або гладкого ($\mu_0 = 0$) контакту.

Введемо невідому функцію

$$g_3(x) = \sigma_y^{(1)}\Big|_{L'''} \tag{17}$$

і скористаємося розв'язком (15) основної змішаної задачі (14) (поширивши множину L'' на множину $L'' \cup L'''$), у якій для виконання другої з умов (16) покладемо $g_4(x) = (-1)^m \mu_0 g_3(x)$, $x \in L'''$. Виділивши у другому виразі (15) уявну частину і підставивши її у продиференційовану першу з крайових умов (16), отримаємо інтегральне рівняння для визначення невідомої функції $g_3(x)$ на системі проміжків L'''.

Таким чином, задача (14), (16) за допомогою точного розв'язку (15) основної змішаної задачі (14) зводиться до інтегрального рівняння, що дає змогу перенести сформульовану вище *властивість* на змішані задачі для двох різнорідних півплощин з ділянками трьох типів крайових умов.

Зауважимо, що змішана задача (14), (16) у випадку ділянок гладкого контакту, розташованих тільки з одного боку ділянок зчеплення ($\mu_0 = 0$, $d_k = b_k$, $k = 1,2,\ldots,n$), має точний розв'язок, отриманий у роботі [8] для однієї півплощини і в [20] для двох півплощин ($g_1(x) \equiv 0$, $g_2(x) \equiv 0$) шляхом зведення до комбінованої крайової задачі Діріхле – Рімана для аналітичних функцій, а також у роботі [15] для двох півплощин зведенням до векторної задачі Рімана – Гільберта спеціального вигляду.

Осесиметрична деформація пружних півпросторів. За умови осесиметричної деформації півпростору $z \ge 0$ зв'язок між переміщеннями і напруженнями на межі $z = 0$, $0 \le r < \infty$, $0 \le \vartheta < 2\pi$ можна подати наступним чином:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru_r)\Big|_{z=0} = \frac{1-2\nu}{2G}\sigma(r) - \frac{1-\nu}{G}\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{\overline{\tau}(s)}{g(s)}r^{-s-1}\,ds\,,$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial r}\Big|_{z=0} = \frac{1-\nu}{G}\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} g(s)\overline{\sigma}(s)r^{-s-1}\,ds - \frac{1-2\nu}{2G}\tau(r)\,,$$

$$g(s) = \frac{\Gamma\left(1+\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{s}{2}\right)}\,, \tag{18}$$

де $\overline{\sigma}(s)$ і $\overline{\tau}(s)$ – трансформанти Мелліна граничних значень нормальних і дотичних напружень (помножених на r):

$$\overline{\sigma}(s) = \int_0^\infty \sigma(r)r^s\,dr, \qquad \overline{\tau}(s) = \int_0^\infty \tau(r)r^s\,dr\,,$$

$$\sigma(r) = \sigma_z\big|_{z=0}\,, \qquad \tau(r) = \tau_{r\vartheta}\big|_{z=0}\,. \tag{19}$$

Співвідношення (18), (19) випливають із розв'язку першої крайової задачі теорії пружності для конуса [9], якщо покласти кут піврозхилу в осьовому перерізі конуса рівним $\pi/2$.

Підстановкою (19) у (18) і зміною порядку інтегрування співвідношення (18) можуть бути перетворені до вигляду [2]

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru_r)\Big|_{z=0} = \frac{1-2\nu}{2G}\sigma(r) - \frac{1-\nu}{\pi G}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}r\int_0^\infty\frac{s\tau(s)}{s+r}\left[\left(\frac{s}{r}+\frac{r}{s}\right)\mathbf{K}\left(\frac{2\sqrt{sr}}{s+r}\right) - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{s}{r}+\frac{r}{s}+2\right)\mathbf{E}\left(\frac{2\sqrt{sr}}{s+r}\right)\right]ds\,,$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial r}\Big|_{z=0} = -\frac{1-\nu}{\pi G}\frac{d}{dr}\int_0^\infty\frac{2s\sigma(s)}{s+r}\mathbf{K}\left(\frac{2\sqrt{sr}}{s+r}\right)ds - \frac{1-2\nu}{2G}\tau(r)\,, \tag{20}$$

де $\mathbf{K}(x)$ і $\mathbf{E}(x)$ – повні еліптичні інтеграли першого і другого роду.

Для двох пружних півпросторів $z \ge 0$ і $z \le 0$ з пружними сталими G_1, ν_1 і G_2, ν_2 відповідно, при переході через загальну межу $z = 0$ яких напруження неперервні

$$\sigma_z^{(1)}\big|_{z=0} = \sigma_z^{(2)}\big|_{z=0} = \sigma(r), \qquad \tau_{rz}^{(1)}\big|_{z=0} = \tau_{rz}^{(2)}\big|_{z=0} = \tau(r)\,, \tag{21}$$

із (18) отримуємо

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r(u_r^{(1)} - u_r^{(2)})\right)\Big|_{z=0} = \frac{2}{E^*}\operatorname{th}\pi\theta\cdot\sigma(r) - \frac{2}{E^*}\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{\overline{\tau}(s)}{g(s)}r^{-s-1}\,ds\,,$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(u_z^{(1)} - u_z^{(2)}\right)\Big|_{z=0} = \frac{2}{E^*}\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} g(s)\overline{\sigma}(s)r^{-s-1}\,ds - \frac{2}{E^*}\operatorname{th}\pi\theta\cdot\tau(r) \tag{22}$$

зі значеннями сталих E^* і θ із (7).

Аналіз співвідношень (18), (22), такий самий, як і для півплощин відносно рівностей (2), (6), приводить до висновку, що і для двох пружних півпросторів у випадку осесиметричної деформації та умов неперервності напружень (21) має місце *властивість*, сформульована у першій частині статті.

Вкажемо на роботи, в яких отримано розв'язки осесиметричних задач теорії пружності для двох спряжених півпросторів. Відкрита міжфазна тріщина вивчалася в [6], в рамках контактної моделі Комніноу – в [24, 33] чисельно, в [14] аналітично. Крім того, в [23] розглянута зовнішня міжфазна тріщина між зчепленими уздовж кругової області півпросторами. Розв'язок основної змішаної задачі, коли у круговій області межі півпросторів задані напруження, а поза цією областю переміщення і напруження неперервні, побудовано у [9]. У протилежному випадку для одного півпростору, коли у круговій області межі задано переміщення, а поза нею відсутні напруження, маємо відому задачу про круговий штамп, зчеплений з пружним півпростором, розв'язану незалежно В. І. Моссаковським [5] і Я. С. Уфляндом [19]. За допомогою розглянутої нами *властивості* розв'язок цієї задачі безпосередньо переноситься на випадок різнорідних півпросторів, зчеплених уздовж кругової області.

1. *Антипов Ю. А.* Трещина на линии раздела упругих сред при наличии сухого трения // Прикл. математика и механика. – 1995. – **52**, № 2. – С. 290–306.
2. *Джонсон К.* Механика контактного взаимодействия. – Москва: Мир, 1989. – 510 с.
3. *Дундурс Я., Комниноу М.* Обзор и перспективы исследования межфазной трещины // Разрушение композитных материалов. – Рига: Зинатне, 1979. – С. 78–87.
4. *Жупанська О. І.* Фрикційна взаємодія жорсткого циліндра з пружним півпростором // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1999. – **42,** № 2. – С. 91–100.
5. *Моссаковский В. И.* Основная смешанная задача теории упругости для полупространства с круговой линией раздела граничных условий // Прикл. математика и механика. – 1954. – **18**, № 2. – С. 187–196.
6. *Моссаковский В. И., Рыбка М. Т.* Обобщение критерия Гриффитса – Снеддона на случай неоднородного тела // Прикл. математика и механика. – 1964. – **28**, № 6. – С. 1061–1069.
7. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. – Москва: Наука, 1966. – 707 с.
8. *Нахмейн Е. Л., Нуллер Б. М.* Давление системы штампов на упругую полуплоскость при общих условиях контактного сцепления и скольжения // Прикл. математика и механика. – 1988. – **52**, № 2. – С. 284–293.
9. *Острик В. И., Улитко А. Ф.* Метод Винера – Хопфа в контактных задачах теории упругости. – Киев: Наук. думка, 2006. – 328 с.
10. *Острик В. И., Улитко А. Ф.* Равномерное вращение предварительно сжатых жесткого и упругого дисков при учете сил трения в контакте // Проблемы механики: Сб. статей: К 90-летию со дня рождения А. Ю. Ишлинского / Под ред. Д. М. Климова. – Москва: Физматлит, 2003. – С. 619–634.
11. *Острик В. И., Улитко А. Ф.* Фрикционный контакт двух вращающихся упругих дисков // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2007. – № 5. – С. 117–128.
12. *Острик В. І.* Контакт з тертям берегів міжфазної тріщини за розтягу та зсуву // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2003. – **39**, № 2. – С. 58–65.
13. *Острик В. І., Улітко А. Ф.* Контактна задача для міжфазної напівнескінченної тріщини // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2001. – **44,** № 3. – С. 88–95.
14. *Острик В. І., Улітко А. Ф.* Кругова міжфазна тріщина за умови фрикційного контакту поверхонь // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2004. – **47,** № 1. – С. 84–94.
15. *Симонов И. В.* Межфазная трещина в однородном поле напряжений // Механика композит. материалов. – 1985. – № 6. – С. 969–976.
16. *Тимошенко С. П., Гудьер Дж.* Теория упругости. – Москва: Наука, 1979. – 560 с.
17. *Улитко А. Ф.* Полубесконечный разрез вдоль границы жестко соединенных полуплоскостей из различных материалов // Соврем. проблемы механики сплошной среды. – Ростов-на-Дону: Книга, 1995. – С. 185–193.
18. *Улитко А. Ф., Острик В. И.* Фрикционный контакт упругих тел и взаимодействие межфазных трещин // Актуальні аспекти фізико-механічних досліджень. Механіка. – Київ: Наук. думка, 2007. – С. 305–317.
19. *Уфлянд Я. С.* Контактная задача теории упругости для кругового в плане штампа при наличии сцепления // Прикл. математика и механика. – 1956. – **20**, № 5. – С. 578–587.
20. *Харун І. В., Лобода В. В.* Міжфазні тріщини з зонами контакту в полі зосереджених сил і моментів // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2002. – **45,** № 2. – С. 103–113.
21. *Черепанов Г. П.* О напряженном состоянии в неоднородной пластинке с разрезами // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. – 1962. – № 1. – С. 131–137.

22. *Штаерман И. Я.* К теории Герца местных деформаций при сжатии упругих тел // Докл. АН СССР. – 1939. – **25**, № 5. – С. 360–362.
23. *Barber J. R., Comninou M.* The external axisymmetric interface crack with heat flow // Quart. J. Mech. Appl. Math. – 1982. – **35**, No. 3. – P. 403–417.
24. *Barber J. R., Comninou M.* The penny-shaped interface crack with heat flow. Part 2: Imperfect contact // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1983. – **50**, No. 4a. – P. 770–776.
25. *Comninou M.* The interface crack // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1977. – **44**. – P. 631–636.
26. *Comninou M.* The interface crack in a shear field // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1978. – **44**. – P. 287–290.
27. *Comninou M.* The interface crack with friction in the contact zone // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1977. – **44**. – P. 780–781.
28. *Comninou M., Dundurs J.* Effect of friction on the interface crack loaded in shear // Journ. of Elasticity. – 1980. – **10**, No. 2. – P. 203–212.
29. *Comninou M., Schmueser D.* The interface crack in a combined tension – compression and shear field // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1979. – **46**. – P. 345–348.
30. *Gautesen A. K., Dundurs J.* The interface crack under a combined loading // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1988. – **55**. – P. 580–586.
31. *Hertz H.* Über die Berührung fester elastischer Körper // J. reine angew. Math. – 1882. – **92**. – S. 156–171.
32. *Loboda V. V.* The quasi-invariant in the theory of interface crack // Eng. Fract. Mech. – 1993. – **44**. – P. 573–580.
33. *Martin-Moran C. J., Barber J. R., Comninou M.* The penny-shaped interface crack with heat flow. Part 1: Perfect contact // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1983. – **50**, No. 1. – P. 29–36.
34. *Spence D. A.* An eigenvalue problem for elastic contact with finite fraction // Proc. Cambrige Philos. Soc. – 1973. – **73**. – P. 249–268.
35. *Ulitko A. F.* Exakte Lösung des Kontaktproblems für zwei Zylinder unter Berücksichtigung der Reibung // Z. angew. Math. Mech. – 2000. – **80**, № 7. – S. 435–455.
36. *Williams M. L.* Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1952. – **19**, No. 4. – P. 526–535.

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ДВУХ ПОЛУПЛОСКОСТЕЙ ИЛИ ПОЛУПРОСТРАНСТВ

Показано, что решение любой граничной задачи для двух сопряженных полуплоскостей с разными упругими постоянными в случае, когда напряжения непрерывно продолжимы через границу полуплоскостей, выражается через одну совокупную упругую постоянную, если напряжения, а также внешние силовые факторы отнести к приведенному модулю упругости. Благодаря этому решение задачи для двух сопряженных полуплоскостей можно получить непосредственно из решения соответствующей задачи для одной упругой полуплоскости. Указанное свойство справедливо также и для осесимметричных задач, которые формулируются для двух сопряженных полупространств.

ON ONE PROPERTY OF SOLUTION OF ELASTICITY THEORY PROBLEMS FOR TWO HALF-SPACES OR HALF-PLANES

It has been shown that solution of any boundary-value problem for two conjugated half-planes with different elastic constants in the case when the stresses are continuable through the border of half-planes can be expressed via one cumulative elastic constant if to express both the stresses and external loads by a reduced module of elasticity. Hence, it is possible to obtain the solution of the problem for two conjugated half planes directly from the solution of the corresponding problem for one elastic half-plane. The specified property holds true for axisymmetric problems about contact interaction of two conjugated half-spaces.

[1] Ін-т прикл. фізики НАН України, Суми,
[2] Київ. нац. ун-т ім. Тараса Шевченка, Київ

Одержано
14.01.09