УДК 539.3

Я. Й. Бурак, Г. І. Мороз, З. В. Бойко

ПРО ЕНЕРГЕТИЧНИЙ ПІДХІД І ТЕРМОДИНАМІЧНІ ЗАСАДИ ВАРІАЦІЙНОГО ФОРМУЛЮВАННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ТЕРМОМЕХАНІКИ З УРАХУВАННЯМ ПРИПОВЕРХНЕВИХ ЯВИЩ

У рамках енергетичного, термодинамічного та варіаційного підходів запропоновано математичну модель для опису термомеханічних процесів у пружних деформівних системах з урахуванням дисипативних ефектів при формуванні приповерхневих явищ. На основі поєднання енергетичного та термодинамічного підходів отримано співвідношення для локального термодинамічного стану і для опису дисипативних процесів. За варіаційним підходом побудовано функціонал, з умови мінімізації якого отримуємо згадані вище співвідношення локального термодинамічного стану та опису дисипативних процесів, а також природні граничні умови. Сформульовано достатні умови опуклості функціонала.

Вступ. Розрахунки на міцність і надійність елементів конструкцій та приладів, які працюють в екстремальних умовах силового навантаження і нагріву, є актуальними в сучасній механіці деформівних систем [11, 12]. У зв'язку з цим при побудові математичних моделей механіки важливо враховувати, зокрема, приповерхневі явища, які можуть суттєво впливати на поведінку тіл і є вихідними для кількісного аналізу граничних параметрів, адже саме в приповерхневій зоні визначальною є взаємодія тіла із зовнішнім середовищем. У науковій літературі для оцінки параметрів міцності використовують як енергетичні підходи, які базуються на балансових енергетичних співвідношеннях, так і методи термодинаміки нерівноважних процесів [8–10]. У роботах [13–17] запропоновано ґрадієнтні моделі пружних і термопружних п'єзоелектриків, простір параметрів стану яких розширено ґрадієнтом вектора поляризації, що дозволило, зокрема, описати приповерхневу неоднорідність взаємозв'язаних механічних та електромагнітних полів. При цьому у праці [15] для формулювання основних співвідношень моделі використовується варіаційний принцип Гамільтона.

Енергетичні та термодинамічні підходи до побудови локально-ґрадієнтних моделей термопружності розглянуто у роботах [3, 4]. Тут за підходом Лаґранжа введено у розгляд вектор поляризаційного пружного зміщення центра мас фізично малої підсистеми відносно геометричного центра.

У роботі [6] запропоновано енергетичний підхід до модельного опису кінетики формування приповерхневих явищ у термопружних тілах. При встановленні визначальних співвідношень термодинамічного стану (за підходом Лаґранжа) додатково приймається, що фізично мала підсистема є субстанціональною.

Підхід і методику формулювання базових співвідношень термомеханіки пружних систем за підходом Ейлера з урахуванням вектора локального зміщення маси розглянуто у роботі [7].

Енергетичний підхід і методика побудови визначальних співвідношень нелінійної термомеханіки інерційних пружних систем наводиться у [2]. Тут, зокрема, сформульовано варіаційну постановку задачі на основі повного функціонала Гамільтона. Поєднання енергетичного та термодинамічного підходів до побудови математичних моделей термомеханіки деформівних пружних систем з урахуванням дисипативних ефектів розглянуто у роботі [5]. На цій основі запропоновано також варіант постановки задачі про оптимізацію напруженого стану при заданих інтегральних обмеженнях на зовнішнє навантаження.

Варіаційну постановку та порівняльний аналіз розв'язків крайових задач теорії пружності при заданому силовому навантаженні як у рамках класичної, так і моментної теорій наведено в роботі [1].

У цій роботі на основі поєднання енергетичного та термодинамічного підходів побудовано математичну модель термомеханіки, у якій формування приповерхневих явищ пов'язується з урахуванням процесу пружного зміщення центрів мас і з дисипативними процесами переходу системи «пружне тіло – зовнішнє середовище» із вихідного природного стану до стаціонарного. Одержані результати покладено в основу запропонованого варіаційного формулювання відповідних крайових задач.

1. Енергетичний і термодинамічний підходи. Локальне формулювання. Розглядаємо термопружне тіло $\mathcal{K}_*$, яке взаємодіє із зовнішнім середовищем $\mathcal{K}_*^+$. За відліковий (для $t \le t_0$, t – час) термодинамічний стан тіла приймаємо природний однорідний стан, який характеризується абсолютною температурою $T_{(0)}$ і густиною ентропії $S_{(0)}$, хімічним потенціалом $\mu_{(0)}$ і густиною маси $\rho_{(0)}$, тиском $P_{(0)}$ і питомим об'ємом $V_{(0)} = \rho_{(0)}^{-1}$.

Внаслідок взаємодії термопружного тіла $\mathcal{K}_*$ із зовнішнім середовищем $\mathcal{K}_*^+$ в процесі переходу тіла $\mathcal{K}_*$ із вихідного природного (однорідного) стану до ґрадієнтного стаціонарного в межах системи $\mathcal{K}_* \bigcup \mathcal{K}_*^+$ протягом часу $t_1 < t \le t_2$ ($t_1 > t_0$) виникають приповерхневі явища.

1.1. Рівняння балансу енергії. Інтегральною мірою термопружного стану тіла $\mathcal{K}_*$ для $t > t_0$ є його енергія

$$\mathcal{E}(\mathcal{K}_*, t) = \mathcal{E}\left[X_*(t) \bigcup \partial X_*(t)\right],$$

де $X_*(t) \bigcup \partial X_*(t)$ – область евклідового простору, яку займає термопружне тіло $\mathcal{K}_*$ у момент часу $t \in (t_1, t_2)$.

Енергія системи $\mathcal{E}(\mathcal{K}_*, t)$ є додатно визначеною адитивною мірою стану. Згідно з законом збереження енергії маємо

$$d\mathcal{E}(\mathcal{K}_*, t) = \delta Q_*^{(+)} + \delta A_*^{(+)},$$

де $\mathcal{E}(\mathcal{K}_*, t)$ – лінійна частина приросту енергії, $\delta Q_*^{(+)}$ – складова, зумовлена тепловою взаємодією термопружного тіла $\mathcal{K}_*$ із зовнішнім середовищем $\mathcal{K}_*^+$, а $\delta A_*^{(+)}$ – відповідно механічною взаємодією тіла $\mathcal{K}_*$ із середовищем $\mathcal{K}_*^+$.

Внаслідок адитивності енергії аналогічне за формою рівняння балансу енергії можна подати для довільно виділеної підсистеми $\mathcal{K} \subset \mathcal{K}_*$:

$$d\mathcal{E}(\mathcal{K}, t) = \delta Q^{(+)} + \delta A^{(+)}. \tag{1}$$

Тут $\delta Q^{(+)}$, $\delta A^{(+)}$ – лінійні складові приросту енергії системи $\mathcal{K}$, який зумовлений взаємодією системи із середовищем $\mathcal{K}^+ = \mathcal{K}_*^+ \bigcup \mathcal{K}_* \setminus \mathcal{K}$. Складова $\delta Q^{(+)}$ кількісно характеризує теплові процеси (теплопровідність і теплоперенесення), а $\delta A^{(+)}$ – приріст механічної енергії, зумовлений пружним деформуванням і масоперенесенням.

Сконкретизуємо енергетичне співвідношення (1) для опису локального стану фізично малої підсистеми $\delta\mathcal{K} \subset \mathcal{K}$:

$$d\mathcal{E}(\delta\mathcal{K}, t) = d[E(\mathbf{r}, t)\delta V], \tag{2}$$

де $\mathbf{r}$ – радіус-вектор місця довільної матеріальної точки $k \in \mathcal{K}_*$ у момент часу t; $E(\mathbf{r}, t)$ – енергія фізично малої підсистеми $\delta\mathcal{K}$, яка віднесена до об'єму $\delta V(\mathbf{r}, t)$ цієї підсистеми у момент часу t.

Надалі всі адитивні параметри системи нормуватимемо за геометричними характеристиками фізично малої підсистеми $\delta\mathcal{K}$ у відліковій конфігурації. Тоді рівняння балансу (2) набуває вигляду

$$d\mathcal{E}(\delta\mathcal{K},t) = dE_0\delta V_0\,,$$

$$dE_0 = C_V dT + C_V^* d\mu + \hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot\cdot\, d(\boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \mathbf{r})^{\top} + (\boldsymbol{\nabla}_0 \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{f}^+)\cdot d\mathbf{u}\,. \tag{3}$$

Тут $E_0 = E_0(\mathbf{r}_0,t)$ – густина енергії фізично малої підсистеми $\delta\mathcal{K} \subset \mathcal{K}$; $C_V = C_V(\mathbf{r}_0,t)$ – густина теплоємності; $C_V^* = C_V^*(\mathbf{r}_0,t)$ – густина «енергоємності» масової підсистеми; $T = T(\mathbf{r}_0,t)$ – абсолютна температура; $\mu = \mu(\mathbf{r}_0,t)$ – хімічний потенціал; $\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \hat{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{r}_0,t)$ – тензор напружень Піоли – Кірхгофа першого роду; $\mathbf{f}^+ = \mathbf{f}^+(\mathbf{r}_0,t)$ – вектор густини об'ємних сил; $\boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \mathbf{r}$ – тензор ґрадієнта місця (несиметричний тензор деформації матеріальної підсистеми); $\mathbf{u} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ – вектор переміщення. Крапкою між величинами позначено скалярний добуток, символом $\otimes$ – тензорний (діадний) добуток, символом $\top$ – операцію транспонування тензора $\boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \mathbf{r}$.

1.2. Термодинамічний опис моделі. За законом збереження енергії

$$C_V dT + C_V^* d\mu = -\mathcal{P}\, dV - \boldsymbol{\nabla}_0 \cdot \left[\mathbf{J}_Q + (\mu - \mu_{(0)})\mathbf{J}_M\right] dt\,, \tag{4}$$

де $\mathcal{P}$ – питомий тиск; $V = \rho^{-1}$ – питомий об'єм; $\mathbf{J}_Q$ і $\mathbf{J}_M$ – потік енергії теплової форми руху і маси відповідно.

Енергетичне співвідношення (4) подамо так:

$$C_V dT + C_V^* d\mu = -\mathcal{P}\, dV + \left\{-T\,\boldsymbol{\nabla}_0 \cdot \mathbf{J}_s - (\mu - \mu_0)\boldsymbol{\nabla}_0 \cdot \mathbf{J}_M + \right.$$
$$\left. + (-\boldsymbol{\nabla}_0 T)\cdot \mathbf{J}_s + \left[-\boldsymbol{\nabla}_0(\mu - \mu_0)\right]\cdot \mathbf{J}_M\right\} dt\,,$$

де $\mathbf{J}_s = \dfrac{1}{T}\mathbf{J}_Q$ ($\mathbf{J}_s$ – потік ентропії).

У зв'язку з цим рівняння балансу енергії (3) набуває форми

$$dE_0 = -\mathcal{P}\, dV + \hat{\boldsymbol{\sigma}}_0 \cdot\cdot\, d\hat{\mathbf{e}} + (\boldsymbol{\nabla}_0 \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{f}^+)\cdot d\mathbf{u} - \hat{\boldsymbol{\sigma}}_* \cdot\cdot\, d(\boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \mathbf{u})^{\mathrm{a}} +$$
$$+ \left\{T(-\boldsymbol{\nabla}_0 \cdot \mathbf{J}_s) + (\mu - \mu_{(0)})(-\boldsymbol{\nabla}_0 \cdot \mathbf{J}_M) + \right.$$
$$\left. + (-\boldsymbol{\nabla}_0 T)\cdot \mathbf{J}_s + \left[-\boldsymbol{\nabla}_0(\mu - \mu_0)\right]\cdot \mathbf{J}_M\right\} dt\,. \tag{5}$$

Тут $\hat{\mathbf{e}} = (\boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \mathbf{u} + \mathbf{u} \otimes \boldsymbol{\nabla}_0)/2$ – симетричний тензор деформації; $(\boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \mathbf{u})^{\mathrm{a}} = (\boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \mathbf{u} - \mathbf{u} \otimes \boldsymbol{\nabla}_0)/2$ – антисиметрична складова тензора ґрадієнта місця; $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_0$ і $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_*$ – симетрична та антисиметрична складові тензора напружень Піоли – Кірхгофа першого роду.

З урахуванням рівняння балансу ентропії

$$\frac{dS}{dt} = -\boldsymbol{\nabla}_0 \cdot \mathbf{J}_s + \sigma_s\,,$$

де $\sigma_s \geq 0$ – виникнення ентропії, енергетичне співвідношення (5) можна подати так:

$$dE_0 = T dS - \mathcal{P}\, dV + (\mu - \mu_{(0)})\, d(-\boldsymbol{\nabla}_0 \cdot \boldsymbol{\Pi}_M) + \hat{\boldsymbol{\sigma}}_0 \cdot\cdot\, d\hat{\mathbf{e}} +$$
$$+ \left\{-T\sigma_s + (\boldsymbol{\nabla}_0 \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{f}^+)\cdot \mathbf{v} + \left[-\hat{\boldsymbol{\sigma}}_* \cdot\cdot\, (\boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \mathbf{v})^{\mathrm{a}}\right] + \right.$$
$$\left. + (-\boldsymbol{\nabla}_0 T)\cdot \mathbf{J}_s + \left[-\boldsymbol{\nabla}_0(\mu - \mu_0)\right]\cdot \mathbf{J}_M\right\} dt\,. \tag{6}$$

Тут $\boldsymbol{\Pi}_M = \int\limits_{t_0}^{t} \mathbf{J}_M \, d\tilde{t}$ – вектор локального пружного зміщення центра мас фізично малої підсистеми відносно геометричного центра; $\mathbf{v} = \dfrac{d\mathbf{u}}{dt}$.

Одержане енергетичне співвідношення (6) є вихідним як для встановлення основного термодинамічного співвідношення (рівняння Ґіббса)

$$dU = TdS - \mathcal{P}\, dV + (\mu - \mu_{(0)}) d(-\boldsymbol{\nabla}_0 \cdot \boldsymbol{\Pi}_M) + \hat{\boldsymbol{\sigma}}_0 \cdot\cdot\, d\hat{\mathbf{e}}\,, \tag{7}$$

так і виникнення ентропії (міри дисипативних процесів)

$$\sigma_s = \frac{1}{T}\{(\boldsymbol{\nabla}_0 \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{f}^{+}) \cdot \mathbf{v} - \hat{\boldsymbol{\sigma}}_* \cdot\cdot\, (\boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \mathbf{v})^{\mathrm{a}} + (-\boldsymbol{\nabla}_0 T) \cdot \mathbf{J}_s + \\ + [-\boldsymbol{\nabla}_0 (\mu - \mu_{(0)})] \cdot \mathbf{J}_M\}\,. \tag{8}$$

Тут $U = U(S, V, -\boldsymbol{\nabla}_0 \cdot \boldsymbol{\Pi}_M, \hat{\mathbf{e}})$ – густина внутрішньої енергії фізично малої підсистеми $\delta\mathcal{K}$, яка є характеристичною функцією параметрів локального термодинамічного стану.

Виразу для виникнення ентропії (8) поставимо у відповідність таку диференціальну 1-форму:

$$d\Psi = (\boldsymbol{\nabla}_0 \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{f}^{+}) \cdot d\mathbf{u} + (-\hat{\boldsymbol{\sigma}}_*) \cdot\cdot\, d(\boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \mathbf{u})^{\mathrm{a}} + (-\boldsymbol{\nabla}_0 T) \cdot d\boldsymbol{\Pi}_s + \\ + \left[-\boldsymbol{\nabla}_0 (\mu - \mu_{(0)})\right] \cdot d\boldsymbol{\Pi}_M\,, \tag{9}$$

де

$$\Psi = \Psi\left[\mathbf{u}, (\boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \mathbf{u})^{\mathrm{a}}, \boldsymbol{\Pi}_s, \boldsymbol{\Pi}_M\right] \equiv \int\limits_{t_0}^{t} T\sigma_s \, d\tilde{t} \;\; - \text{ дисипативний потенціал,}$$

$$\boldsymbol{\Pi}_s = \int\limits_{t_0}^{t} \mathbf{J}_s \, d\tilde{t}\,.$$

Диференціальна 1-форма (9) є базовою для модельного опису дисипативних процесів, які супроводжують термомеханічні явища.

Обмежимося надалі розглядом ізотермічних процесів ($T = T_{(0)} = \mathrm{const}$). Тоді за функцію локального термодинамічного стану приймемо вільну енергію (функцію Гельмгольца) $F = U - T_{(0)} S$.

За таких умов диференціальні 1-форми (7) і (9) можна подати так:

$$dF = -\mathcal{P}\, d(\rho^{-1}) + \frac{1}{3}\sigma de + \hat{\boldsymbol{\sigma}}_0^{\mathrm{d}} \cdot\cdot\, d\hat{\mathbf{e}}^{\mathrm{d}} + (\mu - \mu_{(0)}) d(-\boldsymbol{\nabla}_0 \cdot \boldsymbol{\Pi}_M)\,, \tag{10}$$

$$d\Psi = (\boldsymbol{\nabla}_0 \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{f}^{+}) \cdot d\mathbf{u} + (-\hat{\boldsymbol{\sigma}}_*) \cdot\cdot\, d(\boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \mathbf{u})^{\mathrm{a}} + \boldsymbol{\nabla}_0 (\mu - \mu_{(0)}) \cdot d(-\boldsymbol{\Pi}_M)\,. \tag{11}$$

У базовому рівнянні локальної термодинамічної рівноваги (10) $\sigma = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$, $e = \boldsymbol{\nabla}_0 \cdot \mathbf{u}$ – об'ємна деформація фізично малої підсистеми; $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_0^{\mathrm{d}} = \hat{\boldsymbol{\sigma}}_0 - \sigma\hat{\boldsymbol{I}}/3$ – девіатор тензора напружень $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_0$; $\hat{\mathbf{e}}^{\mathrm{d}} = \hat{\mathbf{e}} - e\hat{\boldsymbol{I}}/3$ – девіатор тензора деформації $\hat{\mathbf{e}}$; $\hat{\boldsymbol{I}}$ – одиничний тензор.

В умовах потенціального характеру локального термодинамічного стану системи диференціальна 1-форма (10) є повним диференціалом для функції $F = F(\rho^{-1}, e, \hat{\mathbf{e}}^{\mathrm{d}}, -\boldsymbol{\nabla}_0 \cdot \boldsymbol{\Pi}_M)$. Така диференціальна 1-форма є вихідною для встановлення структури рівнянь локального термодинамічного стану (фізичні співвідношення).

1.3. Рівняння локального термодинамічного стану. Надалі у диференціальній 1-формі (10) приймемо

$$\rho = \rho_{(0)}(1 - e), \qquad \mathcal{P} = \mathcal{P}\left(\frac{1}{\rho_0(1 - e)}\right), \qquad \sigma = 3Ke\,,$$

де K – модуль об'ємного стиску.

Тоді диференціальна 1-форма для вільної енергії в лінійному наближенні набуває вигляду

$$dF = \frac{1}{3}\sigma^* de + \hat{\boldsymbol{\sigma}}_0^{\mathrm{d}} \cdot\cdot\, d\hat{\mathbf{e}}^{\mathrm{d}} + (\mu - \mu_{(0)}) d(-\boldsymbol{\nabla}_0 \cdot \boldsymbol{\Pi}_M). \tag{12}$$

Тут введено позначення

$$\frac{1}{3}\sigma^* = -\frac{\boldsymbol{\mathcal{P}}_{(0)}}{\rho_{(0)}} + K_* e, \qquad K_* = K - \frac{2\boldsymbol{\mathcal{P}}_{(0)}}{\rho_{(0)}} - \frac{1}{\rho_{(0)}^2}\frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{P}}}{\partial(1/\rho)}\bigg|_{(1/\rho_{(0)})}.$$

Якщо функція стану $F = F(e, \hat{\mathbf{e}}^{\mathrm{d}}, -\boldsymbol{\nabla}_0 \cdot \boldsymbol{\Pi}_M)$ є заданою, то на основі диференціальної 1-форми (12) можна встановити таку систему визначальних співвідношень:

$$\sigma^* = 3\frac{\partial F}{\partial e} = \sigma^*(B), \qquad \hat{\boldsymbol{\sigma}}_0^{\mathrm{d}} = \frac{\partial F}{\partial \hat{\mathbf{e}}^{\mathrm{d}}} = \hat{\boldsymbol{\sigma}}_0^{\mathrm{d}}(B),$$

$$\mu - \mu_{(0)} = \frac{\partial F}{\partial(-\boldsymbol{\nabla}_0 \cdot \boldsymbol{\Pi}_M)} = (\mu - \mu_{(0)})(B), \tag{13}$$

де $B = (e, \hat{\mathbf{e}}^{\mathrm{d}}, -\boldsymbol{\nabla}_0 \cdot \boldsymbol{\Pi}_M)$.

Для подальшої конкретизації структури фізичних співвідношень (13) приймемо, що однорідний початковий стан тіла є ізотропним і в околі цього стану вільна енергія $F = F(e, \hat{\mathbf{e}}^{\mathrm{d}}, -\boldsymbol{\nabla}_0 \cdot \boldsymbol{\Pi}_M)$ є аналітичною функцією скалярних інваріантів вказаних параметрів стану. Обмежимось надалі квадратичним наближенням її розкладу в околі початкового стану

$$F = F_0 - \frac{\boldsymbol{\mathcal{P}}_{(0)}}{\rho_{(0)}} e + \frac{1}{2}\alpha_1 e^2 + \frac{1}{2}\alpha_2(-\boldsymbol{\nabla}_0 \cdot \boldsymbol{\Pi}_M)^2 + \frac{1}{2}\alpha_3(\hat{\mathbf{e}}^{\mathrm{d}} \cdot\cdot\, \hat{\mathbf{e}}^{\mathrm{d}}) - \alpha_4 e(-\boldsymbol{\nabla}_0 \cdot \boldsymbol{\Pi}_M).$$

Тоді одержимо такі фізичні співвідношення:

$$\frac{1}{3}\sigma^* = -\frac{\boldsymbol{\mathcal{P}}_{(0)}}{\rho_{(0)}} + K_* e - \beta(-\boldsymbol{\nabla}_0 \cdot \boldsymbol{\Pi}_M), \qquad \hat{\boldsymbol{\sigma}}_0^{\mathrm{d}} = 2G\hat{\mathbf{e}}^{\mathrm{d}},$$

$$\mu - \mu_{(0)} = \alpha(-\boldsymbol{\nabla}_0 \cdot \boldsymbol{\Pi}_M) - \beta e, \tag{14}$$

де G – модуль зсуву, $\alpha = \left(\frac{\partial(\mu - \mu_{(0)})}{\partial(-\boldsymbol{\nabla}_0 \cdot \boldsymbol{\Pi}_M)}\right)_0$, $\beta = \frac{1}{3}\left(\frac{\partial \sigma^*}{\partial(-\boldsymbol{\nabla}_0 \cdot \boldsymbol{\Pi}_M)}\right)_0$.

Симетрична складова тензора напружень відповідно буде

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_0 = \left[-\frac{\boldsymbol{\mathcal{P}}_{(0)}}{\rho_{(0)}} + K_* e + \beta(\boldsymbol{\nabla}_0 \cdot \boldsymbol{\Pi}_M)\right]\hat{I} + 2G\hat{\mathbf{e}}^{\mathrm{d}}. \tag{15}$$

1.4. Опис дисипативних процесів. Введемо супутні до антисиметричних тензорів $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_*$ і $(\boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \mathbf{u})^{\mathrm{a}}$ вектори

$$\boldsymbol{\sigma}_* = \frac{1}{2}(\sigma_{23} - \sigma_{32})\mathbf{i}_1 + \frac{1}{2}(\sigma_{31} - \sigma_{13})\mathbf{i}_2 + \frac{1}{2}(\sigma_{12} - \sigma_{21})\mathbf{i}_3, \tag{16}$$

$$\boldsymbol{\varphi} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\nabla}_0 \times \mathbf{u} \equiv \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right)\mathbf{i}_1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)\mathbf{i}_2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)\mathbf{i}_3. \tag{17}$$

Тоді диференціальну 1-форму (11) можна подати так:

$$d\Psi = (\boldsymbol{\nabla}_0 \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{f}^+) \cdot d\mathbf{u} + (-\boldsymbol{\sigma}_*) \cdot d\boldsymbol{\varphi} + \boldsymbol{\nabla}_0(\mu - \mu_{(0)}) \cdot d(-\boldsymbol{\Pi}_M). \tag{18}$$

За умов потенціального опису, якщо дисипативний потенціал $\Psi = \Psi(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}, -\boldsymbol{\Pi}_M)$ є заданим, то отримаємо таку структуру вихідних співвідношень для опису дисипативних процесів:

$$\nabla_0 \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{f}^+ = \frac{\partial \Psi(B_*)}{\partial \mathbf{u}}, \qquad \boldsymbol{\sigma}_* = -\frac{\partial \Psi(B_*)}{\partial \boldsymbol{\varphi}},$$

$$\nabla_0(\mu - \mu_{(0)}) = \frac{\partial \Psi(B_*)}{\partial(-\boldsymbol{\Pi}_M)}, \tag{19}$$

де $B_* = (\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}, -\boldsymbol{\Pi}_M)$.

Надалі подамо дисипативний потенціал $\Psi = \Psi(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}, -\boldsymbol{\Pi}_M)$ як функцію скалярних інваріантів параметрів $\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}, -\boldsymbol{\Pi}_M$ до другого порядку включно. Тоді кінетичні рівняння (19) набувають вигляду

$$\nabla_0 \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{f}^+ = \beta_1 \mathbf{u} - \gamma_1 \boldsymbol{\varphi} - \gamma_2(-\boldsymbol{\Pi}_M),$$

$$\boldsymbol{\sigma}_* = -\beta_2 \boldsymbol{\varphi} + \gamma_1 \mathbf{u} + \gamma_3(-\boldsymbol{\Pi}_M),$$

$$\nabla_0(\mu - \mu_{(0)}) = \beta_3(-\boldsymbol{\Pi}_M) - \gamma_2 \mathbf{u} - \gamma_3 \boldsymbol{\varphi}. \tag{20}$$

Тут $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ – коефіцієнти взаємовпливу параметрів дисипативних процесів.

1.5. Ключова система рівнянь моделі. Постановка крайових задач. Для встановлення ключової системи рівнянь моделі використаємо рівняння локального термодинамічного стану (14), (15) і рівняння для дисипативних процесів (20). В результаті отримаємо

$$G\Delta \mathbf{u} + \left(K_* + \frac{1}{3}G\right)\nabla_0(\nabla_0 \cdot \mathbf{u}) + \nabla_0 \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}_* =$$

$$= \beta_1 \mathbf{u} - \beta \nabla_0(\nabla_0 \cdot \boldsymbol{\Pi}_M) + \gamma_2 \boldsymbol{\Pi}_M - \frac{\gamma_1}{2}(\nabla_0 \times \mathbf{u}) - \mathbf{f}^+,$$

$$\boldsymbol{\sigma}_* = -G'(\nabla_0 \times \mathbf{u}) + \gamma_1 \mathbf{u} + \gamma_3(-\boldsymbol{\Pi}_M),$$

$$\alpha \nabla_0(-\nabla_0 \cdot \boldsymbol{\Pi}_M) + \beta_3 \boldsymbol{\Pi}_M = \beta \nabla_0(\nabla_0 \cdot \mathbf{u}) - \gamma_2 \mathbf{u} - \frac{\gamma_3}{2}(\nabla_0 \times \mathbf{u}). \tag{21}$$

Надалі виключимо із системи (21) антисиметричний тензор напружень

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_* = \hat{\boldsymbol{\epsilon}} \cdot \left[-G'(\nabla_0 \times \mathbf{u}) + \gamma_1 \mathbf{u} + \gamma_3(-\boldsymbol{\Pi}_M)\right]. \tag{22}$$

Тоді отримаємо ключову систему рівнянь для визначення вектора переміщення $\mathbf{u}$ і вектора пружного зміщення маси $\boldsymbol{\Pi}_M$:

$$G\Delta \mathbf{u} + \left(K_* + \frac{1}{3}G\right)\nabla_0(\nabla_0 \cdot \mathbf{u}) + \nabla_0 \cdot \left[-G'\hat{\boldsymbol{\epsilon}} \cdot (\nabla_0 \times \mathbf{u}) + \gamma_1(\hat{\boldsymbol{\epsilon}} \cdot \mathbf{u})\right] + \frac{1}{2}\gamma_1(\nabla_0 \times \mathbf{u}) =$$

$$= \beta_1 \mathbf{u} - \beta \nabla_0(\nabla_0 \cdot \boldsymbol{\Pi}_M) + \gamma_3 \nabla_0 \cdot (\hat{\boldsymbol{\epsilon}} \cdot \boldsymbol{\Pi}_M) + \gamma_2 \boldsymbol{\Pi}_M - \mathbf{f}^+,$$

$$\alpha \nabla_0(-\nabla_0 \cdot \boldsymbol{\Pi}_M) + \beta_3 \boldsymbol{\Pi}_M = \beta \nabla_0(\nabla_0 \cdot \mathbf{u}) - \gamma_2 \mathbf{u} - \frac{1}{2}\gamma_3(\nabla_0 \times \mathbf{u}). \tag{23}$$

Якщо знехтувати ефектами взаємовпливу дисипативних процесів $(\gamma_1 = 0, \gamma_2 = 0, \gamma_3 = 0)$, то ключова система рівнянь (23) набуває вигляду

$$G\Delta \mathbf{u} + \left(K_* + \frac{1}{3}G\right)\nabla_0(\nabla_0 \cdot \mathbf{u}) - G'\nabla_0 \cdot \left[\hat{\boldsymbol{\epsilon}} \cdot (\nabla_0 \times \mathbf{u})\right] =$$

$$= \beta_1 \mathbf{u} - \beta \nabla_0(\nabla_0 \cdot \boldsymbol{\Pi}_M) - \mathbf{f}^+,$$

$$\alpha \nabla_0(-\nabla_0 \cdot \boldsymbol{\Pi}_M) + \beta_3 \boldsymbol{\Pi}_M = \beta \nabla_0(\nabla_0 \cdot \mathbf{u}). \tag{24}$$

При цьому відповідний антисиметричний тензор напружень (22) буде

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_* = -G'\hat{\boldsymbol{\epsilon}} \cdot (\nabla_0 \times \mathbf{u}).$$

Отримана ключова система рівнянь моделі (24), подана відносно вектора переміщення $\mathbf{u}$ і вектора пружного зміщення центра мас $\mathbf{\Pi}_M$, є базовою для опису приповерхневих явищ, які пов'язані з протіканням дисипативних процесів при переході системи від початкового природного стану до стаціонарного.

У зв'язку з цим задача про встановлення стаціонарного стану тіла $\mathcal{K}_*$, яке взаємодіє із зовнішнім середовищем $\mathcal{K}_*^+$, з урахуванням приповерхневих явищ зводиться до побудови розв'язку ключової системи рівнянь (24) за таких граничних умов:

$$\boldsymbol{\sigma}_n\big|_{\partial X_0} = -p^+\mathbf{n}, \qquad \mu\big|_{\partial X_0} = \mu^+. \tag{25}$$

Тут p^+, μ^+ – задані тиск і хімічний потенціал зовнішнього середовища.

2. Варіаційна постановка крайових задач. Для варіаційного формулювання крайових задач термомеханіки з урахуванням приповерхневих явищ за вихідний приймаємо функціонал

$$\begin{aligned} J\big[\mathbf{u},-\mathbf{\Pi}_M,e,\hat{\mathbf{e}}^{\mathrm{d}},(\boldsymbol{\nabla}_0\otimes\mathbf{u})^{\mathrm{a}},-\boldsymbol{\nabla}_0\cdot\mathbf{\Pi}_M\big] = \int\limits_{t_1}^{t_2}\Bigg\{\int\limits_{X_0}\big\{F(e,\hat{\mathbf{e}}^{\mathrm{d}},-\boldsymbol{\nabla}_0\cdot\mathbf{\Pi}_M)+ \\ +\Psi\big[\mathbf{u},(\boldsymbol{\nabla}_0\otimes\mathbf{u})^{\mathrm{a}},-\mathbf{\Pi}_M\big]-\mathbf{f}^+\cdot\mathbf{u}\big\}\,dV_0 - \\ -\int\limits_{\partial X_0}\big[\boldsymbol{\sigma}_n^+\cdot\mathbf{u}+(\mu^+-\mu_{(0)})\mathbf{n}\cdot(-\mathbf{\Pi}_M)\big]\,d\Sigma_0\Bigg\}\,dt. \end{aligned} \tag{26}$$

Перша варіація функціонала (26) є такою:

$$\begin{aligned} \delta J = \int\limits_{t_1}^{t_2}\Bigg\{\int\limits_{X_0}\Bigg\{\Big(\frac{\partial F}{\partial e}-\frac{1}{3}\sigma^*\Big)\delta e+\Big(\frac{\partial F}{\partial\hat{\mathbf{e}}^{\mathrm{d}}}-\hat{\boldsymbol{\sigma}}_0^{\mathrm{d}}\Big)\cdot\cdot\,\delta\hat{\mathbf{e}}^{\mathrm{d}}+\Big[\frac{\partial F}{\partial(-\boldsymbol{\nabla}_0\cdot\mathbf{\Pi}_M)}- \\ -(\mu-\mu_{(0)})\Big]\delta(-\boldsymbol{\nabla}_0\cdot\mathbf{\Pi}_M)+\Big[\frac{\partial\Psi}{\partial\mathbf{u}}-(\boldsymbol{\nabla}_0\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}}+\mathbf{f}^+)\Big]\cdot\delta\mathbf{u}+ \\ +\Big[\frac{\partial\Psi}{\partial(\boldsymbol{\nabla}_0\otimes\mathbf{u})^{\mathrm{a}}}-\hat{\boldsymbol{\sigma}}_*\Big]\cdot\cdot\,\delta[(\boldsymbol{\nabla}_0\otimes\mathbf{u})^{\mathrm{a}}]^{\top}+ \\ +\Big[\frac{\partial\Psi}{\partial(-\mathbf{\Pi}_M)}-\boldsymbol{\nabla}_0(\mu-\mu_{(0)})\Big]\cdot\delta(-\mathbf{\Pi}_M)\Bigg\}\,dV_0+ \\ +\int\limits_{\partial X_0}(\boldsymbol{\sigma}_n-\boldsymbol{\sigma}_n^+)\cdot\delta\mathbf{u}\,d\Sigma_0+\int\limits_{\partial X_0}(\mu-\mu^+)\mathbf{n}\cdot\delta(-\mathbf{\Pi}_M)\,d\Sigma_0\Bigg\}\,dt. \end{aligned} \tag{27}$$

При цьому тензор напружень $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ подано як суму кульової, девіаторної та антисиметричної складових:

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{3}\sigma^*\hat{\boldsymbol{I}}+\hat{\boldsymbol{\sigma}}_0^{\mathrm{d}}+\hat{\boldsymbol{\sigma}}_*.$$

Необхідною умовою мінімуму вихідного функціонала (26) є рівність нулеві його першої варіації:

$$\delta J\big[\mathbf{u},-\mathbf{\Pi}_M,e,\hat{\mathbf{e}}^{\mathrm{d}},(\boldsymbol{\nabla}_0\otimes\mathbf{u})^{\mathrm{a}},-\boldsymbol{\nabla}_0\cdot\mathbf{\Pi}_M\big]=0.$$

Якщо врахувати незалежність варіацій $\delta\mathbf{u}$, $\delta(-\mathbf{\Pi}_M)$, δe, $\delta\hat{\mathbf{e}}^{\mathrm{d}}$, $\delta[(\boldsymbol{\nabla}_0\otimes\mathbf{u})^{\mathrm{a}}]^{\top}$, $\delta(-\boldsymbol{\nabla}_0\cdot\mathbf{\Pi}_M)$, то з необхідної умови мінімуму функціонала (27) отримаємо:

– *визначальні співвідношення локального стану*

$$\sigma^* = 3\frac{\partial F(e,\hat{\mathbf{e}}^{\mathrm{d}},-\boldsymbol{\nabla}_0\cdot\boldsymbol{\Pi}_M)}{\partial e},\qquad \hat{\boldsymbol{\sigma}}_0^{\mathrm{d}} = \frac{\partial F(e,\hat{\mathbf{e}}^{\mathrm{d}},-\boldsymbol{\nabla}_0\cdot\boldsymbol{\Pi}_M)}{\partial \hat{\mathbf{e}}^{\mathrm{d}}},$$

$$\mu-\mu_{(0)} = \frac{\partial F(e,\hat{\mathbf{e}}^{\mathrm{d}},-\boldsymbol{\nabla}_0\cdot\boldsymbol{\Pi}_M)}{\partial(-\boldsymbol{\nabla}_0\cdot\boldsymbol{\Pi}_M)}; \tag{28}$$

– *визначальні співвідношення для дисипативних процесів*

$$\boldsymbol{\nabla}_0\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}}+\mathbf{f}^{+} = \frac{\partial\Psi\left[\mathbf{u},(\boldsymbol{\nabla}_0\otimes\mathbf{u})^{\mathrm{a}},-\boldsymbol{\Pi}_M\right]}{\partial\mathbf{u}},\qquad \hat{\boldsymbol{\sigma}}_* = \frac{\partial\Psi\left[\mathbf{u},(\boldsymbol{\nabla}_0\otimes\mathbf{u})^{\mathrm{a}},-\boldsymbol{\Pi}_M\right]}{\partial(\boldsymbol{\nabla}_0\otimes\mathbf{u})^{\mathrm{a}}},$$

$$\boldsymbol{\nabla}_0(\mu-\mu_{(0)}) = \frac{\partial\Psi\left[\mathbf{u},(\boldsymbol{\nabla}_0\otimes\mathbf{u})^{\mathrm{a}},-\boldsymbol{\Pi}_M\right]}{\partial(-\boldsymbol{\Pi}_M)}, \tag{29}$$

та відповідні граничні умови (25) на поверхні тіла.

На основі отриманих визначальних співвідношень локального стану (28) і дисипативних процесів (29) одержуємо такі диференціальні 1-форми:

$$dF = \frac{1}{3}\sigma^* de+\hat{\boldsymbol{\sigma}}_0^{\mathrm{d}}\cdot\cdot\, d\hat{\mathbf{e}}^{\mathrm{d}}+(\mu-\mu_{(0)})d(-\boldsymbol{\nabla}_0\cdot\boldsymbol{\Pi}_M), \tag{30}$$

$$d\Psi = (\boldsymbol{\nabla}_0\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}}+\mathbf{f}^{+})\cdot d\mathbf{u}+\hat{\boldsymbol{\sigma}}_*\cdot\cdot\, d\left[(\boldsymbol{\nabla}_0\otimes\mathbf{u})^{\mathrm{a}}\right]^{\top}+\boldsymbol{\nabla}_0(\mu-\mu_{(0)})\cdot d(-\boldsymbol{\Pi}_M), \tag{31}$$

які є повними диференціалами для вільної енергії $F = F(e,\hat{\mathbf{e}}^{\mathrm{d}},-\boldsymbol{\nabla}_0\cdot\boldsymbol{\Pi}_M)$ і дисипативного потенціалу $\Psi = \Psi\left[\mathbf{u},(\boldsymbol{\nabla}_0\otimes\mathbf{u})^{\mathrm{a}},-\boldsymbol{\Pi}_M\right]$ відповідно.

Якщо в диференціальній 1-формі (31) антисиметричним тензорам $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_*$ і $(\boldsymbol{\nabla}_0\otimes\mathbf{u})^{\mathrm{a}}$ поставити у відповідність еквівалентні супутні вектори (16), (17), то одержуємо таку диференціальну 1-форму для опису дисипативних процесів:

$$d\Psi = (\boldsymbol{\nabla}_0\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}}+\mathbf{f}^{+})\cdot d\mathbf{u}-\boldsymbol{\sigma}_*\cdot d\boldsymbol{\varphi}+\boldsymbol{\nabla}_0(\mu-\mu_{(0)})\cdot d(-\boldsymbol{\Pi}_M). \tag{32}$$

Зазначимо, що отримані тут диференціальні 1-форми для вільної енергії (30) і дисипативного потенціалу (32) відповідають одержаним раніше (12) і (18) на основі енергетичного та термодинамічного підходів.

Достатньою умовою мінімуму функціонала (26) є умова його опуклості

$$\delta^2 J = \int_{t_1}^{t_2}\left\{\int_{\partial X_0}\left[\delta\boldsymbol{\sigma}_n\cdot\delta\mathbf{u}+\delta\mu\mathbf{n}\cdot\delta(-\boldsymbol{\Pi}_M)\right]d\Sigma_0\right\}dt>0.$$

Цю умову можна подати ще так:

$$\delta^2 J = \int_{t_1}^{t_2}\left\{\int_{X_0}\left[\frac{1}{3}\delta\sigma^*\delta e+\delta\hat{\boldsymbol{\sigma}}_0^{\mathrm{d}}\cdot\cdot\,\delta\hat{\mathbf{e}}^{\mathrm{d}}+\delta\mu\,\delta(-\boldsymbol{\nabla}_0\cdot\boldsymbol{\Pi}_M)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+(\boldsymbol{\nabla}_0\cdot\delta\hat{\boldsymbol{\sigma}})\cdot\delta\mathbf{u}-\delta\hat{\boldsymbol{\sigma}}_*\cdot\cdot\,\delta(\boldsymbol{\nabla}_0\otimes\mathbf{u})^{\mathrm{a}}+\delta\boldsymbol{\nabla}_0\mu\cdot\delta(-\boldsymbol{\Pi}_M)\right]dV_0\right\}dt\equiv$$

$$\equiv\int_{t_1}^{t_2}\left\{\int_{X_0}\left[\delta^2F(e,\hat{\mathbf{e}}^{\mathrm{d}},-\boldsymbol{\nabla}_0\cdot\boldsymbol{\Pi}_M)+\delta^2\Psi\left(\mathbf{u},(\boldsymbol{\nabla}_0\otimes\mathbf{u})^{\mathrm{a}},-\boldsymbol{\Pi}_M\right)\right]dV_0\right\}dt>0.$$

За достатні умови опуклості функціонала (26) можна прийняти, зокрема, наступні:

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[\int_{X_0}\delta^2F(e,\hat{\mathbf{e}}^{\mathrm{d}},-\boldsymbol{\nabla}_0\cdot\boldsymbol{\Pi}_M)dV_0\right]dt>0,$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\left\{\int_{X_0}\delta^2\Psi\left[\mathbf{u},(\boldsymbol{\nabla}_0\otimes\mathbf{u})^{\mathrm{a}},-\boldsymbol{\Pi}_M\right]dV_0\right\}dt>0. \tag{33}$$

Визначальні фізичні співвідношення (28), рівняння для дисипативних процесів (29) і граничні умови (25), а також достатні умови опуклості функціонала (33) складають повну систему співвідношень математичної моделі механіки дисипативних пружних систем з урахуванням приповерхневих явищ.

2.1. Варіаційне формулювання крайових задач без урахування пружного зміщення центра мас **($\mathbf{\Pi}_M = 0$).** З метою варіаційного формулювання крайових задач механіки пружних систем без урахування приповерхневих явищ за вихідний приймаємо функціонал

$$J_1\left[\mathbf{u}, e, \hat{\mathbf{e}}^{\mathrm{d}}, (\nabla_0 \otimes \mathbf{u})^{\mathrm{a}}\right] = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_{X_0} \left\{ F(e, \hat{\mathbf{e}}^{\mathrm{d}}) + \Psi\left[\mathbf{u}, (\nabla_0 \otimes \mathbf{u})^{\mathrm{a}}\right] - \mathbf{f}^{+} \cdot \mathbf{u} \right\} dV_0 - \right.$$

$$\left. - \int_{\partial X_0} (\boldsymbol{\sigma}_n^{+} \cdot \mathbf{u})\, d\Sigma_0 \right\} dt\,. \tag{34}$$

Першу варіацію функціонала (34) запишемо так:

$$\delta J_1\left[\mathbf{u}, e, \hat{\mathbf{e}}^{\mathrm{d}}, (\nabla_0 \otimes \mathbf{u})^{\mathrm{a}}\right] = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_{X_0} \left\{ \left(\frac{\partial F}{\partial e} - \frac{1}{3}\sigma \right) \delta e + \right.\right.$$

$$+ \left(\frac{\partial F}{\partial \hat{\mathbf{e}}^{\mathrm{d}}} - \hat{\boldsymbol{\sigma}}_0^{\mathrm{d}} \right) \cdot\cdot\, \delta \hat{\mathbf{e}}^{\mathrm{d}} + \left[\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{u}} - (\nabla_0 \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{f}^{+}) \right] \cdot \delta \mathbf{u} +$$

$$\left. + \left[\frac{\partial \Psi}{\partial (\nabla_0 \otimes \mathbf{u})^{\mathrm{a}}} - \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{*} \right] \cdot\cdot\, \delta\left[(\nabla_0 \otimes \mathbf{u})^{\mathrm{a}} \right]^{\top} \right\} dV_0 +$$

$$\left. + \int_{\partial X_0} (\boldsymbol{\sigma}_n - \boldsymbol{\sigma}_n^{+}) \cdot \delta \mathbf{u}\, d\Sigma_0 \right\} dt\,.$$

З необхідної умови мінімуму вихідного функціонала (34):

$$\delta J_1\left[\mathbf{u}, e, \hat{\mathbf{e}}^{\mathrm{d}}, (\nabla_0 \otimes \mathbf{u})^{\mathrm{a}}\right] = 0\,,$$

а також з урахуванням незалежності допустимих варіацій $\delta\mathbf{u}$, δe, $\delta\hat{\mathbf{e}}^{\mathrm{d}}$, $\delta\left[(\nabla_0 \otimes \mathbf{u})^{\mathrm{a}}\right]^{\top}$ отримаємо систему співвідношень математичної моделі механіки з урахуванням дисипативних процесів:

– *визначальні співвідношення локального стану*

$$\sigma = 3\frac{\partial F(e, \hat{\mathbf{e}}^{\mathrm{d}})}{\partial e}, \qquad \hat{\boldsymbol{\sigma}}_0^{\mathrm{d}} = \frac{\partial F(e, \hat{\mathbf{e}}^{\mathrm{d}})}{\partial \hat{\mathbf{e}}^{\mathrm{d}}}\,; \tag{35}$$

– *визначальні співвідношення для опису дисипативних процесів*

$$\nabla_0 \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{f}^{+} = \frac{\partial \Psi\left[\mathbf{u}, (\nabla_0 \otimes \mathbf{u})^{\mathrm{a}}\right]}{\partial \mathbf{u}}, \qquad \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{*} = \frac{\partial \Psi\left[\mathbf{u}, (\nabla_0 \otimes \mathbf{u})^{\mathrm{a}}\right]}{\partial (\nabla_0 \otimes \mathbf{u})^{\mathrm{a}}}\,; \tag{36}$$

– *граничну умову на поверхні тіла*

$$\boldsymbol{\sigma}_n\big|_{\partial X_0} = \boldsymbol{\sigma}_n^{+}. \tag{37}$$

Із отриманих співвідношень (35), (36) випливають диференціальні 1-форми

$$dF = \frac{1}{3}\sigma de + \hat{\boldsymbol{\sigma}}_0^{\mathrm{d}} \cdot\cdot\, d\hat{\mathbf{e}}^{\mathrm{d}}\,,$$

$$d\Psi = (\nabla_0 \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{f}^{+}) \cdot d\mathbf{u} - \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{*} \cdot\cdot\, d(\nabla_0 \otimes \mathbf{u})^{\mathrm{a}}\,,$$

які є повними диференціалами відповідно функцій $F = F(e, \hat{\mathbf{e}}^{\mathrm{d}})$ і $\Psi = \Psi\left[\mathbf{u}, (\nabla_0 \otimes \mathbf{u})^{\mathrm{a}}\right]$.

За достатні умови опуклості функціонала (34) можна прийняти наступні умови:

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[\int_{X_0}\delta^2 F(e,\hat{\mathbf{e}}^{\mathrm{d}})dV_0\right]dt>0\,,$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\left\{\int_{X_0}\delta^2\Psi\left[\mathbf{u},(\boldsymbol{\nabla}_0\otimes\mathbf{u})^{\mathrm{a}}\right]dV_0\right\}dt>0\,. \qquad (38)$$

На основі варіаційного підходу для ізотермічних процесів отримано співвідношення локального термодинамічного стану (35), відповідні для опису дисипативних процесів (36), а також граничну умову на поверхні тіла (37). Сформульовано достатні умови опуклості функціонала (38). Зауважимо, що вільна енергія $F=F(e,\hat{\mathbf{e}}^{\mathrm{d}})$ у випадку ізотермічних умов є пружною складовою енергії деформування.

Висновки. У рамках енергетичного та термодинамічного підходів запропоновано математичну модель термомеханіки, яка дає змогу описувати формування приповерхневих явищ, яке пов'язується як з процесом пружного зміщення центрів мас, так і з дисипативними процесами переходу системи від початкового природного до стаціонарного стану. На цій основі отримано рівняння локального термодинамічного стану та відповідні рівняння для дисипативних процесів. При цьому враховано параметричну залежність фізичних співвідношень від параметрів природного початкового стану. Сформульовано варіаційну постановку відповідних крайових задач з урахуванням приповерхневих явищ, а також встановлено достатні умови опуклості запропонованого функціонала.

Одержані результати є базовими для розробки алгоритмів і схем як наближеного, так і аналітичного розв'язування крайових задач механіки пружних систем з урахуванням ефектів приповерхневої неоднорідності.

1. *Бурак Я. И., Мороз Г. И.* О вариационной постановке краевых задач теории упругости с учетом внутренних степеней свободы // Избранные проблемы прочности современного машиностроения: Сб. науч. статей, посвященный 85-летию чл.-кор. Рос. Акад. наук Эдуарда Ивановича Григолюка (1923–2005). – Москва: Физматлит, 2008. – С. 80–87.
2. *Бурак Я. И., Мороз Г. И.* Энергетический подход к формулированию краевых задач нелинейной термомеханики упругих систем // Прикл. механика. – 2005. – **41,** № 9. – С. 52–59.
3. *Бурак Я. Й.* Визначальні співвідношення локально градієнтної термомеханіки // Доп. АН УРСР. Серія А. – 1987. – № 12. – С. 19–23.
4. *Бурак Я. Й.* Локально градієнтні моделі термопружності для тіл з мікродефектами // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1996. – **32,** № 2. – С. 15–23.
5. *Бурак Я. Й., Мороз Г. І., Бойко З. В.* Математичне моделювання та оптимізація термопружних систем на основі поєднання енергетичного та термодинамічного підходів // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2008. – **51,** № 4. – С. 129–135.
6. *Бурак Я. Й., Чапля Є. Я.* Про термодинамічні аспекти приповерхневих явищ у термопружних системах // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2006. – **42,** № 1. – С. 39–44.

   Те саме: *Burak Ya. I., Chaplya E. Ya.* Thermodynamic aspects of subsurface phenomena in thermoelastic systems // Materials Science. – 2006. – **42,** No 1. – P. 34–41.
7. *Бурак Я. Й., Чапля Є. Я., Кондрат В. Ф., Грицина О. Р.* Математичне моделювання термомеханічних процесів у пружних тілах із врахуванням локального зміщення маси // Доп. НАН України. – 2007. – № 6. – С. 45–49.
8. *Гиббс Дж. В.* Термодинамика. Статистическая механика. – Москва: Наука, 1982. – 584 с.
9. *Гріффітс А. А.* Явища розриву і течіння в твердих тілах // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1993. – **29**, № 3. – С. 13–42.
10. *Де Гроот С., Мазур П.* Неравновесная термодинамика. – Москва: Мир, 1964. – 456 с.

11. *Третьяченко Г. Н., Карпинос Б. С.* Прочность и долговечность материалов при циклических тепловых воздействиях. – Киев: Наук. думка, 1990. – 256 с.
12. *Третьяченко Г. Н., Карпинос Б. С., Барило В. Г.* Разрушение материалов при циклических нагревах. – Киев: Наук. думка, 1993. – 288 с.
13. *Chowdhury K. L., Glockner P. G.* On thermoelastic dielectrics // Int. J. Solids Struct. – 1977. –**13**. – P. 1173–1182.
14. *Maugin G. A.* Nonlocal theories or gradient-type theories: A matter of convenience? // Arch. Mech. – 1979. – **31**. – P. 15–26.
15. *Mindlin R. D.* Elasticity, piezoelectricity and crystal lattice dynamics // J. of Elasticity. – 1972. – **2**, No. 4. – P. 217–282.
16. *Nowacki W.* Efekty elektromagnetyczne w stałych ciałach odkształcalnych. – Warszawa: PWN, 1983. –160 s.
17. *Suhubi E. S.* Elastic dielectrics with polarization gradients // Int. J. Eng. Sci. – 1969. – **7**. – P. 993–997.

ОБ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОМ ПОДХОДЕ И ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИХ НАЧАЛАХ ВАРИАЦИОННОЙ ФОРМУЛИРОВКИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ТЕРМОМЕХАНИКИ С УЧЕТОМ ПРИПОВЕРХНОСТНЫХ ЯВЛЕНИЙ

В рамках энергетического, термодинамического и вариационного подходов предложена математическая модель доя описания термомеханических процессов в упругих деформируемых системах с учетом диссипативных эффектов в процессе формирования приповерхностных явлений. На основании объединения энергетического и термодинамического подходов получены соотношения как для локального термодинамического состояния, так и для описания диссипативных процессов. С использованием вариационного подхода построен функционал, из условий минимизации которого получены вышеупомянутые соотношения локального термодинамического состояния и описания диссипативных процессов, а также естественные граничные условия. Сформулированы достаточные условия выпуклости функционала.

ON ENERGETIC APPROACH AND THERMODYNAMIC FOUNDATIONS OF VARIATIONAL FORMULATION OF THERMOMECHANICS BOUNDARY-VALUE PROBLEMS WITH TAKING INTO ACCOUNT NEAR-SURFACE PHENOMENA

Within the energetic, thermodynamic and variational approaches a mathematical model for description of thermomechanical processes in elastic deformable systems with taking into account dissipative effects at forming the near-surface phenomena is proposed. On the basis of combination of energetic and thermodynamic approaches the equations of local thermodynamic state and also for description of dissipative processes are obtained. Using the variational approach a functional is constructed. From the conditions of minimization of this functional the above-mentioned equations of the local thermodynamic state and dissipative processes and also natural boundary conditions are obtained. The sufficient conditions of functional convexity are formulated.

Центр мат. моделювання
Ін-ту прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
19.02.09