

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ, ОСНОВАННЫЕ НА СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ С НЕКАРЛЕМАНОВСКИМ СДВИГОМ. АНАЛИЗ РАЗРЕШИМОСТИ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ

Рассмотрены примеры систем, функциональность которых может быть описана с помощью математических моделей, основанных на сингулярных интегральных уравнениях с некарлемановским сдвигом. Для такого типа уравнений получена оценка размерности ядра соответствующего оператора и предложены численные методы как для оценки размерности ядра, так и для построения решений.

В настоящее время сингулярные интегральные уравнения используются для решения прикладных задач самой различной направленности [8–10]. Сингулярные интегральные уравнения с некарлемановским сдвигом, являясь представителями отдельного класса уравнений, позволяют описать поведение различных линейных систем специального вида. Полученные результаты включают методику построения таких моделей, исследование вопросов разрешимости соответствующих уравнений и численные методы для оценки размерности ядра и построения решений.

В предлагаемой статье рассмотрим примеры систем, функциональность которых может быть описана с помощью сингулярных интегральных уравнений с некарлемановским сдвигом, а также приведем результаты, позволяющие исследовать разрешимость этих уравнений и построить приближенные решения.

1. Обозначения и определения. Введем операторы следующего вида:

$$(\Lambda_{\tau}^{+}\varphi)(t) = \varphi(t)\theta(t - \tau), \quad (\Lambda_{\tau}^{-}\varphi)(t) = \varphi(t)(1 - \theta(t - \tau)),$$

где $\theta(t)$ – функция Хэвисайда. Для $\forall \varphi(t) \in L_2(\mathbb{R})$ справедливо [3]:

$$F\Lambda_{\tau}^{+}\varphi = e^{-i\omega\tau}P_{+}e^{+i\omega\tau}F\varphi, \quad F\Lambda_{\tau}^{-}\varphi = e^{-i\omega\tau}P_{-}e^{+i\omega\tau}F\varphi.$$

Свойства таких операторов более подробно описаны в [1]. Здесь F – оператор преобразования Фурье; P_{+} и P_{-} – ортогональные проекторы:

$$P_{\pm} = \frac{1}{2}(J \pm S),$$

J – тождественный оператор; S – оператор сингулярного интегрирования:

$$(S\varphi)(t) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau.$$

Введем также оператор некарлемановского сдвига U на Γ :

$$(U\varphi)(t) = \varphi(\alpha(t))|\alpha'(t)|^{1/2},$$

$\alpha(t)$ – некоторый диффеоморфизм окружности Γ на себя.

Неподвижной точкой кратности k сдвига $\alpha(t)$ называется такая точка $\tau \in \Gamma$, для которой справедливо: $\alpha_k(\tau) = \tau$, $\alpha_j(\tau) \neq \tau$, $j < k$.

Сдвигом Карлемана называется сдвиг, для которого существует такое число $k > 1$, что $\alpha_k(t) = t$ для любого $t \in \Gamma$.

Сдвиги, для которых это условие не выполняется, будем называть *некарлемановскими сдвигами (НКС)*. В настоящей работе будем рассматривать сохраняющие ориентацию НКС с конечным числом неподвижных точек первой кратности.

Сдвиги вида $\alpha(t) = \frac{at + b}{bt + a}$ будем называть *дробно-линейными сдвигами*.

ми.

Введем T – сингулярный интегральный оператор со сдвигом в пространстве $L_2(\Gamma)$:

$$T = J - cUP_+.$$

Уравнение

$$T\varphi \equiv J - cUP_+\varphi = \psi, \quad (1)$$

является основой для рассматриваемых математических моделей. Теория таких уравнений для различного вида коэффициентов $c(t)$ является предметом активных исследований [4, 7].

2. Использование сингулярных интегральных уравнений с некарлемановским сдвигом в моделях линейных систем. Эффективность использования сингулярных интегральных уравнений (СИУ) с НКС для моделирования физических процессов обусловлена соответствующими особенностями исследуемых процессов. Скачкообразное изменение во времени определенных параметров системы (импульсной характеристики, свойств зондирующего сигнала и т.д.) описывается с помощью операторов сингулярного интегрирования. В свою очередь, поведение отдельных компонентов системы, приводящее к линейным трансформациям аргумента во временной или в частотной области, отражается с помощью оператора НКС.

Задача дистанционного исследования поверхностей. Рассмотрим следующий физический процесс. Пусть зондирующий сигнал $s(t)$, отражаясь от некоторого объекта с импульсной характеристикой $h(t)$, порождает эхо-сигнал $g(t)$.

Поставим в соответствие этому процессу уравнение типа свертки в пространстве $L_2(\mathbb{R})$:

$$h * s = g.$$

Поскольку в природе реальные объекты не имеют абсолютно гладких поверхностей, будем рассматривать импульсную характеристику $h(t)$ как сумму двух составляющих (см. рис. 1):

$$h(t) = h_c(t) + h_d(t),$$

где $h_c(t)$ – когерентная составляющая, которая характеризует отражение сигналов от объекта соответствующей формы, но с абсолютно гладкой поверхностью; $h_d(t)$ – диффузная составляющая, которая характеризует влияние структуры поверхности объекта на формирование эхо-сигналов.

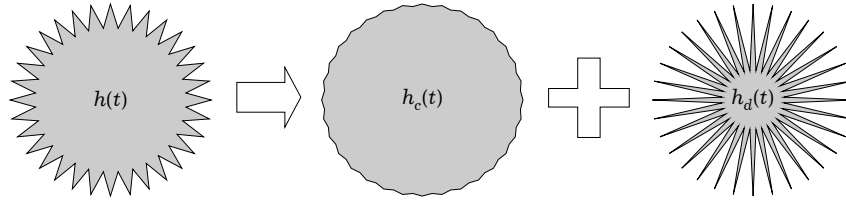


Рис. 1

Будем использовать зондирующие сигналы специального вида (частотно-манипулированный сигнал):

$$s(t) = a_-(t)e^{i\omega_-t} + a_+(t)e^{i\omega_+t},$$

где $a(t) = a_-(t) + a_+(t)$ – модулирующий сигнал, $a_-(t) = 0$ при $t < 0$, $a_+(t) = 0$ при $t \geq 0$.

Используя известные [5] свойства процесса формирования эхо-сигналов, выберем частоты ω_- и ω_+ такими, что справедливы следующие условия:

$$\|a_+(t)e^{i\omega_+t} * h_c\| < \varepsilon, \quad \|a_-(t)e^{i\omega_-t} * h_d\| < \varepsilon,$$

ε – погрешность метода.

Для таких зондирующих сигналов эхо сигнал содержит «несмешанную» информацию об обеих компонентах импульсной характеристики.

С использованием введенных обозначений имеем

$$h_c(t) * \Lambda_0^- [a_-(t)e^{i\omega_- t}] + h_d(t) * \Lambda_0^+ [a_+(t)e^{i\omega_+ t}] = g.$$

Применив к этому уравнению преобразование Фурье и, воспользовавшись свойствами операторов Λ_τ^+ и Λ_τ^- , получим следующее сингулярное интегральное уравнение, описывающее процесс формирования эхо-сигналов:

$$h_c(\omega)a_-(\omega - \omega_-) + h_d(\omega)a_+(\omega - \omega_+) = g.$$

В операторной форме это уравнение будет выглядеть следующим образом:

$$(h_c U_- P_- + h_d U_+ P_+)a = g,$$

где U_- и U_+ – операторы соответствующих дробно-линейных некарлемановских сдвигов.

Заметим, что это уравнение легко преобразуется к уравнению вида (1).

Полученное уравнение можно решать как относительно h_c и h_d в задаче декомпозиции импульсной характеристики, так и относительно a в задаче синтеза сигнала. Решение задачи декомпозиции импульсной характеристики подробно рассмотрено в [2].

Локация движущихся объектов. В случае, когда объект движется относительно приемника, вследствие эффекта Доплера возникает сдвиг частоты в уравнении, описывающем процесс формирования эхо-сигнала. Рассмотрим случай, когда в системе постоянно присутствует неподвижный объект с импульсной характеристикой $h(t)$, а в момент времени $t = 0$ в ней появляется движущийся объект с импульсной характеристикой $h_0(t)$. Получаем уравнение

$$h * s + U(h_0 * \Lambda_0^+ s) = g.$$

Применив к нему преобразование Фурье, запишем

$$(hJ + Uh_0P_+)s = g,$$

откуда

$$(hJ + h_0(\alpha)UP_+)s = g,$$

что также приводит к уравнению вида (1).

3. Оценка размерности ядра оператора T . Результаты, приведенные в этом разделе, позволяют получить оценки размерности ядра исследуемого оператора для широкого класса коэффициентов $c(t)$ [6].

Теорема 1. Для любой функции $c(t) \in C(\Gamma)$ такой, что $|c(\tau_k)| < \gamma < 1$, τ_k – неподвижные точки сдвига α , $k = 1, \dots, p$, существует $r(t)$ – многочлен степени n с корнями λ_k , $k = 1, \dots, n$, $r(t) = \prod_1^n (t - \lambda_k)$, для которого справедливо

$$|\lambda_k| > 1, \quad k = 1, \dots, n, \quad \lambda_k \neq \lambda_\ell \quad \forall k, \quad \ell : k \neq \ell,$$

$$\left| \frac{rc}{r(\alpha)} \right|_{C(\Gamma)} < 1.$$

Теорема 2. Пусть степень многочлена $r(t)$ равна n . Тогда $\dim \ker T < n$.

Необходимо отметить, что эти результаты справедливы и для случая матричного уравнения.

Теорема 3. В случае, когда оператор U является оператором дробно-линейного сдвига с двумя неподвижными точками, справедлива следующая оценка размерности ядра оператора T :

$$\dim \ker T \leq \text{int} \left[1 - \frac{\ln(M)}{\ln(Q)} \right],$$

где $M = |c(t)|_{C(\Gamma)} > 1$, $Q = \max_{t \in \Gamma} \left| \frac{t - \lambda}{\gamma(t) - \lambda} \right|$, λ – некоторое действительное

число, $\lambda \leq -1$; $\gamma(t)$ – дробно-линейный сдвиг $\gamma(t) = \beta(\alpha(\beta_{-1}(t)))$, у которого обе неподвижные точки лежат на действительной оси и точка $\tau_1 = 1$ является точкой сгущения.

Теорема 4. Пусть в уравнении (1) U – оператор дробно-линейного сдвига, $c = P_+ c$ (полюса функции c лежат вне единичного круга). Тогда

$$\dim \ker T = 0.$$

4. Приближенные методы оценки размерности ядра оператора T .

Введем следующие обозначения: E – единичная матрица; V_r – матрица Вандермонда, составленная из корней λ_k многочлена $r(t)$,

$$V_r = \begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \dots & \lambda_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad G_r = \begin{vmatrix} (P_- g_0)(\lambda_1) & \dots & (P_- g_{n-1})(\lambda_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (P_- g_0)(\lambda_n) & \dots & (P_- g_{n-1})(\lambda_n) \end{vmatrix},$$

где $g_k(t) = N^{-1}t^k$, $N = J - aUP_+$, $a(t) = \frac{rc}{r(\alpha)}$.

Теорема 5. Справедлива следующая оценка размерности ядра оператора T :

$$\dim \ker T \leq n - \text{rang}(V_r - G_r).$$

Теорема 6. Для того чтобы $\dim \ker T = 0$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\det(V_r - G_r) \neq 0.$$

5. Приближенные методы решения уравнения. Метод, основанный на решении СЛАУ. В случае пустого ядра поиск корней сводится к решению СЛАУ

$$A\bar{\rho} = (G_r - V_r)\bar{\rho} = \bar{u},$$

\bar{u} – вектор, содержащий значения функции $P_- N^{-1}u$ в точках λ_k . Искомая функция $\varphi(t)$ связана с многочленом $\rho(t)$ следующим образом:

$$\varphi = P_- N^{-1}u + r^{-1}P_+ N^{-1}\psi + \rho r^{-2}.$$

Оценка погрешности:

$$\frac{\|\sigma\bar{\rho}\|}{\|\bar{\rho}\|} \leq v(\tilde{A}) \frac{\frac{\|\sigma\bar{u}\|}{\|\tilde{u}\|} + \frac{\|\sigma A\|}{\|\tilde{A}\|}}{1 - v(A) \frac{\|\sigma\bar{u}\|}{\|\tilde{u}\|}}.$$

Итерационный приближенный метод. Выполнив соответствующие преобразования, запишем

$$(rP_- + (J - aU)P_+)\psi = g.$$

Теперь решим итерационным методом следующее уравнение с обратимым оператором:

$$(P_- + (J - aU)P_+)\varphi = g,$$

$$\varphi_0 = 0,$$

$$\varphi_{k+1} = g - aUP_+\varphi_k.$$

Решение исходного уравнения будет следующим:

$$\psi_- = r^{-1}(\varphi_- - \mu_-), \quad \psi_+ = \varphi_+.$$

6. Выводы. Для математических моделей, основанных на сингулярных интегральных уравнениях с некарлемановским сдвигом, разработан математический аппарат, позволяющий, в свою очередь, построить численные методы для анализа разрешимости соответствующих уравнений и получения решений. Одним из очевидных применений приведенных результатов является решение задач синтеза сигналов в локации.

1. Батырев А. А. Сингулярные интегральные уравнения в задачах синтеза сигналов // Крайові задачі диференц. рівнянь: Зб. наук. пр. – Чернівці: Чернів. нац. ун-т ім. Федьковича, 2005. – Вип. 4. – С. 17–26.
2. Батырев А. А. Сингулярные интегральные уравнения с некарлемановским сдвигом в математических моделях линейных систем со специальными импульсными характеристиками // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2006. – Вип. 4. – С. 54–58.
3. Гахов Ф. Д., Черский Ю. И. Уравнения типа свертки. – Москва: Наука, 1978. – 296 с.
4. Литвинчук Г. С. Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом. – Москва: Наука, 1977. – 448 с.
5. Скина М. И., Холопцев А. В., Батырев А. А. Акустическое зондирование в исследованиях процессов энергомассообмена на границах областей перемешанной жидкости в океане. – Севастополь, 1995. – 52 с. – (Препр. / НАН Украины. Морской гидрофиз. ин-т).
6. Baturev A., Kravchenko V., Litvinchuk G. Approximate methods for singular integral equations with a non-Carleman shift // J. Integral Equat. and Appl. – 1996. – 8, No. 1. – P. 1–17.
7. Litvinchuk G. S. Solvability theory of boundary-value problems and singular integral equations with shift. – Boston: Kluwer Acad. Publ., 2000. – 378 p. – (Ser. Math. and its Appl. – Vol. 523.)
8. Manam S. R. A note on a singular integral equation arising in water wave scattering // J. Appl. Math. – 2004. – 69, No. 5. – P. 483–491.
9. Nickelson L., Shugurov V. Singular integral equations' methods for the analysis of microwave structures. – Leiden-Boston: VSP Int. Sci. Publishers, 2005. – 348 p.
10. Rungamornrat J., Mear M. E. Analysis of fractures in 3D piezoelectric media by a weakly singular integral equation method // Int. J. Fract. – 2008. – 151, No. 1. – P. 1–27.

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ, ЩО БАЗУЮТЬСЯ НА СИНГУЛЯРНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯННЯХ З НЕКАРЛЕМАНІВСЬКИМ ЗСУВОМ. АНАЛІЗ РОЗВ'ЯЗНОСТІ ТА ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

Розглянуто приклади систем, функціональність яких може бути описана за допомогою математичних моделей, що базуються на сингулярних інтегральних рівняннях з некарлеманівським зсувом. Для такого типу рівнянь отримано оцінку розмірності ядра відповідного оператора та запропоновано чисельні методи як стосовно оцінки розмірності ядра, так і стосовно побудови розв'язків.

MATHEMATICAL MODELS BASED ON SINGULAR INTEGRAL EQUATIONS WITH NON-CARLEMAN SHIFT. SOLVABILITY ANALYSIS AND NUMERICAL METHODS OF SOLUTION

The examples of systems, which functionality can be described using the mathematical models based on singular integral equations with non-Carleman shift were considered. For this type of equations estimates of dimension of the kernel of operator were obtained, numerical methods for estimating the dimension of the kernel and for constructing the solutions were proposed.

Отд-ние гидроакустики
Морского гидрофиз. ин-та НАН Украины, Одесса

Получено
23.04.09