УДК 519.614

Л. П. Процах, П. О. Савенко

МЕТОДИ НЕЯВНИХ ФУНКЦІЙ ПРИ РОЗВ'ЯЗУВАННІ ДВОПАРАМЕТРИЧНИХ ЛІНІЙНИХ СПЕКТРАЛЬНИХ ЗАДАЧ

Розглядається метод розв'язування лінійних двопараметричних спектральних алгебраїчних задач, в основу якого покладаються методи неявних функцій. Застосування методів неявних функцій дає можливість визначити властивості і структуру існуючого спектра та знайти весь спектр, що міститься в деякій обмеженій опуклій множині простору $\mathbb{C}^2$ або $\mathbb{R}^2$.

1. Вступ. Лінійні й нелінійні багатопараметричні задачі на власні значення виникають у багатьох галузях аналізу та математичної фізики [5, 9, 10]. Найбільш повно досліджені й побудовані чисельні методи знаходження розв'язків для однопараметричних задач [11–13].

У цій роботі пропонується новий метод розв'язування двопараметричних лінійних спектральних задач, який ґрунтується на застосуванні теорії неявних функцій. Це дає можливість не тільки обґрунтувати існування зв'язних компонент спектра, а й знаходити ці компоненти шляхом чисельного розв'язування відповідної задачі Коші для диференціального рівняння першого порядку.

2. Розглянемо лінійну двопараметричну алгебраїчну задачу на власні значення

$$Az = \lambda_1 Bz + \lambda_2 Cz \,, \tag{1}$$

де A, B, C – квадратні матриці n-го порядку. Необхідно знайти спектр цієї задачі, що належить деякій обмеженій опуклій множині $\mathbf{\Lambda} = \Lambda_1 \times \Lambda_2 \subset \mathbb{C}^2$, тобто знайти множину пар власних значень $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbf{\Lambda}$ (або $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbf{\Lambda} \subset \mathbb{R}^2$), і при кожній фіксованій точці спектра $\boldsymbol{\lambda}^{(0)} = (\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)})$ знайти відповідні їй власні вектори $z \neq 0$.

Задачу (1) подамо у вигляді

$$\mathscr{A}(\lambda_1, \lambda_2) z \equiv \left(A - \lambda_1 B - \lambda_2 C\right) z = 0 \,, \tag{2}$$

де $\mathscr{A}(\lambda_1, \lambda_2)$ – матрична функція, лінійно залежна від спектральних параметрів λ_1, λ_2. Для того щоб рівняння (2) мало відмінні від тотожного нуля розв'язки $z = (x, y)$, необхідно та достатньо, щоб виконувалась рівність [3]

$$F(\lambda_1, \lambda_2) = \det\left(A - \lambda_1 B + \lambda_2 C\right) = 0 \,. \tag{3}$$

Рівняння $F(\lambda_1, \lambda_2) = 0$ будемо розглядати як рівняння на визначення неявно заданих функцій $\lambda_2 = \lambda_2(\lambda_1)$ або $\lambda_1 = \lambda_1(\lambda_2)$. У цьому випадку задача (3) може бути зведена до задачі Коші [6]

$$\frac{d\lambda_2}{d\lambda_1} = -\frac{\dfrac{\partial F(\lambda_1, \lambda_2)}{\partial \lambda_1}}{\dfrac{\partial F(\lambda_1, \lambda_2)}{\partial \lambda_2}} \,, \tag{4}$$

$$\lambda_2(\lambda_1^{(0)}) = \lambda_1^{(0)} \,. \tag{5}$$

Для знаходження розв'язків задачі (4), (5) необхідно задати відповідні початкові умови $\left(\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}\right)$, для яких виконується рівність $F\left(\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}\right) = 0$. З цією метою поряд із задачею (2) будемо розглядати відповідну їй допоміжну однопараметричну задачу, покладаючи в (2) $\lambda_2 = \alpha \lambda_1$:

 ISSN 0130–9420. Мат. методи та фіз.-мех. поля. 2009. – 52, № 2. – С. 42-49.

$$\tilde{\mathcal{A}}(\lambda_1)z \equiv (A - \lambda_1(B - \alpha C))z = 0\,, \tag{6}$$

де α – деяке дійсне число. У випадку дійсних λ_1, λ_2 задача (6) розглядається на деякому промені, що належить до $\mathbf{\Lambda} \subset \mathbb{R}^2$.

Зазначимо, що матрична функція $\mathcal{A}(\lambda_1, \lambda_2)$ є неперервною й диференційовною за своїми змінними в будь-якій відкритій та обмеженій області $\mathbf{\Lambda} \in \mathbb{R}^2$ (або $\mathbf{\Lambda} \in \mathbb{C}^2$), тобто є голоморфною матрицею-функцією в області $\mathbf{\Lambda}$.

Відомо [3], що допоміжна задача (6) має m дійсних або комплексних власних значень $\{\lambda_1^{(i)}\}_{i=1}^m$, які є коренями відповідного характеристичного многочлена. Тобто задача (6) має дискретний спектр, а $(\lambda_1^{(i)}, \lambda_2^{(i)}) = (\lambda_1^{(i)}, \lambda_2^{(i)} = \alpha\lambda_i^{(i)})$ є власними значеннями задачі (2), які у випадку дійсних параметрів λ_1, λ_2 лежать на промені $\lambda_2(\lambda_1) = \alpha\lambda_1$.

Спектри задач (2) і (6) позначимо відповідно через $s(\mathcal{A})$ і $s(\tilde{\mathcal{A}})$. Для визначення властивостей спектра $s(\mathcal{A})$ скористаємось теоремою 1 із [6], яку стосовно задачі (2) сформулюємо так.

Теорема 1. *Нехай при кожному* $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbf{\Lambda}$ *оператор* $\mathcal{A}(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^m, \mathbb{C}^m)$ *є фредгольмовим з нульовим індексом, матриця-функція* $\mathcal{A}(\cdot,\cdot) : \mathbf{\Lambda} \to \mathcal{L}(\mathbb{C}^m, \mathbb{C}^m)$ *голоморфна в області* $\mathbf{\Lambda}$, *а функція* $F(\lambda_1, \lambda_2)$ *аналітична в* $\mathbf{\Lambda}$.

Тоді:

1°*) кожна точка спектра* $\lambda_1^{(i)} \in s(\tilde{\mathcal{A}})$, $i = 1, 2, \ldots, m$, *ізольована, є власним значенням матриці* $\tilde{\mathcal{A}}(\lambda_1) \equiv \mathcal{A}(\lambda_1, \alpha\lambda_1)$, *їй відповідає скінченновимірний власний підпростір* $N(\tilde{\mathcal{A}}(\lambda_1^{(i)}))$ *і скінченновимірний кореневий підпростір;*

2°*) кожна точка* $\boldsymbol{\lambda}^{(0)} = (\lambda_1^{(0)}, z(\lambda_1^{(0)})) \in \mathbf{\Lambda}$ *є точкою спектра матриці-функції* $\mathcal{A}(\lambda_1, \lambda_2)$, *де* $\lambda_2^{(0)} = \alpha\lambda_1^{(0)} \in \Lambda_2$, $\lambda_1^{(0)} \in \Lambda_1$;

3°*) якщо* $F'_{\lambda_2}(\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}) \neq 0$, *то в деякому околі точки* $\lambda_1^{(0)} \in \Lambda_1$ *існує єдина неперервна диференційовна функція* $\lambda_2 = \lambda_2(\lambda_1)$, *яка є розв'язком рівняння (3), тобто в деякій бікруговій області* $\mathbf{\Lambda}_0 = \{(\lambda_1, \lambda_2) : |\lambda_1 - \lambda_1^{(0)}| < \varepsilon_1,\ |\lambda_2 - \lambda_2^{(0)}| < \varepsilon_2\}$ *існує зв'язна компонента спектра матриці-функції* $\mathcal{A}(\lambda_1, \lambda_2)$, *де* ε_1, ε_2 *– малі дійсні константи.*

Д о в е д е н н я теореми стосовно нелінійної двопараметричної спектральної задачі подано в [6]. У випадку задачі (2) при кожному $\lambda \in \mathbf{\Lambda}$ фредгольмовість матриці-функції $\mathcal{A}(\lambda_1, \lambda_2)$ випливає з рівності [3]

$$\dim(\ker \tilde{\mathcal{A}}) = \dim(\ker \tilde{\mathcal{A}}^*)\,,$$

а існування зв'язних компонент спектра матриці-функції $\mathcal{A}(\lambda_1, \lambda_2)$ при умові $F'_{\lambda_2}(\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}) \neq 0$ випливає з теореми про існування неявно заданої функції [1, 7].

3. Розглянемо один із підходів до знаходження часткових похідних від детермінанта матриці, коефіцієнти якої залежать від параметра λ. Нехай задано матрицю

$$D(\lambda)=\begin{Vmatrix} d_{11}(\lambda) & d_{12}(\lambda) & \dots & d_{1n}(\lambda) \\ d_{21}(\lambda) & d_{22}(\lambda) & \dots & d_{2n}(\lambda) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{n1}(\lambda) & d_{n2}(\lambda) & \dots & d_{nn}(\lambda) \end{Vmatrix},$$

елементи $d_{ij}(\lambda)$ якої є диференційовними функціями від λ. Тоді для похідної за λ від визначника $\det(D(\lambda))$ має місце

Лема 1. *Нехай елементи* $d_{ij}(\lambda)$ *матриці* $D(\lambda)$ *є диференційовними функціями від параметра* λ. *Тоді для похідної* $\frac{d}{d\lambda}(\det D(\lambda))$ *справджується формула*

$$\frac{d}{d\lambda}(\det D(\lambda))=$$
$$=\sum_{j=1}^{n}\det\begin{Vmatrix} d_{11}(\lambda) & d_{12}(\lambda) & \dots & d_{1,j-1}(\lambda) & d'_{1,j}(\lambda) & d_{1,j+1}(\lambda) & \dots & d_{1n}(\lambda) \\ d_{21}(\lambda) & d_{22}(\lambda) & \dots & d_{2,j-1}(\lambda) & d'_{2,j}(\lambda) & d_{2,j+1}(\lambda) & \dots & d_{2n}(\lambda) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{n1}(\lambda) & d_{n2}(\lambda) & \dots & d_{n,j-1}(\lambda) & d'_{n,j}(\lambda) & d_{n,j+1}(\lambda) & \dots & d_{nn}(\lambda) \end{Vmatrix}. \tag{7}$$

Д о в е д е н н я. Скористаємось методом математичної індукції.

1). При $n=2$ очевидна рівність

$$\frac{d}{d\lambda}\det\begin{Vmatrix} d_{11}(\lambda) & d_{12}(\lambda) \\ d_{21}(\lambda) & d_{22}(\lambda) \end{Vmatrix}=\frac{d}{d\lambda}(d_{11}(\lambda)d_{22}(\lambda)-d_{21}(\lambda)d_{12}(\lambda))=$$
$$=d'_{11}(\lambda)d_{22}(\lambda)+d_{11}(\lambda)d'_{22}(\lambda)-d'_{21}(\lambda)d_{12}(\lambda)-d_{21}(\lambda)d'_{12}(\lambda)=$$
$$=\det\begin{Vmatrix} d'_{11}(\lambda) & d_{12}(\lambda) \\ d'_{21}(\lambda) & d_{22}(\lambda) \end{Vmatrix}+\det\begin{Vmatrix} d_{11}(\lambda) & d'_{12}(\lambda) \\ d_{21}(\lambda) & d'_{22}(\lambda) \end{Vmatrix}.$$

2). Припустимо, що рівність (7) справджується при $n=k$.

3). Покажемо виконання рівності (7) при $n=k+1$. Розкладаючи визначник $(k+1)$-го порядку за $(k+1)$-м рядком, одержуємо

$$\frac{d}{d\lambda}\det\begin{Vmatrix} d_{11}(\lambda) & d_{12}(\lambda) & \dots & d_{1n}(\lambda) \\ d_{21}(\lambda) & d_{22}(\lambda) & \dots & d_{2n}(\lambda) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{n1}(\lambda) & d_{n2}(\lambda) & \dots & d_{nn}(\lambda) \end{Vmatrix}=$$
$$=\sum_{j=1}^{k+1}(-1)^{k+1+j}(d'_{k+1,j}(\lambda)\Delta_{k.j}(\lambda)+d_{k+1,j}(\lambda)\Delta'_{k.j}(\lambda)), \tag{8}$$

де $\Delta_{k.j}(\lambda)$ і $\Delta'_{k.j}(\lambda)$ – відповідно алгебраїчне доповнення до елемента $d_{k+1,j}(\lambda)$ і похідна від нього, які є визначниками k-го порядку. Оскільки для $\Delta'_{k.j}(\lambda)$ згідно з ***2***) справджується рівність (7), то, диференціюючи за формулою (7) визначники $\Delta_{k.j}(\lambda)$ і згортаючи відповідним чином згідно з (8) визначник $(k+1)$-го порядку при $d'_{k+1,j}(\lambda)$, $j=1,2,\dots,k+1$, одержуємо формулу (7). ◊

Таким чином, згідно з лемою 1 для обчислення похідної від визначника n-го порядку необхідно обчислити n визначників, у кожному з яких елементи $n-1$ стовпців співпадають з елементами вихідної матриці, а елементи j-го стовпця в j-му визначнику $(j=1,2,\dots,n)$ є похідними за λ від елементів j-го стовпця вихідної матриці. Отже, вхідними даними для обчислення похідної від визначника є вхідна матриця і відповідна їй матриця похідних. Зауважимо, що ці матриці на підставі аналітично заданих виразів для їх елементів можуть бути обчислені з машинною точністю.

Підсумовуючи сказане, приходимо до висновку, що для знаходження спектра задачі (2) в заданій обмеженій опуклій області $\mathbf{\Lambda}$ необхідно виконати наступні обчислення:

1°. Розв'язати відомими методами на заданому промені $\lambda_2 = \alpha\lambda_1$ (або на промені $\lambda_1 = \alpha\lambda_2$) допоміжну одновимірну задачу на власні значення (6). В результаті цього знайдемо m власних значень $\left(\lambda_1^{(i)}, \lambda_2^{(i)}\right) = \left(\lambda_1^{(i)}, \alpha\lambda_1^{(i)}\right) \subset \mathbf{\Lambda}$.

2°. Якщо кратність i-го власного значення $(i = 1, 2, \ldots, m)$ дорівнює одиниці, то, використовуючи знайдені згідно з ***1***° розв'язки $\lambda_2^{(i)} = \alpha\lambda_1^{(i)}$ як початкові умови, розв'язуємо в околі кожної точки $\left(\lambda_1^{(i)}, \lambda_2^{(i)}\right)$ задачу Коші (4), (5) чисельними методами. У результаті знаходимо зв'язні компоненти спектра задачі (2), що належать до $\mathbf{\Lambda} = \Lambda_1 \times \Lambda_2 \subset \mathbb{C}^2$, у випадку комплексних коренів $\left(\lambda_1^{(i)}, \lambda_2^{(i)}\right) = \left(\lambda_1^{(i)}, \alpha\lambda_1^{(i)}\right)$, або спектральні лінії, що належать до $\mathbf{\Lambda} \subset \mathbb{R}^2$, у випадку дійсних коренів.

У випадку дійсної матриці $\mathcal{A}(\lambda_1, \lambda_2)$ і дійсних власних значень $\left(\lambda_1^{(i)}, \lambda_2^{(i)}\right) = \left(\lambda_1^{(i)}, \alpha\lambda_1^{(i)}\right)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, одержуємо, що задача (2) має лінійчатий спектр, що належить до області $\mathbf{\Lambda} \subset \mathbb{R}^2$.

4. Точки спектра, в яких власне значення $\left(\lambda_1^{(k)}, \lambda_2^{(k)}\right)$ є дійсним і кратним, крім того, $\dfrac{\partial F\left(\lambda_1^{(k)}, \lambda_2^{(k)}\right)}{\partial\lambda_1} = \dfrac{\partial F\left(\lambda_1^{(k)}, \lambda_2^{(k)}\right)}{\partial\lambda_2} = 0$, називають особливими. Використовуючи результати [4] стосовно дослідження неявних функцій, наведемо основні властивості спектральних ліній, що проходять через ці точки. Покладаємо, що три частинних похідних другого порядку від $F(\lambda_1, \lambda_2)$ не дорівнюють нулеві при $\lambda_1 = \lambda_1^{(k)}$, $\lambda_2 = \lambda_2^{(k)}$ і що ці похідні разом з похідними третього порядку неперервні в околі точки $\left(\lambda_1^{(k)}, \lambda_2^{(k)}\right)$. Тоді можливі такі випадки поведінки спектральних ліній:

(***i***) якщо

$$\left(\frac{\partial^2 F\left(\lambda_1^{(k)}, \lambda_2^{(k)}\right)}{\partial\lambda_1 \partial\lambda_2}\right)^2 > \frac{\partial^2 F\left(\lambda_1^{(k)}, \lambda_2^{(k)}\right)}{\partial\lambda_1^2} \cdot \frac{\partial^2 F\left(\lambda_1^{(k)}, \lambda_2^{(k)}\right)}{\partial\lambda_2^2},$$

то через точку $\left(\lambda_1^{(k)}, \lambda_2^{(k)}\right)$ проходять дві криві з різними дотичними

$$\lambda_2 - \lambda_2^{(k)} = t_i\left(\lambda_1 - \lambda_1^{(k)}\right), \qquad i = 1, 2,$$

де t_i – корені відповідних рівнянь (див. [4, с. 97]);

(***ii***) у випадку, коли

$$\left(\frac{\partial^2 F\left(\lambda_1^{(k)}, \lambda_2^{(k)}\right)}{\partial\lambda_1 \partial\lambda_2}\right)^2 < \frac{\partial^2 F\left(\lambda_1^{(k)}, \lambda_2^{(k)}\right)}{\partial\lambda_1^2} \cdot \frac{\partial^2 F\left(\lambda_1^{(k)}, \lambda_2^{(k)}\right)}{\partial\lambda_2^2},$$

то $\left(\lambda_1^{(k)}, \lambda_2^{(k)}\right)$ є подвійною ізольованою точкою;

(***iii***) якщо

$$\left(\frac{\partial^2 F\left(\lambda_1^{(k)}, \lambda_2^{(k)}\right)}{\partial\lambda_1 \partial\lambda_2}\right)^2 - \frac{\partial^2 F\left(\lambda_1^{(k)}, \lambda_2^{(k)}\right)}{\partial\lambda_1^2} \cdot \frac{\partial^2 F\left(\lambda_1^{(k)}, \lambda_2^{(k)}\right)}{\partial\lambda_2^2} = 0,$$

то існують дві вітки кривої, які мають спільну дотичну й утворюють точку звороту.

5. Розглянемо числовий приклад. Необхідно знайти спектр матриці $\mathcal{A}(\lambda_1,\lambda_2) =$

$$= \begin{Vmatrix} 1-3\lambda_1-4\lambda_2 & 3-2\lambda_1 & 1-\lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 3-2\lambda_1-\lambda_2 & 2-\lambda_1-2\lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1-\lambda_1 & 0 & 3-2\lambda_1-2\lambda_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5-\lambda_1-2\lambda_2 & 2-\lambda_2 & 1-\lambda_2 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\lambda_2 & 1-\lambda_1-2\lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda_2 & 0 & 2-\lambda_1-2\lambda_2 \end{Vmatrix}.$$

Легко переконатись, що частинні похідні від $\mathcal{A}(\lambda_1,\lambda_2)$ є матрицями з постійними коефіцієнтами і мають вигляд

$$\frac{\partial\mathcal{A}(\lambda_1,\lambda_2)}{\partial\lambda_1} = -\begin{Vmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \qquad \frac{\partial\mathcal{A}(\lambda_1,\lambda_2)}{\partial\lambda_2} = -\begin{Vmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{Vmatrix}.$$

Допоміжна одновимірна спектральна задача (6) розв'язувалась на двох променях: $\lambda_2 = 0.5\lambda_1$ і $\lambda_2 = \lambda_1$. Власні значення на цих променях є дійсними й наведені в табл. 1.

Таблиця 1

i	1	2	3	4	5	6
$\lambda_1^{(i)}$	-1.61491	-1.05990	0.87645	0.90772	1.00000	1.18789
$\lambda_2^{(i)} = 0.5\lambda_1^{(i)}$	-0.807455	-0.52995	0.438225	0.45386	0.5	0.593945
$\lambda_1^{(i)}$	-0.84676	-0.70348	0.60221	0.61387	0.73288	0.75404
$\lambda_2^{(i)} = \lambda_1^{(i)}$	-0.84676	-0.70348	0.60221	0.61387	0.73288	0.75404

Спектральні лінії, що відповідають поданим у табл. 1 власним значенням, наведено в області $\mathbf{\Lambda} = \{(\lambda_1,\lambda_2) : |\lambda_1| \le 1.5, \ |\lambda_2| \le 1.5\}$ на рис. 1. Жирними точками позначено власні значення, що лежать на заданих променях.

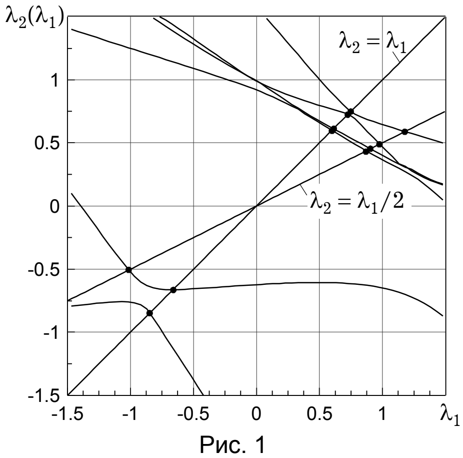

Рис. 1

6. Застосовуючи методи дискретизації, розглянемо можливість застосування запропонованого методу до розв'язування лінійних двопараметричних спектральних задач для диференціальних та інтегральних операторів.

Спочатку розглянемо задачу про знаходження ненульових розв'язків диференціального рівняння Матьє [8]:

$$Lu \equiv \frac{1}{4}\frac{d^2u}{dx^2} + (-4q\cos 2x + \alpha)u = 0\,, \tag{9}$$

лінійно залежного від двох параметрів

$$\lambda_1 = q, \qquad \lambda_2 = \alpha\,,$$

де $x \in [0, \pi/2]$. Відомо [8], що функції Матьє еліптичного циліндра $\varphi_m(x, q)$ становлять собою парні та непарні періодичні часткові розв'язки рівняння (9). Періодичні розв'язки існують не для будь-якої пари значень q, α. Для кожної функції Матьє $\mathrm{ce}_m x$ і $\mathrm{se}_m x$ параметр q є певною функцією від параметра α і навпаки.

Покажемо, що ця задача знаходження таких параметрів $\lambda_1 = q$, $\lambda_2 = \alpha$, при яких існують відмінні від тотожного нуля розв'язки (9), може бути зведена до знаходження спектральних ліній двопараметричної алгебраїчної задачі, розглянутої у пп. **1–5**. Для цього скористаємося різницевим аналогом для другої похідної і зведемо рівняння (9) до відповідної однорідної алгебраїчної системи рівнянь.

Введемо на відрізку $[0, \pi/2]$ сітку

$$\omega_h = \{x_i = 0 + ih,\ i = 0, 1, \ldots, n,\ hn = \pi/2\}\,,$$

і позначимо значення функції $u(x)$ у вузлах сітки через $u_i = u(x_i)$. Для апроксимації $u''(x)$ використаємо відомі несиметричні й симетричні різницеві аналоги:

$$u''(x_i) = \frac{u_i - 2u_{i+1} + u_{i+2}}{h}\,,$$

$$u''(x_i) = \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h}\,,$$

$$u''(x_i) = \frac{u_{i-2} - 2u_{i-1} + u_i}{h}\,.$$

Підставляючи у (9) замість $u''(x)$ її різницеві аналоги й прирівнюючи у вузлах сітки отримані вирази до нуля, приходимо до однорідної системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно значення невідомої функції u у вузлах сітки u_0, $u_1, \ldots, u_n$:

$$L_h u = \begin{cases} \left(\frac{1}{4h} - 4q\cos 2x_0 + \alpha\right)u_0 - \frac{1}{2h}u_1 + \frac{1}{4h}u_2 = 0, \\ \frac{1}{4h}u_0 + \left(-\frac{1}{2h} - 4q\cos 2x_1 + \alpha\right)u_1 + \frac{1}{4h}u_2 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \frac{1}{4h}u_{k-1} + \left(-\frac{1}{2h} - 4q\cos 2x_k + \alpha\right)u_k + \frac{1}{4h}u_{k+1} = 0, \\ \frac{1}{4h}u_{n-2} + \left(-\frac{1}{2h} - 4q\cos 2x_{n-1} + \alpha\right)u_{n-1} + \frac{1}{4h}u_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \frac{1}{4h}u_{n-2} - \frac{1}{2h}u_{n-1} + \left(\frac{1}{4h} - 4q\cos 2x_n + \alpha\right)u_n = 0. \end{cases} \tag{10}$$

Виділяючи у системі (10) окремо матриці при q та α, приходимо до двовимірної лінійної алгебраїчної спектральної задачі типу (2):

$$\mathcal{A}(q, \alpha) \equiv (A + qB + \alpha C)u = 0\,, \tag{11}$$

де

$$A = \begin{Vmatrix} \frac{1}{4h} & -\frac{1}{2h} & \frac{1}{4h} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4h} & -\frac{1}{2h} & \frac{1}{4h} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4h} & -\frac{1}{2h} & \frac{1}{4h} & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{4h} & -\frac{1}{2h} & \frac{1}{4h} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{4h} & -\frac{1}{2h} & \frac{1}{4h} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{4h} & -\frac{1}{2h} & \frac{1}{4h} \end{Vmatrix},$$

$$B = \begin{Vmatrix} -4\cos 2x_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -4\cos 2x_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & -4\cos 2x_n \end{Vmatrix},$$

$C = E$ − одинична матриця, $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)^\top$.

Розглянемо застосування методу неявної функції до знаходження спектральних ліній однорідного інтегрального рівняння з двома спектральними параметрами

$$x(s) = \lambda_1 \int_D \mathcal{K}_1(s,t)\, x(t)\, dt + \lambda_2 \int_D \mathcal{K}_2(s,t)\, x(t)\, dt\,, \tag{12}$$

де D − задана область у просторі $\mathbb{R}^2$. Задача полягає у знаходженні таких значень параметрів λ_1, λ_2, при яких рівняння (12) має відмінні від тотожного нуля розв'язки.

Нехай задано деякий збіжний квадратурний процес [2]

$$\int_D z(s)\, ds = \sum_{j=1}^{n} a_{jn} z(s_{jn}) + \varphi_n(z), \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{13}$$

з $a_{jn} \in \mathbb{R}$, $s_{jn} \in D$, $j = 1,\dots,n$, тобто $\varphi_n(z) \to 0$ для будь-якої неперервної на D функції $z(s)$ при $n \to \infty$.

Замінивши інтеграл у рівнянні (12) за формулою (13), у якій відкидаємо залишковий член φ_n, і надаючи змінній s значення $s = s_{in}$, $i = 1,\dots,n$, приходимо до такої однорідної системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно $x_{in} = x(s_{in})$, $i = 1,\dots,n$:

$$x_{in} = \lambda_1 \sum_{j=1}^{n} a_{jn} \mathcal{K}_1(s_{in}, s_{jn})\, x_{jn} + \lambda_2 \sum_{j=1}^{n} a_{jn} \mathcal{K}_2(s_{in}, s_{jn})\, x_{jn}, \qquad i = 1,\dots,n.$$

Позначивши відповідні коефіцієнти при невідомих через $a_{jn}\mathcal{K}_1(s_i, s_j) = \tilde{b}_{ij}$, $a_{jn}\mathcal{K}_2(s_i, s_j) = \tilde{c}_{ij}$, одержуємо аналогічну до (2) лінійну двопараметричну спектральну алгебраїчну задачу

$$Ex - \lambda_1 \tilde{B}x - \lambda_2 \tilde{C}x = 0.$$

6. Висновки. З наведених у роботі результатів переконуємось, що застосування методів неявних функцій до розв'язування лінійних двопараметричних спектральних задач дозволяє дослідити та знайти спектр цієї задачі в заданій обмеженій опуклій області простору $\mathbb{C}^m$ або $\mathbb{R}^m$.

Очевидно, що цей підхід легко поширюється на лінійні багатопараметричні спектральні задачі. При цьому для визначення зв'язної компоненти спектра з використанням аналогічного до (3) рівняння застосовуємо метод послідовних наближень, запропонований в [4].

Якщо розмірність матриць є великою, то при обчисленні похідних від визначника, необхідних для розв'язання задачі Коші, можна застосовувати різницеві методи.

1. *Бибиков Ю. Н.* Общий курс дифференциальных уравнений. – Ленинград: Изд-во Ленингр. ун-та, 1981. – 232 с.
2. *Вайникко Г. М.* Анализ дискретизационных методов. – Тарту: Тартуск. гос. ун-т, 1976. – 161 с.
3. *Воеводин В. В., Кузнецов Ю. А.* Матрицы и вычисления. – Москва: Наука, 1984. – 320 с.
4. *Гурса Э.* Курс математического анализа. Т. 1. Ч. 1. – Москва-Ленинград: Гос. Техн.-теор. Издат., 1933. – 368 с.
5. *Каленюк П. И., Баранецкий Я. Е. Нитребич З. Н.* Обобщенный метод разделения переменных. – Киев: Наук. думка, 1999. – 230 с.
6. *Савенко П. А., Процах Л. П.* Метод неявной функции в решении двумерной нелинейной спектральной проблемы // Изв. вузов. Математика. – 2007. – № 11 (546). – С. 41–44.
7. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики. – Москва: Наука, 1965. – Т. 1. – 450 с.
8. *Янке Е., Эмде Ф.* Таблицы функций с формулами и кривыми. – Москва: Физматгиз, 1959. – 420 с.
9. *Atkinson F. V.* Multiparameter eigenvalue problems. – New York, London: Acad. Press, 1972. – **1**. – 220 p.
10. *Atkinson F. V.* Multiparameter spectral theory // Bull. Amer. Math. Soc. – 1968. – **74**, No. 1. – P. 1–27.
11. *Karma O. O.* Approximation in eigenvalue problems for holomorphic Fredholm operator functions. I // Numer. Funct. Anal. Optimization. – 1996. – **17**. – P. 365–387.
12. *Karma O. O.* Approximation in eigenvalue problems for holomorphic Fredholm operator functions. II // Numer. Funct. Anal. Optimization. – 1996. – **17**. – P. 389–408.
13. *Solov'ëv S. I.* Preconditioned iterative methods for a class of nonlinear eigenvalue problems // Linear Algebra and its Appl. – 2006. – **41**, No. 1. – P. 210–229.

МЕТОДЫ НЕЯВНЫХ ФУНКЦИЙ ПРИ РЕШЕНИИ ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ЛИНЕЙНЫХ СПЕКТРАЛЬНЫХ ЗАДАЧ

Рассматривается метод решения линейных двухпараметрических спектральных алгебраических задач, в основу которого полагаются методы неявных функций. Использование методов неявных функций дает возможность определить свойства и структуру существующего спектра и находить весь спектр, находящийся в некоторой ограниченной выпуклой области пространства $\mathbb{C}^2$ *или* $\mathbb{R}^2$.

METHODS OF IMPLICIT FUNCTIONS FOR SOLUTION OF TWO-PARAMETER LINEAR SPECTRAL PROBLEMS

One method of solution of linear two-parameter spectral algebraic problems, in which implicit functions methods are put in base, is considered. Use of implicit functions methods enables to define the properties and structure of an existing spectrum and to find all spectrum located in some bounded convex region of space $\mathbb{C}^2$ *or* $\mathbb{R}^2$.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
22.04.08