УДК 517.524

Т. М. Антонова[1], О. М. Сусь[2]

ПРО ОДНУ ОЗНАКУ ФІГУРНОЇ ЗБІЖНОСТІ ДВОВИМІРНИХ НЕПЕРЕРВНИХ ДРОБІВ ІЗ КОМПЛЕКСНИМИ ЕЛЕМЕНТАМИ

Встановлено нову ознаку фігурної збіжності двовимірних неперервних дробів із комплексними елементами, яка є узагальненням теорем про просту та парні множини збіжності для неперервних дробів .

Започатковані W. J. Thron [7] дослідження щодо вивчення парних множин збіжності для неперервних дробів були розвинуті та узагальнені не лише для неперервних дробів, але й для їх багатовимірних аналогів − гіллястих ланцюгових і двовимірних неперервних дробів. Огляд робіт, що стосуються цієї теми досліджень для неперервних дробів, зроблено в [4]. Дослідження парних множин збіжності для неперервних дробів також продовжено у роботах [5, 6]. У роботі [1] проаналізовано стан досліджень цього питання для гіллястих ланцюгових і двовимірних неперервних дробів.

Ця робота є продовженням вивчення збіжності двовимірних неперервних дробів (ДНД) з комплексними елементами вигляду [2]

$$\Phi_0 + \mathop{D}_{k=1}^{\infty} \frac{a_{k,k}}{1+\Phi_k}, \qquad \Phi_k = \mathop{D}_{j=1}^{\infty} \frac{a_{k+j,k}}{1} + \mathop{D}_{j=1}^{\infty} \frac{a_{k,k+j}}{1}, \qquad k = 0,1,\ldots, \tag{1}$$

за допомогою методів, розглянутих в роботі [1]. Відмінність полягає в тому, що елементи двовимірного неперервного дробу, які належать неперервним дробам $\mathop{D}\limits_{j=1}^{\infty} \dfrac{a_{k+j,k}}{1}$, $\mathop{D}\limits_{j=1}^{\infty} \dfrac{a_{k,k+j}}{1}$, $k = 0,1,\ldots$, беруться з різних парних множин [4], а елементи $a_{k,k}$, $k = 1,2,\ldots$, − з простої множини [4].

Означення 1 [**3**]. Назвемо n-ми *фігурними наближеннями* або n-ми *фігурними підхідними дробами* ДНД (1) скінченні ДНД вигляду

$$f_n = \Phi_0^{(n)} + \mathop{D}_{k=1}^{[n/2]} \frac{a_{k,k}}{1+\Phi_k^{(n-2k)}}, \qquad n = 1,2,\ldots, \tag{2}$$

де

$$\Phi_k^{(0)} = 0, \quad \Phi_k^{(p)} = \mathop{D}_{j=1}^{p} \frac{a_{k+j,k}}{1} + \mathop{D}_{j=1}^{p} \frac{a_{k,k+j}}{1}, \quad k = 0,1,\ldots, \quad p = 1,2,\ldots. \tag{3}$$

Означення 2 [**3**]. ДНД (1) називають *фігурно збіжним,* якщо існує скінченна границя послідовності його наближень $\{f_n\}$. Величину цієї границі називають значенням нескінченного ДНД (1).

Двовимірними залишками наближень (2) ДНД (1) називають вирази вигляду

$$Q_j^{(0)} = 1, \qquad Q_j^{(1)} = 1 + \Phi_j^{(1)}, \qquad j = 1,2,\ldots,$$

$$Q_k^{(p+2)} = 1 + \Phi_k^{(p+2)} + \frac{a_{k+1,k+1}}{Q_{k+1}^{(p)}}, \qquad k = 1,2,\ldots, \qquad p = 0,1,\ldots, \tag{4}$$

а скінченні неперервні дроби

$$Q_{k+j,k}^{(p+1)} = 1 + \frac{a_{k+j+1,k}}{Q_{k+j+1,k}^{(p)}}, \qquad Q_{k,k+j}^{(p+1)} = 1 + \frac{a_{k,k+j+1}}{Q_{k,k+j+1}^{(p)}},$$

$$Q_{k+j,k}^{(0)} = 1, \quad Q_{k,k+j}^{(0)} = 1, \quad k = 0,1,\ldots, \quad p = 0,1,\ldots, \quad j = 1,2,\ldots, \tag{5}$$

називають одновимірними залишками ДНД (1).

Враховуючи формули (2), (3) та позначення (4), (5), маємо

$$\Phi_k^{(p)} = \frac{a_{k+1,k}}{Q_{k+1,k}^{(p-1)}} + \frac{a_{k,k+1}}{Q_{k,k+1}^{(p-1)}}, \qquad k = 0,1,\ldots, \qquad p = 1,2,\ldots, \tag{6}$$

$$f_1 = \Phi_0^{(1)}, \qquad f_n = \Phi_0^{(n)} + \frac{a_{1,1}}{Q_1^{(n-2)}}, \qquad n = 2,3,\ldots. \tag{7}$$

Для дослідження властивостей послідовностей фігурних підхідних дробів ДНД (1) використовують формулу різниці (для $n > 2p+1$) [2]

$$f_n - f_{2p} =$$

$$= \sum_{k=0}^{p} \frac{(-1)^k \left(\Phi_k^{(n-2k)} - \Phi_k^{(2p-2k)}\right) \prod_{j=1}^{k} a_{j,j}}{\prod_{j=1}^{k} Q_j^{(2p-2j)} Q_j^{(n-2j)}} + \frac{(-1)^p \prod_{j=1}^{p+1} a_{j,j}}{\prod_{j=1}^{2p} Q_j^{(2p-2j)} \prod_{j=1}^{2p+1} Q_j^{(n-2j)}}. \tag{8}$$

Лема. *Нехай елементи ДНД* (1) *задовольняють такі умови*:

$$|a_{k,k}| \le r, \qquad k = 1,2,\ldots, \tag{9}$$

$$|a_{k+2j,k}| \le r_1, \qquad |a_{k,k+2j-1}| \le r_2, \qquad k = 0,1,\ldots, \quad j = 1,2\ldots, \tag{10}$$

$$|a_{k+2j+1,k}| \ge 2(1+r_1), \quad |a_{k,k+2j}| \ge 2(1+r_2), \quad k = 0,1,\ldots, \quad j = 1,2\ldots, \tag{11}$$

$$|a_{k+1,k}| \ge (1+r_1)\left(1 + g + \max\left(r_2 + \frac{r}{g}, \frac{r_2}{1+2r_2} + r\right)\right), \qquad k = 1,2,\ldots, \tag{12}$$

де r, r_1, r_2, g *– дійсні сталі*, $r \ge 0$, $0 \le r_1 < 1$, $0 \le r_2 < 1$, $g > 0$.

Тоді для одновимірних залишків ДНД (1) *справджуються такі оцінки*:

$$1 - r_2 \le \left|Q_{k,k+2j}^{(p)}\right| \le 1 + r_2, \qquad \left|Q_{k,k+2j-1}^{(p)}\right| \ge 1,$$
$$k = 0,1,\ldots, \quad j = 1,2,\ldots, \quad p = 0,1,\ldots, \tag{13}$$

$$1 - r_1 \le \left|Q_{k+2j-1,k}^{(p)}\right| \le 1 + r_1, \qquad \left|Q_{k+2j,k}^{(p)}\right| \ge 1,$$
$$k = 0,1,\ldots, \quad j = 1,2,\ldots, \quad p = 0,1,\ldots, \tag{14}$$

а двовимірні залишки ДНД (1) *задовольняють нерівності*

$$\left|Q_k^{(p)}\right| \ge g, \qquad k = 1,2,\ldots, \qquad p = 1,2,\ldots. \tag{15}$$

Доведення. Правильність оцінок (13), (14) доводиться аналогічно, як при доведенні леми в [1].

Перевіримо правильність оцінок (15) для $p = 1$ і $p = 2$:

$$\left|Q_k^{(1)}\right| = \left|1 + \Phi_k^{(1)}\right| = \left|1 + a_{k+1,k} + a_{k,k+1}\right| \ge \left|a_{k+1,k}\right| - 1 - \left|a_{k,k+1}\right| \ge$$

$$\ge (1+r_1)\left(1 + r_2 + \frac{r}{g} + g\right) - 1 - r_2 > g,$$

$$\left|Q_k^{(2)}\right| = \left|1 + \Phi_k^{(2)} + a_{k+1,k+1}\right| = \left|1 + \frac{a_{k+1,k}}{Q_{k+1,k}^{(1)}} + \frac{a_{k,k+1}}{Q_{k,k+1}^{(1)}} + a_{k+1,k+1}\right| \ge$$

$$\ge \left|\frac{a_{k+1,k}}{Q_{k+1,k}^{(1)}}\right| - 1 - \left|\frac{a_{k,k+1}}{Q_{k,k+1}^{(1)}}\right| - r \ge \left(1 + \frac{r_2}{1+2r_2} + r + g\right) -$$

$$-1 - \frac{r_2}{\left|1 + a_{k,k+2}\right|} - r \ge \frac{r_2}{1+2r_2} + g - \frac{r_2}{\left|a_{k,k+2}\right| - 1} \ge g.$$

Якщо оцінки (15) справджуються для деякого значення $p > 0$ та $k = 1, 2, \ldots$, то

$$\left|Q_k^{(p+2)}\right| = \left|1 + \frac{a_{k+1,k}}{Q_{k+1,k}^{(p+1)}} + \frac{a_{k,k+1}}{Q_{k,k+1}^{(p+1)}} + \frac{a_{k+1,k+1}}{Q_{k+1}^{(p)}}\right| \geq$$

$$\geq \left|\frac{a_{k+1,k}}{Q_{k+1,k}^{(p+1)}}\right| - 1 - \left|\frac{a_{k,k+1}}{Q_{k,k+1}^{(p+1)}}\right| - \left|\frac{a_{k+1,k+1}}{Q_{k+1}^{(p)}}\right| \geq$$

$$\geq 1 + g + r_2 + \frac{r}{g} - 1 - r_2 - \frac{r}{g} = g\,.$$

Отже, для всіх значень $p > 0$ та $k = 1, 2, \ldots$ оцінки (15) правильні. ◊

Теорема. *Якщо для елементів ДНД* (1) *справджуються умови* (11), (12) *та умови*

$$\left|a_{k+2j,k}\right| \leq r_1(1-\varepsilon), \qquad \left|a_{k,k+2j-1}\right| \leq r_2(1-\varepsilon), \qquad k = 0, 1, \ldots, \qquad j = 1, 2, \ldots,$$

$$\left|a_{j,j}\right| \leq r(1-\varepsilon), \qquad j = 1, 2, \ldots, \tag{16}$$

де $r_1, r_2, r, \varepsilon, g$ – *дійсні сталі*, $r \geq 0$, $0 \leq r_1 < 1$, $0 \leq r_2 < 1$, $g > 0$, $0 < \varepsilon < 1$, *то ДНД* (1) *збігається фігурно, і область значень ДНД належить кругу*

$$|z| < \frac{|a_{10}|}{1 - r_1} + r_2(1-\varepsilon) + \frac{r(1-\varepsilon)}{g}\,.$$

Д о в е д е н н я. З формули (8) випливає, що при $n > 2p + 1$

$$\left|f_n - f_{2p}\right| \leq$$

$$\leq \left|\Phi_0^{(n)} - \Phi_0^{(2p)}\right| + \sum_{k=1}^{p-1} \frac{\left|\Phi_k^{(n-2k)} - \Phi_k^{(2p-2k)}\right| \prod\limits_{j=1}^{k} \left|a_{j,j}\right|}{\prod\limits_{j=1}^{k} \left|Q_j^{(2p-2j)} Q_j^{(n-2j)}\right|} +$$

$$+ \left|\Phi_p^{(n-2p)}\right| \prod_{j=1}^{p} \frac{\left|a_{j,j}\right|}{\left|Q_j^{(2p-2j)} Q_j^{(n-2j)}\right|} + \frac{\prod\limits_{j=1}^{p+1} \left|a_{j,j}\right|}{\prod\limits_{j=1}^{p} \left|Q_j^{(2p-2j)}\right| \prod\limits_{j=1}^{p+1} \left|Q_j^{(n-2j)}\right|}\,. \tag{17}$$

Оцінимо спочатку $\left|\Phi_k^{(n-2k)} - \Phi_k^{(2p-2k)}\right|$, $k = 0, 1, \ldots$:

$$\left|\Phi_k^{(n-2k)} - \Phi_k^{(2p-2k)}\right| \leq$$

$$\leq \left|\mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{n-2k} \frac{a_{k+j,k}}{1} - \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{2p-2k} \frac{a_{k+j,k}}{1}\right| + \left|\mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{n-2k} \frac{a_{k,k+j}}{1} - \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{2p-2k} \frac{a_{k,k+j}}{1}\right|.$$

З огляду на умови (16) теореми та оцінки (13), (14), для $k = 0, 1, \ldots$ маємо

$$\left|\mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{n-2k} \frac{a_{k+j,k}}{1} - \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{2p-2k} \frac{a_{k+j,k}}{1}\right| \leq \frac{\prod\limits_{j=1}^{2p-2k+1} \left|a_{k+j,k}\right|}{\prod\limits_{j=1}^{2p-2k+1} \left|Q_{k+j,k}^{(n-2k-j)}\right| \prod\limits_{j=1}^{2p-2k} \left|Q_{k+j,k}^{(2p-2k-j)}\right|} =$$

$$= \frac{\left|a_{k+1,k}\right|}{\left|Q_{k+1,k}^{(n-2k-1)}\right|} \cdot \prod_{j=1}^{2p-2k} \frac{\left|a_{k+j+1,k}\right|}{\left|Q_{k+j+1,k}^{(n-2k-j-1)} Q_{k+j,k}^{(2p-2k-j)}\right|} =$$

$$= \frac{\left|a_{k+1,k}\right|}{\left|Q_{k+1,k}^{(n-2k-1)}\right|} \cdot \prod_{j=1}^{p-k} \frac{\left|a_{k+2j,k}\right|}{\left|Q_{k+2j-1,k}^{(2p-2k-2j+1)} Q_{k+2j,k}^{(2p-2k-2j)}\right|} \times$$

$$\times \prod_{j=1}^{p-k} \frac{\left|a_{k+2j+1,k}\right|}{\left|Q_{k+2j,k}^{(n-2k-2j)} Q_{k+2j+1,k}^{(n-2k-2j-1)}\right|} \le \frac{\left|a_{k+1,k}\right|}{\left|Q_{k+1,k}^{(n-2k-1)}\right|} \left(\frac{2r_1}{1-r_1}\right)^{p-k} (1-\varepsilon)^{p-k}$$

і

$$\left| \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{n-2k} \frac{a_{k,k+j}}{1} - \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{2p-2k} \frac{a_{k,k+j}}{1} \right| \le \frac{\left|a_{k,k+1}\right|}{\left|Q_{k,k+1}^{(n-2k-1)}\right|} \left(\frac{2r_2}{1-r_2}\right)^{p-k} (1-\varepsilon)^{p-k} \le$$

$$\le r_2(1-\varepsilon) \left(\frac{2r_2}{1-r_2}\right)^{p-k} (1-\varepsilon)^{p-k}.$$

Тому для $0 \le k \le p-1,\ p \le \left[\dfrac{n-1}{2}\right]$,

$$\left|\Phi_k^{(n-2k)} - \Phi_k^{(2p-2k)}\right| \le$$

$$\le \left(\frac{\left|a_{k+1,k}\right|}{\left|Q_{k+1,k}^{(n-2k-1)}\right|} \left(\frac{2r_1}{1-r_1}\right)^{p-k} + r_2(1-\varepsilon)\left(\frac{2r_2}{1-r_2}\right)^{p-k} \right) (1-\varepsilon)^{p-k}.$$

Крім того, для $k \le \left[\dfrac{n-2}{2}\right]$ справджується оцінка

$$\frac{\left|a_{k+1,k}\right|}{\left|Q_{k+1,k}^{(n-2k-1)}\right|} \cdot \frac{1}{\left|Q_k^{(n-2k)}\right|} =$$

$$= \frac{\left|a_{k+1,k}\right|}{\left|Q_{k+1,k}^{(n-2k-1)}\right|} \left| 1 + \frac{a_{k+1,k}}{Q_{k+1,k}^{(n-2k-1)}} + \frac{a_{k,k+1}}{Q_{k,k+1}^{(n-2k-1)}} + \frac{a_{k+1,k+1}}{Q_{k+1}^{(n-2k-2)}} \right|^{-1} \le$$

$$\le 1 + \left(1 + \frac{\left|a_{k,k+1}\right|}{\left|Q_{k,k+1}^{(n-2k-1)}\right|} + \frac{\left|a_{k+1,k+1}\right|}{\left|Q_{k+1}^{(n-2k-2)}\right|} \right) \times$$

$$\times \left(\frac{\left|a_{k+1,k}\right|}{\left|Q_{k+1,k}^{(n-2k-1)}\right|} - 1 - \frac{\left|a_{k,k+1}\right|}{\left|Q_{k,k+1}^{(n-2k-1)}\right|} - \frac{\left|a_{k+1,k+1}\right|}{\left|Q_{k+1}^{(n-2k-2)}\right|} \right)^{-1} \le$$

$$\le 1 + \left(1 + r_2(1-\varepsilon) + \frac{r(1-\varepsilon)}{g} \right) \cdot \frac{1}{g} = \frac{g^2 + g + r_2 g(1-\varepsilon) + r(1-\varepsilon)}{g^2}.$$

Враховуючи умову (16) та оцінку (15), маємо

$$\prod_{j=1}^{k} \frac{\left|a_{j,j}\right|}{\left|Q_j^{(2p-2j)} Q_j^{(n-2j)}\right|} \le \frac{1}{\left|Q_k^{(n-2k)}\right|} \frac{r^k (1-\varepsilon)^k}{g^{2k-1}}, \qquad k < p,$$

$$\prod_{j=1}^{p} \frac{\left|a_{j,j}\right|}{\left|Q_j^{(2p-2j)} Q_j^{(n-2j)}\right|} \le \frac{1}{\left|Q_p^{(n-2p)}\right|} \frac{r^p (1-\varepsilon)^p}{g^{2p-2}},$$

$$\frac{\prod\limits_{j=1}^{p+1} \left|a_{j,j}\right|}{\prod\limits_{j=1}^{p+1} \left|Q_j^{(n-2j)}\right| \prod\limits_{j=1}^{p} \left|Q_j^{(2p-2j)}\right|} \le \frac{r^{p+1}(1-\varepsilon)^{p+1}}{g^{2p}}.$$

Підставляючи наведені оцінки у формулу (17), одержимо

$$\left|f_n - f_{2p}\right| \le \left(\frac{\left|a_{1,0}\right|}{1-r_1}\left(\frac{2r_1}{1-r_1}\right)^p + r_2(1-\varepsilon)\left(\frac{2r_2}{1-r_2}\right)^p\right)(1-\varepsilon)^p +$$

$$+\sum_{k=1}^{p-1}\left(\frac{g^2+g+r_2(1-\varepsilon)g+r(1-\varepsilon)}{g^2}\left(\frac{2r_1}{1-r_1}\right)^{p-k}+\right.$$

$$\left.+\frac{r_2}{g}(1-\varepsilon)\left(\frac{2r_2}{1-r_2}\right)^{p-k}\right)(1-\varepsilon)^{p-k}\cdot\frac{r^k(1-\varepsilon)^k}{g^{2k-1}}+$$

$$+\frac{g^2+g+2r_2(1-\varepsilon)g+r(1-\varepsilon)}{g^2}\cdot\frac{r^p(1-\varepsilon)^p}{g^{2p-2}}+\frac{r^{p+1}(1-\varepsilon)^{p+1}}{g^{2p}}=$$

$$=\left(\frac{\left|a_{1,0}\right|}{1-r_1}\left(\frac{2r_1}{1-r_1}\right)^p + r_2(1-\varepsilon)\left(\frac{2r_2}{1-r_2}\right)^p\right)(1-\varepsilon)^p +$$

$$+(1-\varepsilon)^p\sum_{k=1}^{p-1}\left(\left(1+g+r_2(1-\varepsilon)+\frac{r(1-\varepsilon)}{g}\right)\left(\frac{2r_1}{1-r_1}\right)^{p-k}+\right.$$

$$\left.+r_2(1-\varepsilon)\left(\frac{2r_2}{1-r_2}\right)^{p-k}\right)\cdot\frac{r^k}{g^{2k}}+$$

$$+\frac{(g^2+g+2r_2(1-\varepsilon)g+r)r^p(1-\varepsilon)^p}{g^{2p}}+\frac{r^{p+1}(1-\varepsilon)^{p+1}}{g^{2p}}.$$

Нехай

$$r_1 \le \frac{1}{3}, \qquad r_2 \le \frac{1}{3}, \qquad r \le g^2. \tag{18}$$

Позначимо

$$d = \max\left(\frac{2r_1}{1-r_1}, \frac{2r_2}{1-r_2}, \frac{r}{g^2}\right) \le 1.$$

Тоді

$$\left|f_n - f_{2p}\right| \le \left(\frac{\left|a_{1,0}\right|}{1-r_1} + r_2(1-\varepsilon)\right)d^p(1-\varepsilon)^p +$$

$$+(1-\varepsilon)^p\sum_{k=1}^{p-1}\left(1+g+2r_2(1-\varepsilon)+\frac{r(1-\varepsilon)}{g}\right)d^p + (g^2+g+$$

$$+2r_2(1-\varepsilon)+r(1-\varepsilon))d^p(1-\varepsilon)^p + r(1-\varepsilon)d^p(1-\varepsilon)^p \le$$

$$\le (p-1)(1-\varepsilon)^p\left(1+g+2r_2(1-\varepsilon)+\frac{r(1-\varepsilon)}{g}\right)+$$

$$+\left(\frac{\left|a_{1,0}\right|}{1-r_1}+g^2+g+3r_2(1-\varepsilon)+2r(1-\varepsilon)\right)(1-\varepsilon)^p.$$

Отже, $\lim\limits_{n\to\infty}\left|f_n - f_{2p}\right| \to 0$, коли $p \to \infty$.

Припустимо, що нерівності (18) не виконуються. Наприклад, нехай

$$\frac{1}{3} < r_1 < 1, \qquad \frac{1}{3} < r_2 < 1, \qquad r > g^2.$$

Розглянемо функціональний ДНД вигляду

$$\hat{\Phi}_0(z) + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \frac{\hat{a}_{k,k}(z)}{1+\hat{\Phi}_k(z)},$$

$$\hat{\Phi}_k(z) = \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{\infty} \frac{\hat{a}_{k+j,k}(z)}{1} + \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{\infty} \frac{\hat{a}_{k,k+j}(z)}{1}, \qquad k = 0,1,\ldots, \tag{19}$$

де

$$\hat{a}_{k,k}(z) = a_{k,k}z, \qquad k = 1,2,\ldots,$$

$$\hat{a}_{k,k+2j-1}(z) = a_{k,k+2j-1}z, \qquad \hat{a}_{k+2j,k}(z) = a_{k+2j,k}z,$$

$$\hat{a}_{k,k+2j}(z) = a_{k,k+2j}, \qquad \hat{a}_{k+2j-1,k} = a_{k+2j-1,k},$$

$$k = 0,1,\ldots, \qquad j = 1,2,\ldots. \tag{20}$$

В області $\mathcal{D}_\varepsilon = \left\{ z : |z| < \dfrac{1}{1-\varepsilon} \right\}$ елементи функціонального ДНД (19), (20) задовольняють умови леми, тому для його фігурних наближень справджується нерівність

$$\left| \hat{f}_n(z) \right| \le \left| \hat{\Phi}_0^{(n)}(z) \right| + \frac{\left| \hat{a}_{1,1}(z) \right|}{\left| \hat{Q}_1^{(n-2)}(z) \right|} \le \frac{\left| a_{1,0} \right|}{1-r_1} + r_2 + \frac{r}{g}.$$

Отже, всі фігурні підхідні дроби ДНД (19), (20) − це голоморфні функції, рівномірно обмежені в області $\mathcal{D}_\varepsilon$. Якщо

$$z \in \mathcal{D} = \left\{ z : |z| < \min\left(\frac{1}{3r_1}, \frac{1}{3r_2}, \frac{g^2}{r} \right) \right\},$$

то, як було показано вище, ДНД (19), (20) збігається рівномірно. Очевидно, що $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}_\varepsilon$, тому за теоремою Монтеля − Віталі [2] цей дріб збігається рівномірно на компактах області $\mathcal{D}_\varepsilon$, зокрема, на множині $\{1\}$, а це означає, що ДНД (1) збігається фігурно. При цьому

$$|f_n| \le \frac{\left| a_{1,0} \right|}{1-r_1} + r_2(1-\varepsilon) + \frac{r(1-\varepsilon)}{g},$$

$$|f| = \lim_{n\to\infty} |f_n| \le \frac{\left| a_{1,0} \right|}{1-r_1} + r_2(1-\varepsilon) + \frac{r(1-\varepsilon)}{g}.$$

Інші випадки порушення умов (18) досліджуються аналогічно. Зокрема, якщо

$$r_1 < \frac{1}{3}, \qquad \frac{1}{3} < r_2 < 1, \qquad r > g^2,$$

то елементи функціонального дробу (19) визначаються у такий спосіб:

$$\hat{a}_{k,k}(z) = a_{k,k}z, \qquad k = 1,2,\ldots,$$

$$\hat{a}_{k,k+2j-1}(z) = a_{k,k+2j-1}z, \qquad \hat{a}_{k+2j,k}(z) = a_{k+2j,k}z,$$

$$\hat{a}_{k,k+2j}(z) = a_{k,k+2j}, \qquad \hat{a}_{k+2j-1,k} = a_{k+2j-1,k},$$

$$k = 0,1,\ldots, \qquad j = 1,2,\ldots.$$

Теорему доведено. ◊

Покажемо, що доведена теорема є узагальненням теорем про просту та парні множини збіжності для неперервних дробів. Розглянемо приклади.

Приклад 1. Нехай елементи ДНД (1) є наступними:

$$a_{k+2j,k} = 0, \qquad a_{k+2j+1,k} \ge 2, \qquad k = 0,1,\dots, \quad j = 1,2,\dots,$$

$$a_{k+1,k} = a, \quad k = 1,2,\dots,$$

де

$$a \ge 1 + g + \max\left(\frac{r}{g}, r\right), \qquad a_{k,k+2j-1} = 0,$$

$$a_{k,k+2j} \ge 2, \qquad k = 0,1,\dots, \qquad j = 1,2,\dots,$$

а елементи $a_{j,j}$, $j = 1,2,\dots$, задовольняють другу з умов (16), то досліджуваний ДНД перетворюється на звичайний неперервний дріб вигляду

$$a_{1,0} + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \frac{a_{k,k}}{1+a} = a_{1,0} + \cfrac{\cfrac{a_{1,1}}{(1+a)}}{1 + \cfrac{\cfrac{a_{2,2}}{(1+a)^2}}{1 + \ddots}},$$

елементи якого задовольняють умови теореми Ворпіцького

$$\frac{|a_{k,k}|}{|1+a|^2} \le \frac{1}{4}, \qquad k = 2,3,\dots,$$

і значення такого дробу належить кругу $|z| \le |a_{1,0}| + \dfrac{r(1-\varepsilon)}{g}$. ◄

Приклад 2. Нехай елементи ДНД (1) задовольняють такі умови:

$$a_{k+2j,k} = 0, \qquad a_{k+2j+1,k} \ge 2, \qquad k = 0,1,\dots, \qquad j = 1,2,\dots,$$

$$a_{k+1,k} = a, \qquad k = 1,2,\dots,$$

де $a \ge 1 + g + \max\left(r_2, \dfrac{r_2}{1+2r_2}\right)$, $a_{j,j} = 0$, $j = 1,2,\dots$, а для елементів $a_{k,k+j}$, $k = 0,1,\dots$, $j = 1,2,\dots$, виконуються умови леми і теореми. Тоді неперервний дріб

$$a_{1,0} + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \frac{a_{0,k}}{1}$$

задовольняє умови теореми про парні множини збіжності [4, теорема 4.46] і область значень такого дробу належить кругу $|z| \le |a_{1,0}| + r_2(1-\varepsilon)$. ◄

Приклад 3. Якщо елементами ДНД (1) є

$$a_{k,k+2j-1} = 0, \quad a_{k,k+2j} \ge 2, \qquad k = 0,1,\dots, \qquad j = 1,2,\dots,$$

$$a_{j,j} = 0, \qquad j = 1,2,\dots,$$

а для елементів $a_{k+j,k}$, $k = 0,1,\dots$, $j = 2,3,\dots$, виконуються умови леми і теореми, причому $a_{k+1,k} \ge (1+r_1)(1+g)$, $k = 1,2,\dots$, то встановлена теорема − це теорема про збіжність неперервного дробу $\mathop{\mathrm{D}}\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{a_{k,0}}{1}$, елементи якого належать парним множинам збіжності, причому $|z| \le \dfrac{|a_{1,0}|}{1-r_1}$. ◄

1. *Антонова Т. М., Сусь О. М.* Про парні множини збіжності для двовимірних неперервних дробів із комплексними елементами // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2007. – **50,** № 3. – С. 94–101.
2. *Боднар Д. И.* Ветвящиеся цепные дроби. – Киев: Наук. думка, 1986. – 176 с.
3. *Кучмінська Х. Й., Сусь О. М., Возна С. М.* Апроксимативні властивості двовимірних неперервних дробів // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 1. – С. 30–44.
4. *Jones W. B., Thron W. J.* Continued fractions: Analytic theory and applications. – Reading, MA.: Addison-Wesley Publ. Co., 1980. – 428 p. – Encyclopedia Math. Appl. – Vol. 11.
5. *Lorentzen L.* Continued fractions with circular twin value sets // Trans. Amer. Math. Soc. –2008. – **360**, No. 8. – P. 4287–4304.
6. *McLaughlin J., Wyshinski N. J.* A convergence theorem for continued fractions of the form $K_{n=1}^{\infty} a_n/1$ // J. Comp. and Appl. Math. – 2005. – **179**, No. 1-2. – P. 255–262.
7. *Thron W. J.* Twin convergence regions for continued fractions // Duke Math. J. – 1943. – **10**. – P. 677– 685.

ОБ ОДНОМ ПРИЗНАКЕ ФИГУРНОЙ СХОДИМОСТИ ДВУМЕРНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ ДРОБЕЙ С КОМПЛЕКСНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

Установлен новый признак фигурной сходимости двумерных непрерывных дробей с комплексными элементами, который обобщает теоремы о простой и парных областях сходимости для непрерывных дробей.

ON ONE OF FIGURED CONVERGENCE CRITERION FOR TWO-DIMENSIONAL CONTINUED FRACTIONS WITH COMPLEX ELEMENTS

New criterion of figured convergence for two-dimensional continued fractions with complex elements has been established. This criterion is generalization of theorems about twin-convergence regions and simple convergence region for continued fractions.

[1] Нац. ун-т «Львів. політехніка», Львів,

[2] Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
07.04.08