УДК 519.46: 517.944

В. М. Федорчук[1,2], В. І. Федорчук[2]

ПРО ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ БАЗИСІВ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ ІНВАРІАНТІВ НЕСПРЯЖЕНИХ ПІДГРУП ЛОКАЛЬНИХ ГРУП ЛІ ТОЧКОВИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ

Сформульовано і доведено критерій еквівалентності функціональних базисів диференціальних інваріантів довільного скінченного порядку k для неспряжених підгруп локальних груп Лі точкових перетворень.

Диференціальні рівняння різних порядків, які інваріантні відносно локальних груп Лі G_r^{n+m} точкових перетворень, широко використовуються при розгляді багатьох питань теоретичної і математичної фізики, механіки, газової динаміки тощо. Такі рівняння вивчалися в багатьох роботах (див., наприклад, [1–4, 6–9, 11–15, 17–23]).

Один із способів побудови таких рівнянь базується на використанні функціональних базисів диференціальних інваріантів (ФБДІ) різних порядків груп G_r^{n+m} [2, 4, 16]. При такому підході клас диференціальних рівнянь довільного скінченного порядку k, який інваріантний відносно групи G_r^{n+m}, можна записати у вигляді

$$F(J_1, J_2, \ldots, J_{t_k}) = 0 ,$$

де F – достатньо гладка функція своїх аргументів; $\{J_1, J_2, \ldots, J_{t_k}\}$ – ФБДІ k-го порядку групи G_r^{n+m}. У такий спосіб можна будувати класи диференціальних рівнянь, які інваріантні відносно неспряжених підгруп групи G_r^{n+m}. Як видно з вищенаведеної формули, властивості побудованих у такий спосіб класів диференціальних рівнянь будуть суттєвим чином залежати від властивостей ФБДІ. При побудові ФБДІ для конкретних груп Лі точкових перетворень виявилося, що немає взаємно однозначної відповідності між неспряженими підгрупами цих груп і відповідними ФБДІ. Зокрема, різним неспряженим підгрупам можуть відповідати однакові або еквівалентні ФБДІ. Для відбору нееквівалентних ФБДІ довільного скіненного порядку потрібно зробити наступне:

- сформулювати і довести критерій еквівалентності для ФБДІ довільного скінченного порядку;
- застосувати цей критерій для ФБДІ кожної вимірності з метою виявлення еквівалентних;
- з кожного класу еквівалентних ФБДІ вибрати по одному представнику.

У праці [10] сформульовано і доведено критерій еквівалентності довільних двох ФБДІ першого порядку неспряжених розщеплюваних підгруп групи Пуанкаре $P(1,4)$.

У [5] сформульовано критерій еквівалентності довільних двох функціональних базисів диференціальних інваріантів довільного скінченного порядку k неспряжених підгруп групи G_r^n.

У цій роботі сформульовано та доведено аналогічний критерій для функціональних базисів диференціальних інваріантів довільного скінченного порядку k неспряжених підгруп групи G_r^{n+m}. Термінологія і позначення в основному стандартні [2, 3].

Нехай G_r^{n+m} – локальна r-параметрична група Лі точкових перетворень простору $\mathbb{R}^{n+m}(x,u) = \mathbb{R}^n(x) \times \mathbb{R}^m(u)$

$$x' = f(x,u,a), \quad u' = g(x,u,a), \quad x, x' \in \mathbb{R}^n(x), \quad u, u' \in \mathbb{R}^m(u), \quad a \in \mathbb{R}^r,$$
де $f(x,u,a)$ і $g(x,u,a)$ – достатньо гладкі функції своїх аргументів.

Базисні елементи алгебри Лі групи G_r^{n+m} позначимо через $\{X_1, X_2, \ldots, \ldots, X_r\}$. Вони мають вигляд (див., наприклад, [3])
$$X_\alpha = \xi_\alpha^i(x,u)\frac{\partial}{\partial x^i} + \eta_\alpha^k(x,u)\frac{\partial}{\partial u^k}, \quad i = 1,\ldots,n, \quad k = 1,\ldots,m, \quad \alpha = 1,\ldots,r,$$
де $\xi_\alpha^i(x,u) = \left.\dfrac{\partial f^i}{\partial a^\alpha}\right|_{a=0}$, $\eta_\alpha^k(x,u) = \left.\dfrac{\partial g^k}{\partial a^\alpha}\right|_{a=0}$.

Позначимо через $L_{r_1}^1$ і $L_{r_2}^2$ дві неспряжені підалгебри алгебри Лі групи G_r^{n+m}, де r_1, r_2 – розмірності підалгебр $L_{r_1}^1$ і $L_{r_2}^2$ відповідно.

Нехай $\{J_1^{(1)}, J_2^{(1)}, \ldots, J_{t_k}^{(1)}\}$ і $\{J_1^{(2)}, J_2^{(2)}, \ldots, J_{t_k}^{(2)}\}$ – функціональні базиси диференціальних інваріантів k-го порядку відповідно для підалгебр $L_{r_1}^1$ і $L_{r_2}^2$.

Означення. Кажемо, що *функціональні базиси* $\{J_1^{(1)}, J_2^{(1)}, \ldots, J_{t_k}^{(1)}\}$ і $\{J_1^{(2)}, J_2^{(2)}, \ldots, J_{t_k}^{(2)}\}$ *є еквівалентними,* якщо існують достатньо гладкі функції $f_1, f_2, \ldots, f_{t_k}$ і $g_1, g_2, \ldots, g_{t_k}$ такі, що
$$\begin{aligned}
&J_1^{(2)} = f_1(J_1^{(1)}, J_2^{(1)}, \ldots, J_{t_k}^{(1)}),\\
&J_2^{(2)} = f_2(J_1^{(1)}, J_2^{(1)}, \ldots, J_{t_k}^{(1)}),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&J_{t_k}^{(2)} = f_{t_k}(J_1^{(1)}, J_2^{(1)}, \ldots, J_{t_k}^{(1)})
\end{aligned} \tag{1}$$
і
$$\begin{aligned}
&J_1^{(1)} = g_1(J_1^{(2)}, J_2^{(2)}, \ldots, J_{t_k}^{(2)}),\\
&J_2^{(1)} = g_2(J_1^{(2)}, J_2^{(2)}, \ldots, J_{t_k}^{(2)}),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&J_{t_k}^{(1)} = g_{t_k}(J_1^{(2)}, J_2^{(2)}, \ldots, J_{t_k}^{(2)}).
\end{aligned} \tag{2}$$

Твердження. *Два функціональні базиси* $\{J_1^{(1)}, J_2^{(1)}, \ldots, J_{t_k}^{(1)}\}$ і $\{J_1^{(2)}, J_2^{(2)}, \ldots, \ldots, J_{t_k}^{(2)}\}$ *є еквівалентними тоді й тільки тоді, якщо вони задовольняють такі умови*:
$$\begin{aligned}
&\overset{k}{\tilde{X}}{}_1^{(1)} J_1^{(2)} = 0, \quad \overset{k}{\tilde{X}}{}_1^{(1)} J_2^{(2)} = 0, \quad \ldots, \quad \overset{k}{\tilde{X}}{}_1^{(1)} J_{t_k}^{(2)} = 0,\\
&\overset{k}{\tilde{X}}{}_2^{(1)} J_1^{(2)} = 0, \quad \overset{k}{\tilde{X}}{}_2^{(1)} J_2^{(2)} = 0, \quad \ldots, \quad \overset{k}{\tilde{X}}{}_2^{(1)} J_{t_k}^{(2)} = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\overset{k}{\tilde{X}}{}_{r_1}^{(1)} J_1^{(2)} = 0, \quad \overset{k}{\tilde{X}}{}_{r_1}^{(1)} J_2^{(2)} = 0, \quad \ldots, \quad \overset{k}{\tilde{X}}{}_{r_1}^{(1)} J_{t_k}^{(2)} = 0,\\
&\overset{k}{\tilde{X}}{}_1^{(2)} J_1^{(1)} = 0, \quad \overset{k}{\tilde{X}}{}_1^{(2)} J_2^{(1)} = 0, \quad \ldots, \quad \overset{k}{\tilde{X}}{}_1^{(2)} J_{t_k}^{(1)} = 0,\\
&\overset{k}{\tilde{X}}{}_2^{(2)} J_1^{(1)} = 0, \quad \overset{k}{\tilde{X}}{}_2^{(2)} J_2^{(1)} = 0, \quad \ldots, \quad \overset{k}{\tilde{X}}{}_2^{(2)} J_{t_k}^{(1)} = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\overset{k}{\tilde{X}}{}_{r_2}^{(2)} J_1^{(1)} = 0, \quad \overset{k}{\tilde{X}}{}_{r_2}^{(2)} J_2^{(1)} = 0, \quad \ldots, \quad \overset{k}{\tilde{X}}{}_{r_2}^{(2)} J_{t_k}^{(1)} = 0,
\end{aligned} \tag{3}$$

де $\{\overset{k}{\tilde{X}}{}_1^{(1)}, \overset{k}{\tilde{X}}{}_2^{(1)}, \ldots, \overset{k}{\tilde{X}}{}_{r_1}^{(1)}\}$, $\{\overset{k}{\tilde{X}}{}_1^{(2)}, \overset{k}{\tilde{X}}{}_2^{(2)}, \ldots, \overset{k}{\tilde{X}}{}_{r_2}^{(2)}\}$ *–* k *разів продовжені базисні оператори підалгебр* $L_{r_1}^1$ *і* $L_{r_2}^2$ *відповідно.*

Д о в е д е н н я. *Необхідність.* Нехай функціональні базиси $\{J_1^{(1)}, J_2^{(1)}, \ldots, J_{t_k}^{(1)}\}$ і $\{J_1^{(2)}, J_2^{(2)}, \ldots, J_{t_k}^{(2)}\}$ є еквівалентними. Тоді існують функції $f_1, f_2, \ldots, f_{t_k}$ і $g_1, g_2, \ldots, g_{t_k}$ такі, що

$$J_1^{(2)} = f_1(J_1^{(1)}, J_2^{(1)}, \ldots, J_{t_k}^{(1)}),$$
$$J_2^{(2)} = f_2(J_1^{(1)}, J_2^{(1)}, \ldots, J_{t_k}^{(1)}),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$J_{t_k}^{(2)} = f_{t_k}(J_1^{(1)}, J_2^{(1)}, \ldots, J_{t_k}^{(1)})$$

і

$$J_1^{(1)} = g_1(J_1^{(2)}, J_2^{(2)}, \ldots, J_{t_k}^{(2)}),$$
$$J_2^{(1)} = g_2(J_1^{(2)}, J_2^{(2)}, \ldots, J_{t_k}^{(2)}),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$J_{t_k}^{(1)} = g_{t_k}(J_1^{(2)}, J_2^{(2)}, \ldots, J_{t_k}^{(2)}).$$

Оскільки

$$f_1(J_1^{(1)}, J_2^{(1)}, \ldots, J_{t_k}^{(1)}), \quad f_2(J_1^{(1)}, J_2^{(1)}, \ldots, J_{t_k}^{(1)}), \quad \ldots, \quad f_{t_k}(J_1^{(1)}, J_2^{(1)}, \ldots, J_{t_k}^{(1)})$$

є диференціальними інваріантами k-го порядку підалгебри $L_{r_1}^1$, то матимемо (див., наприклад, [2–4])

$$\overset{k}{\tilde{X}}{}_1^{(1)} J_1^{(2)} = 0, \qquad \overset{k}{\tilde{X}}{}_1^{(1)} J_2^{(2)} = 0, \qquad \ldots, \qquad \overset{k}{\tilde{X}}{}_{r_1}^{(1)} J_{t_k}^{(2)} = 0.$$

Так як

$$g_1(J_1^{(2)}, J_2^{(2)}, \ldots, J_{t_k}^{(2)}), \quad g_2(J_1^{(2)}, J_2^{(2)}, \ldots, J_{t_k}^{(2)}), \quad \ldots, \quad g_{t_k}(J_1^{(2)}, J_2^{(2)}, \ldots, J_{t_k}^{(2)})$$

є диференціальними інваріантами k-го порядку підалгебри $L_{r_2}^2$, то

$$\overset{k}{\tilde{X}}{}_1^{(2)} J_1^{(1)} = 0, \qquad \overset{k}{\tilde{X}}{}_1^{(2)} J_2^{(1)} = 0, \qquad \ldots, \qquad \overset{k}{\tilde{X}}{}_{r_2}^{(2)} J_{t_k}^{(1)} = 0.$$

Отже, умови (3) виконуються. Необхідність доведено.

Достатність. Нехай умови (3) задовольняються. З умов

$$\overset{k}{\tilde{X}}{}_1^{(1)} J_1^{(2)} = 0, \qquad \overset{k}{\tilde{X}}{}_1^{(1)} J_2^{(2)} = 0, \qquad \ldots, \qquad \overset{k}{\tilde{X}}{}_{r_1}^{(1)} J_{t_k}^{(2)} = 0$$

випливає [2–4], що функції $J_1^{(2)}, J_2^{(2)}, \ldots, J_{t_k}^{(2)}$ є диференціальними інваріантами k-го порядку підалгебри $L_{r_1}^1$ і з огляду на це мають вигляд

$$J_1^{(2)} = f_1(J_1^{(1)}, J_2^{(1)}, \ldots, J_{t_k}^{(1)}),$$
$$J_2^{(2)} = f_2(J_1^{(1)}, J_2^{(1)}, \ldots, J_{t_k}^{(1)}),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$J_{t_k}^{(2)} = f_{t_k}(J_1^{(1)}, J_2^{(1)}, \ldots, J_{t_k}^{(1)}),$$

де $f_1, f_2, \ldots, f_{t_k}$ – деякі достатньо гладкі функції.

Умови

$$\overset{k}{\tilde{X}}{}_1^{(2)} J_1^{(1)} = 0, \quad \overset{k}{\tilde{X}}{}_1^{(2)} J_2^{(1)} = 0, \quad \ldots, \quad \overset{k}{\tilde{X}}{}_{r_2}^{(2)} J_{t_k}^{(1)} = 0\,,$$

означають, що функції $J_1^{(1)}, J_2^{(1)}, \ldots, J_{t_k}^{(1)}$ є диференціальними інваріантами k-го порядку підалгебри $L_{r_2}^2$ і тому можуть бути записані у вигляді

$$J_1^{(1)} = g_1(J_1^{(2)}, J_2^{(2)}, \ldots, J_{t_k}^{(2)})\,,$$

$$J_2^{(1)} = g_2(J_1^{(2)}, J_2^{(2)}, \ldots, J_{t_k}^{(2)})\,,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$J_{t_k}^{(1)} = g_{t_k}(J_1^{(2)}, J_2^{(2)}, \ldots, J_{t_k}^{(2)})\,,$$

де $g_1, g_2, \ldots, g_{t_k}$ – деякі достатньо гладкі функції.

Таким чином, отримуємо умови (1) і (2). Достатність доведено. ◊

Наслідок. При $k = 0$ доведене вище твердження є критерієм еквівалентності для довільних двох функціональних базисів інваріантів неспряжених підгруп групи G_r^{n+m}.

1. *Кадышевский В. Г.* Новый подход к теории электромагнитных взаимодействий // Физика элементарных частиц и атомного ядра. – 1980. – **11**, № 1. – С. 5–39.
2. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. – Москва: Наука, 1978. – 399 с.
   Те саме: *Ovsiannikov L. V.* Group analysis of differential equations. – New York: Acad. Press, 1982. – 416 p.
3. *Овсянников Л. В.* Лекции по теории групповых свойств дифференциальных уравнений. – Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 1966. – 131 с.
4. *Олвер П.* Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. – Москва: Мир, 1989. – 639 с.
   Те саме: *Olver P. J.* Applications of Lie groups to differential equations. – New York: Springer-Verlag, 1986. – 513 p.
5. *Федорчук Вас., Федорчук Вол.* Про еквівалентність функціональних базисів диференціальних інваріантів довільного скінченного порядку неспряжених підгруп локальних груп Лі точкових перетворень // Сучасні проблеми механіки та математики. – Львів: Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2008. – Т. 3. – С. 202–204.
6. *Фущич В. И.* Представления полной неоднородной группы де Ситтера и уравнения в пятимерном подходе. I // Теорет. и мат. физика. – 1970. – **4**, № 3. – С. 360–382.
7. *Фущич В. И., Баранник Л. Ф., Баранник А. Ф.* Подгрупповой анализ групп Галилея, Пуанкаре и редукция нелинейных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1991. – 304 с.
8. *Фущич В. И., Никитин А. Г.* Симметрия уравнений квантовой механики. – Москва: Наука, 1990. – 400 с.
   Те саме: *Fushchych W. I., Nikitin A. G.* Symmetries of equations of quantum mechanics. – New York: Allerton Press Inc., 1994. – 465 p.
9. *Cherniha R., Serov M., Rassokha I.* Lie symmetries and form-preserving transformations of reaction-diffusion-convection equations // J. Math. Anal. Appl. – 2008. – **342**, No. 2. – P. 1363–1379.
10. *Fedorchuk V. M., Fedorchuk V. I.* First-order differential invariants of the splitting subgroups of the Poincare group P(1,4) // Univ. Iagellonicae Acta Math. – 2006. – No. 44. – P. 35–44.
11. *Golovin S. V.* Partially invariant solutions to ideal magnetohydrodynamics // IMA volumes in mathematics and its applications: Vol. 144. Symmetries and overdetermined systems of differential equations. – New York: Springer, 2008. – P. 367–381.
12. *Ibragimov Nail H.* Symmetries, Lagrangian and conservation laws for the Maxwell equations // Acta Appl. Math. – 2009. – **105,** No. 2. – P. 157–187.

13. *Ignat'eva M. A., Chupakhin A. P.* Integration of the equations of gas dynamics for 2.5-dimensional solutions // Siberian Math. J. – 2007. – **48**, No. 1. – P. 84–94.
14. *Khabirov S. V.* Classification of differentially invariant submodels // Siberian Math. J. – 2004. – **45**, No. 3. – P. 562–579.
15. *Lahno V., Zhdanov R., Magda O.* Group classification and exact solutions of non-linear wave equations // Acta Appl. Math. – 2006. – **91**, No. 3. – P. 253–313.
16. *Lie S.* Über Differentialinvarianten // Math. Ann. – 1884. – **24**, No. 1. – P. 537–578.
17. *Nikitin A. G.* Group classification of systems of non-linear reaction-diffusion equations with general diffusion matrix. I. Generalized Ginzburg–Landau equations // J. Math. Anal. Appl. – 2006. – **324**, No. 1. – P. 615–628.
18. *Nikitin A. G.* Group classification of systems of non-linear reaction-diffusion equations with general diffusion matrix. II. Generalized Turing systems // J. Math. Anal. Appl. – 2007. – **332**, No. 1. – P. 666–690.
19. *Ovsyannikov L. V.* Symmetry of barochronic gas motions // Siberian Math. J. – 2003. – **44**, No. 5. – P. 857–866.
20. *Serov N. I., Zhadan T. O., Blazhko L. M.* Classification of linear representations of the Galilei, Poincaré, and conformal algebras in the case of a two-dimensional vector field and their applications // Ukr. Math. J. – 2006. – **58**, No. 8. – P. 1275–1297.
    Те саме: *Сєров М. І., Жадан Т. О., Блажко Л. М.* Класифікація лінійних зображень алгебр Галілея, Пуанкаре та конформної у випадку двовимірного векторного поля та їх застосування // Укр. мат. журн. – 2006. – **58**, № 8. – С. 1128–1145.
21. *Sheftel M. B., Malykh A. A.* Lift of invariant to non-invariant solutions of complex Monge–Ampère equations // J. Nonlinear Math. Phys. – 2008. – **15**, suppl. 3. – P. 385–395.
22. *Zhalij A., Zhdanov R.* Separation of variables in time-dependent Schrödinger equations // Proc. of the Workshop «Superintegrability in Classical and Quantum Systems» (Montreal, Sept. 16–21, 2002): CRM Proc. and Lecture Notes. – 2004. – Vol. 37. – P. 317–331.
23. *Zhdanov R., Lahno V.* Group classification of the general second-order evolution equation: Semi-simple invariance groups // J. Phys. A. – 2007. – **40**, No. 19. – P. 5083–5103.

ОБ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ БАЗИСОВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИНВАРИАНТОВ НЕСОПРЯЖЕННЫХ ПОДГРУПП ЛОКАЛЬНЫХ ГРУПП ЛИ ТОЧЕЧНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Сформулирован и доказан критерий эквивалентности функциональных базисов дифференциальных инвариантов произвольного конечного порядка k для несопряженных подгрупп локальных групп Ли точечных преобразований.

ON EQUIVALENCE OF FUNCTIONAL BASES OF DIFFERENTIAL INVARIANTS OF NONCONJUGATED SUBGROUPS OF LOCAL LIE GROUPS OF POINT TRANSFORMATIONS

The criterion of equivalency of functional bases of differential invariants of arbitrary finite k order for nonconjugated subgroups of local Lie groups of point transformations is formulated and proved.

[1] Ін-т математики, Педаг. ун-т ім. Комісії Нар. Освіти, Краків, Польща,

[2] Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано 11.03.08