УДК 536.21

Ю. В. Немировский, А. П. Янковский

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ СЛОИСТЫХ АНИЗОТРОПНЫХ НЕОДНОРОДНЫХ ОБОЛОЧЕК

Построены внешние асимптотические разложения решений задачи нестационарной теплопроводности слоистых анизотропных неоднородных оболочек при различных граничных условиях на лицевых поверхностях. Проанализированы получающиеся двумерные разрешающие уравнения и исследованы асимптотические свойства решений задачи теплопроводности. Дано физическое обоснование некоторых особенностей асимптотического разложения температуры.

Настоящая работа является продолжением исследований, опубликованных в [4], где были построены асимптотические разложения решения задачи теплопроводности тонких слоистых пластин постоянной толщины при граничных условиях I-го и III-го рода на лицевых поверхностях. Однако в инженерной практике помимо пластин часто используются тонкостенные конструкции более сложной геометрии − слоистые оболочки и искривленные панели постоянной и переменной толщины. Поэтому актуальной является проблема разработки методов расчета и анализа особенностей решения задачи теплопроводности таких слоистых конструкций. Настоящее исследование посвящено построению асимптотических разложений решений задачи нестационарной теплопроводности слоистых анизотропных неоднородных оболочек по различным малым параметрам при граничных условиях на лицевых поверхностях общего вида.

1. Постановка задачи теплопроводности слоистых анизотропных оболочек. Рассмотрим тонкую оболочку, состоящую из M анизотропных неоднородных слоев, возможно, переменной толщины. Свяжем с оболочкой криволинейную ортогональную систему координат $O\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$ так, чтобы отсчетная поверхность $\bar{x}_3 = 0$ совпадала с одной из лицевых поверхностей оболочки (например, внутренней), а поверхности $\bar{x}_3 = \bar{H}_m = \text{const} > 0$ определяли границы контакта между m-м и $(m+1)$-м слоями, $m = 1, 2, \ldots, M$ (значение $\bar{x}_3 = \bar{H}_0 \equiv 0$ задает отсчетную поверхность, $\bar{x}_3 = \bar{H}_M \equiv \bar{H} = \text{const} > > 0$ − другую лицевую поверхность; слои последовательно пронумерованы от отсчетной поверхности к противоположной лицевой поверхности). Параметры Ламе $\bar{A}_1$, $\bar{A}_2$ непрерывны всюду в оболочке и имеют гладкость, которая потребуется в процессе рассуждений; параметр Ламе $\bar{A}_3$ на границах контакта слоев может испытывать разрыв первого рода (т.е. $\bar{A}_3 = \bar{A}_3^{(m)}$ при $\bar{H}_{m-1} < \bar{x}_3 < \bar{H}_m$, $1 \le m \le M$), внутри каждого m-го слоя этот параметр имеет гладкость, которая потребуется в процессе рассуждений. (В случае слоев постоянной толщины координата $\bar{x}_3 \ge 0$ задает расстояние от произвольной точки оболочки до отсчетной поверхности, при этом $\bar{A}_3 = 1$.) На границах между слоями выполняются условия идеального теплового контакта.

При сделанных предположениях уравнение нестационарной теплопроводности m-го слоя имеет вид

$$\bar{c}^{(m)}\bar{\rho}^{(m)}\frac{\partial \bar{T}^{(m)}}{\partial \bar{t}} = \frac{1}{\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial \bar{x}_i}\left(\sum_{j=1}^{3}\frac{\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3\bar{\lambda}_{ij}^{(m)}}{\bar{A}_i\bar{A}_j}\frac{\partial \bar{T}^{(m)}}{\partial \bar{x}_j}\right) + \\ + \bar{Q}^{(m)}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{t}), \quad \bar{H}_{m-1} \le \bar{x}_3 \le \bar{H}_m, \quad 1 \le m \le M, \qquad (1)$$

где $\overline{T}^{(m)}$ – температура m-го слоя; $\overline{Q}^{(m)}$ – плотность мощности внутренних источников тепла в m-м слое; $\overline{\lambda}_{ij}^{(m)}$ – коэффициенты теплопроводности материала m-го слоя (в общем случае, функции всех пространственных переменных); $\overline{c}^{(m)}$ – удельная теплоемкость материала m-го слоя; $\overline{\rho}^{(m)}$ – объемная плотность материала m-го слоя; $\overline{t}$ – время. Здесь и далее размерные функции и величины будем помечать сверху чертой, а соответствующие им безразмерные функции и величины – обозначать теми же символами, но без черты.

На поверхностях $\overline{x}_3 = \overline{H}_m$ контакта m-го и $(m+1)$-го слоев должны выполняться условия сопряжения решения по тепловому потоку и температуре:

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{\overline{\lambda}_{3i}^{(m)}}{\overline{A}_i} \frac{\partial \overline{T}^{(m)}}{\partial \overline{x}_i} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\overline{\lambda}_{3i}^{(n)}}{\overline{A}_i} \frac{\partial \overline{T}^{(n)}}{\partial \overline{x}_i}, \qquad \overline{T}^{(m)} = \overline{T}^{(n)}, \qquad \overline{x}_3 = \overline{H}_m,$$
$$n = m + 1, \qquad 1 \le m \le M - 1, \tag{2}$$

на лицевых поверхностях оболочки ($\overline{x}_3 = 0$, $\overline{x}_3 = \overline{H}$) заданы граничные условия общего вида

$$\beta^{(-)} \sum_{i=1}^{3} \frac{\overline{\lambda}_{3i}^{(1)}}{\overline{A}_i} \frac{\partial \overline{T}^{(1)}}{\partial \overline{x}_i} \bigg|_{\overline{x}_3 = 0} = \gamma^{(-)} \overline{Q}^{(-)}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{t}) + \overline{\delta}^{(-)} \overline{\alpha}_{(-)} \big(\overline{T}^{(1)}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, 0, \overline{t}) -$$
$$- \overline{T}_{\infty}^{(-)}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{t}) \big),$$
$$-\beta^{(+)} \sum_{i=1}^{3} \frac{\overline{\lambda}_{3i}^{(M)}}{\overline{A}_i} \frac{\partial \overline{T}^{(M)}}{\partial \overline{x}_i} \bigg|_{\overline{x}_3 = \overline{H}} = \gamma^{(+)} \overline{Q}^{(+)}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{t}) +$$
$$+ \overline{\delta}^{(+)} \overline{\alpha}_{(+)} \big(\overline{T}^{(M)}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{H}, \overline{t}) - \overline{T}_{\infty}^{(+)}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{t}) \big), \tag{3}$$

где $\overline{Q}^{(\pm)}$ – заданные на лицевых поверхностях проекции вектора теплового потока на направление внешней нормали; $\overline{\alpha}_{(\pm)}$ – коэффициенты конвективного теплообмена с окружающей средой на внешней (+) и внутренней (−) – отсчетной – поверхностях оболочки; $\overline{T}_{\infty}^{(\pm)}$ – температура окружающей среды со стороны внешней (+) и внутренней (−) лицевой поверхности оболочки; $\beta^{(\pm)}$, $\gamma^{(\pm)}$, $\overline{\delta}^{(\pm)}$ – функции переключения, позволяющие задавать тот или иной тип граничных условий на внешней (+) и внутренней (−) лицевых поверхностях.

На торцевой поверхности $\overline{S}$ (кромке) оболочки также заданы граничные условия, аналогичные (3):

$$-\beta \sum_{i=1}^{3} \overline{n}_i \left(\sum_{j=1}^{3} \frac{\overline{\lambda}_{ij}^{(m)}}{\overline{A}_j} \frac{\partial \overline{T}^{(m)}}{\partial \overline{x}_j} \right) = \gamma \overline{q}_n^{(m)}(\overline{S}, \overline{t}) + \delta \overline{\alpha}^{(m)} \big(\overline{T}^{(m)}(\overline{S}, \overline{t}) - \overline{T}_{\infty}(\overline{S}, \overline{t}) \big),$$
$$(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3) \in \overline{S}, \qquad \overline{t} \ge \overline{t}_0, \qquad 1 \le m \le M, \tag{4}$$

где $\overline{n}_i$ – компоненты вектора единичной нормали к торцевой поверхности оболочки; $\overline{q}_n^{(m)}$ – заданный тепловой поток через торцевую поверхность m-го слоя; $\overline{\alpha}^{(m)}$ – коэффициент теплообмена по закону Ньютона между m-м слоем и окружающей средой на торцевой поверхности; $\overline{T}_{\infty}$ – температура окружающей среды со стороны торцевой поверхности (или температура торцевой поверхности, смотря по смыслу); β, γ, δ – функции переключения, позволяющие задавать тот или иной тип граничных условий на торцевой поверхности.

В момент времени $\bar{t}_0$ в m-м слое задано начальное условие

$$\bar{T}^{(m)}(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\bar{x}_3,\bar{t}_0)=\bar{T}_0^{(m)}(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\bar{x}_3), \qquad 1\le m\le M\,, \tag{5}$$

где $\bar{T}_0^{(m)}$ – заданная функция.

Обезразмерим соотношения (1)–(5). С этой целью введем безразмерные независимые переменные

$$\bar{A}_i d\bar{x}_i=\bar{L}A_i dx_i, \qquad i=1,2, \qquad \bar{A}_3 d\bar{x}_3=\bar{H}_* A_3 dx_3\,,$$
$$t=\bar{t}/\bar{t}_*, \qquad \bar{t}_*>0, \qquad \bar{L}=\min(\bar{R},\bar{a})\,, \tag{6}$$

где $\bar{R}$ – характерный радиус кривизны отсчетной поверхности оболочки; $\bar{a}$ – характерный размер оболочки в плане (для пологих оболочек и искривленных панелей); $\bar{H}_*$ – характерная толщина оболочки, $\bar{t}_*$ – характерное время, в течение которого рассматривается процесс нестационарной теплопроводности.

Уравнение (1) обезразмерим умножением на $A_1A_2A_3\bar{H}_*^2/(\bar{\lambda}_*\bar{T}_*)$, тогда с учетом (6) получим

$$\varepsilon^2 C^{(m)}\partial_t T^{(m)}=\varepsilon^2 L_2^{(m)}\big(T^{(m)}\big)+\varepsilon L_1^{(m)}\big(T^{(m)}\big)+\partial_3\big(\lambda_{33}^{(m)}\partial_3 T^{(m)}\big)+\varepsilon^2 Q^{(m)}(\mathbf{x},t)\,,$$
$$\mathbf{x}=\{x_1,x_2,x_3\}\,, \tag{7}$$

где

$$L_1^{(m)}\big(T^{(m)}\big)\equiv\partial_1\big(\lambda_{13}^{(m)}\partial_3 T^{(m)}\big)+\partial_2\big(\lambda_{23}^{(m)}\partial_3 T^{(m)}\big)+\partial_3\big(\lambda_{31}^{(m)}\partial_1 T^{(m)}+\lambda_{32}^{(m)}\partial_2 T^{(m)}\big),$$
$$L_2^{(m)}\big(T^{(m)}\big)\equiv\partial_1\big(\lambda_{11}^{(m)}\partial_1 T^{(m)}+\lambda_{12}^{(m)}\partial_2 T^{(m)}\big)+\partial_2\big(\lambda_{21}^{(m)}\partial_1 T^{(m)}+\lambda_{22}^{(m)}\partial_2 T^{(m)}\big)\,, \tag{8}$$

$\varepsilon=\bar{H}_*/\bar{L}$ – малый параметр; ∂_i – оператор частного дифференцирования по безразмерной пространственной переменной x_i, $i=1,2,3$; ∂_t – оператор частного дифференцирования по безразмерному времени t.

Первое из условий сопряжения (2) обезразмерим умножением на $A_1A_2\bar{H}_*/(\bar{\lambda}_*\bar{T}_*)$, а второе из условий (2) – делением на $\bar{T}_*=\text{const}$:

$$\varepsilon\big(\lambda_{31}^{(m)}\partial_1 T^{(m)}+\lambda_{32}^{(m)}\partial_2 T^{(m)}\big)+\lambda_{33}^{(m)}\partial_3 T^{(m)}=$$
$$=\varepsilon\big(\lambda_{31}^{(n)}\partial_1 T^{(n)}+\lambda_{32}^{(n)}\partial_2 T^{(n)}\big)+\lambda_{33}^{(n)}\partial_3 T^{(n)}\,,$$
$$T^{(m)}=T^{(n)}, \qquad x_3=H_m, \qquad n=m+1, \quad 1\le m\le M-1, \tag{9}$$

граничные условия (3) обезразмерим умножением на $A_1A_2\bar{H}_*/(\bar{\lambda}_*\bar{T}_*)$, а (4) – умножением на $A_1A_2A_3\bar{H}_*/(\bar{\lambda}_*\bar{T}_*)$:

$$\beta^{(-)}\big[\varepsilon\big(\lambda_{31}^{(1)}\partial_1 T^{(1)}+\lambda_{32}^{(1)}\partial_2 T^{(1)}\big)+\lambda_{33}^{(1)}\partial_3 T^{(1)}\big]=\varepsilon\gamma^{(-)}Q^{(-)}+$$
$$+\varepsilon\delta^{(-)}\alpha_{(-)}\big(T^{(1)}-T_\infty^{(-)}\big), \qquad x_3=0\,,$$
$$-\beta^{(+)}\big[\varepsilon\big(\lambda_{31}^{(M)}\partial_1 T^{(1)}+\lambda_{32}^{(M)}\partial_2 T^{(M)}\big)+\lambda_{33}^{(M)}\partial_3 T^{(M)}\big]=\varepsilon\gamma^{(+)}Q^{(+)}+$$
$$+\varepsilon\delta^{(+)}\alpha_{(+)}\big(T^{(M)}-T_\infty^{(+)}\big), \qquad x_3=H\,, \tag{10}$$

$$-\beta\varepsilon\sum_{p=1}^{3}n_p\sum_{\ell=1}^{2}\lambda_{p\ell}^{(m)}\partial_\ell T^{(m)}-\beta\sum_{p=1}^{3}n_p\lambda_{p3}^{(m)}\partial_3 T^{(m)}=\varepsilon\gamma q_n^{(m)}+\varepsilon\delta\alpha^{(m)}\big(T^{(m)}-T_\infty\big),$$
$$(x_1,x_2,x_3)\in S, \qquad t\ge t_0, \qquad 1\le m\le M\,, \tag{11}$$

начальное условие (5) обезразмерим делением на $\bar{T}_*=\text{const}$:

$$T^{(m)}(\mathbf{x},t_0)=T_0^{(m)}(\mathbf{x}), \qquad 1\le m\le M. \tag{12}$$

В соотношениях (7)–(12) использованы следующие формулы обезразмеривания и обозначения:

$$T^{(m)}=\frac{1}{\bar{T}_*}\bar{T}^{(m)},\quad \lambda_{ij}^{(m)}=\frac{1}{A_iA_j\bar{\lambda}_*}A_1A_2A_3\bar{\lambda}_{ij}^{(m)},\quad Q^{(m)}=\frac{1}{\bar{\lambda}_*\bar{T}_*}A_1A_2A_3\bar{L}^2\bar{Q}^{(m)},$$

$$T_\infty^{(\pm)}=\frac{1}{\bar{T}_*}\bar{T}_\infty^{(\pm)},\quad Q^{(\pm)}=\frac{1}{\bar{\lambda}_*\bar{T}_*}A_1A_2\bar{L}\bar{Q}^{(\pm)},\quad \alpha_{(\pm)}=\frac{1}{\bar{\lambda}_*}A_1A_2\bar{L}\,\bar{\alpha}_{(\pm)},\quad T_\infty=\frac{\bar{T}_\infty}{\bar{T}_*},$$

$$T_0=\frac{\bar{T}_0}{\bar{T}_*},\quad q_n^{(m)}=\frac{1}{\bar{\lambda}_*\bar{T}_*}A_1A_2A_3\bar{L}\bar{q}_n^{(m)},\quad \alpha^{(m)}=\frac{1}{\bar{\lambda}_*}A_1A_2A_3\bar{L}\bar{\alpha}^{(m)},\quad t_0=\frac{\bar{t}_0}{\bar{t}_*},$$

$$C^{(m)}=\frac{1}{\bar{\lambda}_*\bar{t}_*}A_1A_2A_3\bar{L}^2\bar{c}^{(m)}\bar{\rho}^{(m)},\quad \delta^{(\pm)}=A_1A_2\bar{\delta}^{(\pm)},\quad n_i=A_i\bar{n}_i,$$

$$i,j=1,2,3,\qquad 1\le m\le M, \tag{13}$$

$\bar{T}_*$ – некоторое характерное значение температуры конструкции (например, температура естественного состояния); $\bar{\lambda}_*$ – характерное значение коэффициента теплопроводности материалов слоев оболочки (например, максимальная по слоям величина наибольшего из главных значений тензора коэффициентов теплопроводности $\bar{\lambda}_{ij}^{(m)}$); $C^{(m)}$ – безразмерная теплоемкость (характерное значение времени $\bar{t}_*$ в (7), (13) выбрано так, чтобы $C^{(m)}$ имела порядок единицы).

Если считать, что изменению малого геометрического параметра ε соответствует изменение толщины оболочки $\bar{H}_*$ (толщины слоев при этом изменяются пропорционально изменению $\bar{H}_*$) при фиксированной геометрии отсчетной поверхности конструкции (при фиксированном характерном размере $\bar{L}$), то основные функции и величины, приведенные в (13), имеют следующие асимптотические свойства при $\varepsilon\to 0$:

$$\lambda_{ij}^{(m)}=O(1),\quad i,j=1,2,3,\quad Q^{(m)}=O(1),\quad T_\infty^{(\pm)}=O(1),\quad Q^{(\pm)}=O(1),$$

$$T_\infty=O(1),\quad q_n^{(m)}=O(1),\quad \alpha^{(m)}=O(1),\quad C^{(m)}=O(1),\quad T_0^{(m)}=O(1). \tag{14}$$

Как было показано в [4], в граничных условиях общего вида (10) безразмерные коэффициенты $\alpha_{(\pm)}$, характеризующие критерий Био [3] на лицевых поверхностях, могут быть порядка единицы, а могут быть большими и малыми величинами по сравнению с единицей. Следовательно, при определенных условиях теплообмена на лицевых поверхностях безразмерные числа Био $\alpha_{(\pm)}$ можно рассматривать как независимые от ε малые или большие параметры.

Далее будем отдельно рассматривать случаи больших и малых значений чисел Био на лицевых поверхностях оболочки.

2. Случай граничных условий II-го и III-го рода при малых числах Био на лицевых поверхностях оболочки. Пусть на обеих лицевых поверхностях числа Био $\alpha_{(+)}$, $\alpha_{(-)}$, являются малыми независимыми параметрами (при этом в (10) следует принять $\beta^{(\pm)}=1$). Так как $\alpha_{(+)}$, $\alpha_{(-)}$ входят лишь в граничные условия (10), стоят сомножителями при функциях $T^{(1)},T^{(M)}$, а не при их производных, и для основных функций и величин, приведенных в (13), выполняются асимптотические свойства, аналогичные (14), при $\alpha_{(+)}\to$ $\to 0$, $\alpha_{(-)}\to 0$, то начально-краевая задача (7)–(12) является задачей с регулярным возмущением по параметрам $\alpha_{(+)}$, $\alpha_{(-)}$. Для упрощения решения этой начально-краевой задачи используем асимптотическое разложение

$$T^{(m)}(x_1,x_2,x_3,t)\sim\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}T_{ij}^{(m)}(x_1,x_2,x_3,t)\alpha_{(-)}^{i}\alpha_{(+)}^{j},\qquad 0\le\alpha_{(-)},\,\alpha_{(+)}<1. \tag{15}$$

Подставим (15) в (7)–(12) и соберем слагаемые при одинаковых степенях $\alpha_{(-)}^{i}\alpha_{(+)}^{j}$, тогда получим следующую цепочку равенств:

$$\varepsilon^2C^{(m)}\partial_tT_{ij}^{(m)}=\varepsilon^2L_2^{(m)}(T_{ij}^{(m)})+\varepsilon L_1^{(m)}(T_{ij}^{(m)})+\partial_3(\lambda_{33}^{(m)}\partial_3T_{ij}^{(m)})+$$
$$+\delta_{0i}\delta_{0j}\varepsilon^2Q^{(m)}(\mathbf{x},t), \tag{16}$$

$$\varepsilon(\lambda_{31}^{(m)}\partial_1T_{ij}^{(m)}+\lambda_{32}^{(m)}\partial_2T_{ij}^{(m)})+\lambda_{33}^{(m)}\partial_3T_{ij}^{(m)}=\varepsilon(\lambda_{31}^{(n)}\partial_1T_{ij}^{(n)}+\lambda_{32}^{(n)}\partial_2T_{ij}^{(n)})+$$
$$+\lambda_{33}^{(n)}\partial_3T_{ij}^{(n)},$$
$$T_{ij}^{(m)}=T_{ij}^{(n)},\qquad x_3=H_m,\qquad n=m+1,\quad 1\le m\le M-1, \tag{17}$$

$$\varepsilon(\lambda_{31}^{(1)}\partial_1T_{ij}^{(1)}+\lambda_{32}^{(1)}\partial_2T_{ij}^{(1)})+\lambda_{33}^{(1)}\partial_3T_{ij}^{(1)}=\varepsilon\delta_{0i}\delta_{0j}\gamma^{(-)}Q^{(-)}-\varepsilon\delta^{(-)}\delta_{1i}\delta_{0j}T_\infty^{(-)}+$$
$$+\varepsilon\delta^{(-)}T_{i-1,j}^{(1)},\qquad x_3=0,$$
$$-\left[\varepsilon(\lambda_{31}^{(M)}\partial_1T_{ij}^{(M)}+\lambda_{32}^{(M)}\partial_2T_{ij}^{(M)})+\lambda_{33}^{(M)}\partial_3T_{ij}^{(M)}\right]=\varepsilon\delta_{0i}\delta_{0j}\gamma^{(+)}Q^{(+)}-$$
$$-\varepsilon\delta_{0i}\delta_{1j}\delta^{(+)}T_\infty^{(+)}+\varepsilon\delta^{(+)}T_{i,j-1}^{(M)},\qquad x_3=H, \tag{18}$$

$$-\beta\varepsilon\sum_{p=1}^{3}n_p\sum_{\ell=1}^{2}\lambda_{p\ell}^{(m)}\partial_\ell T_{ij}^{(m)}-\beta\sum_{p=1}^{3}n_p\lambda_{p3}^{(m)}\partial_3T_{ij}^{(m)}=\varepsilon\delta\alpha^{(m)}T_{ij}^{(m)}+$$
$$+\varepsilon\delta_{0i}\delta_{0j}(\gamma q_n^{(m)}-\delta\alpha^{(m)}T_\infty),\qquad (x_1,x_2,x_3)\in S,\quad t\ge t_0,$$
$$1\le m\le M, \tag{19}$$

$$T_{ij}^{(m)}(\mathbf{x},t_0)=\delta_{0i}\delta_{0j}T_0^{(m)}(\mathbf{x}),\quad 1\le m\le M,\quad i,\,j=0,1,2,3\ldots, \tag{20}$$

где $\delta_{k\ell}$ – символ Кронекера. В первом равенстве (18) при $i=0$ и во втором равенстве (18) при $j=0$ следует учесть

$$T_{-1,j}^{(m)}\equiv0,\qquad T_{i,-1}^{(m)}\equiv0,\qquad 1\le m\le M,\qquad i,j=0,1,2,3\ldots. \tag{21}$$

Начально-краевые задачи (16)–(20) с учетом (21) можно последовательно проинтегрировать при всех $i,j\ge0$, т.е. можно последовательно определить все коэффициенты разложения (15).

Наличие малого геометрического параметра ε при высших производных в уравнении (16), в условиях сопряжения (17) и граничных условиях (18), (19) указывает на то, что начально-краевая задача (16)–(20) при любых $i,j\ge0$ является задачей с сингулярным возмущением, поэтому решение этой задачи следует разыскивать в виде

$$T_{ij}^{(m)}=T_{*ij}^{(m)}+T_{\tau ij}^{(m)}+T_{\mathrm{b}ij}^{(m)},\qquad 1\le m\le M,\qquad i,j=0,1,2,3\ldots, \tag{22}$$

где $T_{*ij}^{(m)}$ – внешнее асимптотическое разложение функции $T_{ij}^{(m)}$, характеризующее основное температурное поле в m-м слое; $T_{\tau ij}^{(m)}$ – поправка к внешнему разложению в окрестности начального момента времени $t=t_0$; $T_{\mathrm{b}ij}^{(m)}$ – поправка к внешнему разложению в пограничном слое в окрестности торцевой поверхности оболочки.

Далее настоящее исследование посвящено определению внешнего асимптотического разложения $T_{*ij}^{(m)}$. Чтобы получить для определения $T_{*ij}^{(m)}$ непротиворечивую цепочку равенств, асимптотическое разложение следует задать в виде

$$T_{*ij}^{(m)}(x_1,x_2,x_3,t) \sim \frac{1}{\varepsilon^{i+j+1}} \sum_{k=0}^{\infty} T_{ijk}^{(m)}(x_1,x_2,x_3,t)\varepsilon^k, \quad 1 \le m \le M, \quad i,j \ge 0. \tag{23}$$

Подставим (23) в (16)–(20) и соберем слагаемые при одинаковых степенях ε, тогда получим следующую цепочку равенств для определения функций $T_{ijk}^{(m)}(\mathbf{x},t)$:

$$\partial_3\left(\lambda_{33}^{(m)}\partial_3 T_{ij0}^{(m)}\right) = 0, \qquad 1 \le m \le M, \tag{24}$$

$$\lambda_{33}^{(m)}\partial_3 T_{ij0}^{(m)} = \lambda_{33}^{(n)}\partial_3 T_{ij0}^{(n)}, \qquad T_{ij0}^{(m)}(\mathbf{x},t) = T_{ij0}^{(n)}(\mathbf{x},t), \qquad x_3 = H_m,$$
$$n = m+1, \qquad 1 \le m \le M-1, \tag{25}$$

$$\lambda_{33}^{(1)}\partial_3 T_{ij0}^{(1)} = 0, \quad x_3 = 0, \quad -\lambda_{33}^{(M)}\partial_3 T_{ij0}^{(M)} = 0, \quad x_3 = H, \tag{26}$$

$$-\beta\left(n_1\lambda_{13}^{(m)} + n_2\lambda_{23}^{(m)} + n_3\lambda_{33}^{(m)}\right)\partial_3 T_{ij0}^{(m)} = 0, \qquad (x_1,x_2,x_3) \in S,$$
$$1 \le m \le M, \tag{27}$$

$$T_{ij0}^{(m)}(\mathbf{x},t_0) = 0, \qquad 1 \le m \le M, \tag{28}$$

$$\partial_3\left(\lambda_{33}^{(m)}\partial_3 T_{ij1}^{(m)}\right) + L_1^{(m)}\left(T_{ij0}^{(m)}\right) = 0, \qquad 1 \le m \le M, \tag{29}$$

$$\lambda_{33}^{(m)}\partial_3 T_{ij1}^{(m)} + \lambda_{31}^{(m)}\partial_1 T_{ij0}^{(m)} + \lambda_{32}^{(m)}\partial_2 T_{ij0}^{(m)} = \lambda_{33}^{(n)}\partial_3 T_{ij1}^{(n)} + \lambda_{31}^{(n)}\partial_1 T_{ij0}^{(n)} + \lambda_{32}^{(n)}\partial_2 T_{ij0}^{(n)},$$
$$T_{ij1}^{(m)}(\mathbf{x},t) = T_{ij1}^{(n)}(\mathbf{x},t), \qquad x_3 = H_m, \quad n = m+1, \quad 1 \le m \le M-1, \tag{30}$$

$$\lambda_{33}^{(1)}\partial_3 T_{ij1}^{(1)} + \lambda_{31}^{(1)}\partial_1 T_{ij0}^{(1)} + \lambda_{32}^{(1)}\partial_2 T_{ij0}^{(1)} = 0, \qquad x_3 = 0,$$
$$-\left(\lambda_{33}^{(M)}\partial_3 T_{ij1}^{(M)} + \lambda_{31}^{(M)}\partial_1 T_{ij0}^{(M)} + \lambda_{32}^{(M)}\partial_2 T_{ij0}^{(M)}\right) = 0, \qquad x_3 = H, \tag{31}$$

$$-\beta\sum_{p=1}^{3} n_p \sum_{\ell=1}^{2} \lambda_{p\ell}^{(m)}\partial_\ell T_{ij0}^{(m)} - \beta\sum_{p=1}^{3} n_p\lambda_{p3}^{(m)}\partial_3 T_{ij1}^{(m)} - \delta\alpha^{(m)}T_{ij0}^{(m)} = 0,$$
$$(x_1,x_2,x_3) \in S, \qquad 1 \le m \le M, \tag{32}$$

$$T_{ij1}^{(m)}(\mathbf{x},t_0) = \delta_{0i}\delta_{0j}T_0^{(m)}(\mathbf{x}), \qquad 1 \le m \le M, \tag{33}$$

$$\partial_3\left(\lambda_{33}^{(m)}\partial_3 T_{ij2}^{(m)}\right) + L_1^{(m)}\left(T_{ij1}^{(m)}\right) + L_2^{(m)}\left(T_{ij0}^{(m)}\right) - C^{(m)}\partial_t T_{ij0}^{(m)} = 0,$$
$$1 \le m \le M, \tag{34}$$

$$\lambda_{33}^{(m)}\partial_3 T_{ij2}^{(m)} + \lambda_{31}^{(m)}\partial_1 T_{ij1}^{(m)} + \lambda_{32}^{(m)}\partial_2 T_{ij1}^{(m)} = \lambda_{33}^{(n)}\partial_3 T_{ij2}^{(n)} + \lambda_{31}^{(n)}\partial_1 T_{ij1}^{(n)} + \lambda_{32}^{(n)}\partial_2 T_{ij1}^{(n)},$$
$$T_{ij2}^{(m)}(\mathbf{x},t) = T_{ij2}^{(n)}(\mathbf{x},t), \qquad x_3 = H_m, \quad n = m+1, \quad 1 \le m \le M-1, \tag{35}$$

$$\lambda_{33}^{(1)}\partial_3 T_{ij2}^{(1)} + \lambda_{31}^{(1)}\partial_1 T_{ij1}^{(1)} + \lambda_{32}^{(1)}\partial_2 T_{ij1}^{(1)} = \delta_{0i}\delta_{0j}\gamma^{(-)}Q^{(-)} + \delta^{(-)}T_{i-1,j,0}^{(1)}, \qquad x_3 = 0,$$
$$-\left(\lambda_{33}^{(M)}\partial_3 T_{ij2}^{(M)} + \lambda_{31}^{(M)}\partial_1 T_{ij1}^{(M)} + \lambda_{32}^{(M)}\partial_2 T_{ij1}^{(M)}\right) = \delta_{0i}\delta_{0j}\gamma^{(+)}Q^{(+)} + \delta^{(+)}T_{i,j-1,0}^{(M)},$$
$$x_3 = H, \tag{36}$$

$$-\beta\sum_{p=1}^{3} n_p \sum_{\ell=1}^{2} \lambda_{p\ell}^{(m)}\partial_\ell T_{ij1}^{(m)} - \beta\sum_{p=1}^{3} n_p\lambda_{p3}^{(m)}\partial_3 T_{ij2}^{(m)} - \delta\alpha^{(m)}T_{ij1}^{(m)} = \delta_{0i}\delta_{0j}\left(\gamma q_n^{(m)} - \right.$$
$$\left. - \delta\alpha^{(m)}T_\infty\right), \quad (x_1,x_2,x_3) \in S, \quad 1 \le m \le M, \tag{37}$$

$$T_{ij2}^{(m)}(\mathbf{x},t_0) = 0, \qquad 1 \le m \le M, \tag{38}$$

$$\partial_3\left(\lambda_{33}^{(m)}\partial_3 T_{ijk}^{(m)}\right) + L_1^{(m)}\left(T_{ijk-1}^{(m)}\right) + L_2^{(m)}\left(T_{ijk-2}^{(m)}\right) - C^{(m)}\partial_t T_{ijk-2}^{(m)} =$$
$$= -\delta_{0i}\delta_{0j}\delta_{3k}Q^{(m)}(\mathbf{x},t), \qquad 1 \le m \le M, \tag{39}$$

$$\lambda_{33}^{(m)}\partial_3 T_{ijk}^{(m)} + \lambda_{31}^{(m)}\partial_1 T_{ijk-1}^{(m)} + \lambda_{32}^{(m)}\partial_2 T_{ijk-1}^{(m)} = \lambda_{33}^{(n)}\partial_3 T_{ijk}^{(n)} + \lambda_{31}^{(n)}\partial_1 T_{ijk-1}^{(n)} +$$
$$+ \lambda_{32}^{(n)}\partial_2 T_{ijk-1}^{(n)},$$

$$T_{ijk}^{(m)}(\mathbf{x},t) = T_{ijk}^{(n)}(\mathbf{x},t), \quad x_3 = H_m, \quad n = m+1, \quad 1 \le m \le M-1\,, \tag{40}$$

$$\lambda_{33}^{(1)}\partial_3 T_{ijk}^{(1)} + \lambda_{31}^{(1)}\partial_1 T_{ijk-1}^{(1)} + \lambda_{32}^{(1)}\partial_2 T_{ijk-1}^{(1)} = \delta^{(-)} T_{i-1,j,k-2}^{(1)} - \delta_{1i}\delta_{0j}\delta_{3k}\delta^{(-)} T_\infty^{(-)}\,,$$
$$x_3 = 0\,,$$
$$-\left(\lambda_{33}^{(M)}\partial_3 T_{ijk}^{(M)} + \lambda_{31}^{(M)}\partial_1 T_{ijk-1}^{(M)} + \lambda_{32}^{(M)}\partial_2 T_{ijk-1}^{(M)}\right) = \delta^{(+)} T_{i,j-1,k-2}^{(M)} - \delta_{0i}\delta_{1j}\delta_{3k}\delta^{(+)} T_\infty^{(+)}\,,$$
$$x_3 = H\,, \tag{41}$$

$$-\beta\sum_{p=1}^{3} n_p \sum_{\ell=1}^{2} \lambda_{p\ell}^{(m)}\partial_\ell T_{ijk-1}^{(m)} - \beta\sum_{p=1}^{3} n_p \lambda_{p3}^{(m)}\partial_3 T_{ijk}^{(m)} - \delta\alpha^{(m)} T_{ijk-1}^{(m)} = 0\,,$$
$$(x_1, x_2, x_3) \in S, \qquad 1 \le m \le M, \qquad k = 3,4,5\ldots, \tag{42}$$

$$T_{ijk}^{(m)}(\mathbf{x}, t_0) = 0, \qquad 1 \le m \le M, \quad k = 3,4,5\ldots, \quad i,j = 0,1,2,3\ldots, \tag{43}$$

где согласно (21), (23) следует учесть

$$T_{-1,j,k}^{(m)} \equiv 0, \quad T_{i,-1,k}^{(m)} \equiv 0, \qquad 1 \le m \le M, \quad i,\,j,\,k = 0,1,2,3\ldots. \tag{44}$$

Построим решение системы (24)–(43). Интегрируя уравнение (24), с учетом (25), (26) и $\lambda_{33}^{(m)} > 0$ (в силу постулата Онзагера [2] и $A_i > 0$, $i = 1,2,3$) получим

$$T_{ij0}^{(m)}(\mathbf{x},t) = \theta_{ij0}(x_1, x_2, t), \qquad 1 \le m \le M\,, \tag{45}$$

где θ_{ij0} – произвольная функция, подлежащая в последующем определению. Из (45) следует тождественное выполнение граничного условия (27) на кромке оболочки, а из (28) с учетом (45) вытекает начальное условие

$$\theta_{ij0}(x_1, x_2, t_0) = 0, \qquad 1 \le m \le M. \tag{46}$$

Интегрируя уравнение (29) по переменной x_3, с учетом (45), (8), (30), (31) получим

$$\lambda_{33}^{(m)}\partial_3 T_{ij1}^{(m)} + \lambda_{31}^{(m)}\partial_1 T_{ij0}^{(m)} + \lambda_{32}^{(m)}\partial_2 T_{ij0}^{(m)} = 0\,, \tag{47}$$

отсюда

$$T_{ij1}^{(m)}(\mathbf{x},t) = \theta_{ij1}(x_1, x_2, t) - F_{ij1}^{(m)}(\mathbf{x},t), \qquad 1 \le m \le M\,, \tag{48}$$

где

$$F_{ij1}^{(m)}(\mathbf{x},t) \equiv \int_{H_{m-1}}^{x_3} \left(\lambda_{31}^{(m)}\partial_1\theta_{ij0} + \lambda_{32}^{(m)}\partial_2\theta_{ij0}\right)\frac{1}{\lambda_{33}^{(m)}}\,dx_3 +$$
$$+\sum_{\ell=1}^{m-1}\int_{H_{\ell-1}}^{H_\ell} \left(\lambda_{31}^{(\ell)}\partial_1\theta_{ij0} + \lambda_{32}^{(\ell)}\partial_2\theta_{ij0}\right)\frac{1}{\lambda_{33}^{(\ell)}}\,dx_3\,, \tag{49}$$

$\theta_{ij1}(x_1, x_2, t) \equiv T_{ij1}^{(1)}(x_1, x_2, 0, t)$ – произвольная функция, подлежащая определению. Выразим из (47) производную $\partial_3 T_{ij1}^{(m)}$ и подставим в (32), тогда

$$-\beta\sum_{p=1}^{3} n_p \sum_{\ell=1}^{2} \lambda_{p\ell}^{(m)}\partial_\ell\theta_{ij0} + \beta\sum_{p=1}^{3} n_p \lambda_{p3}^{(m)}\,\frac{\lambda_{31}^{(m)}\partial_1\theta_{ij0} + \lambda_{32}^{(m)}\partial_2\theta_{ij0}}{\lambda_{33}^{(m)}} - \delta\alpha^{(m)}\theta_{ij0} = 0\,,$$
$$(x_1, x_2, x_3) \in S, \qquad 1 \le m \le M. \tag{50}$$

Так как материалы слоев предполагаются произвольными (в общем случае, и неоднородными по толщине), а функция θ_{ij0} не зависит от переменной x_3, граничное условие (50) не может быть выполнено точно во всех точках торцевой поверхности оболочки, поэтому здесь и далее граничные условия на кромках оболочки (50), (37), (42) будем выполнять в интегральном смысле (проинтегрировав по толщине оболочки указанные равенства), что является необходимым и достаточным условием для затухания пограничных слоев [3].

Проинтегрировав соотношение (50) по толщине оболочки, получим граничное условие на кромке для функции θ_{ij0}:

$$\beta\sum_{\ell=1}^{2}\partial_\ell\theta_{ij0}\sum_{m=1}^{M}\int\limits_{H_{m-1}}^{H_m}\left[-\sum_{p=1}^{3}n_p\lambda_{p\ell}^{(m)}+\lambda_{3\ell}^{(m)}\sum_{p=1}^{3}\frac{n_p\lambda_{p3}^{(m)}}{\lambda_{33}^{(m)}}\right]dx_3-$$

$$-\delta\theta_{ij0}\sum_{m=1}^{M}\int\limits_{H_{m-1}}^{H_m}\alpha^{(m)}dx_3=0,\qquad (x_1,x_2)\in\Gamma\,,\qquad(51)$$

где Γ − контур, ограничивающий отсчетную поверхность оболочки, занимающую область G в пространстве переменных x_1, x_2.

Подставим (48) в начальное условие (33), тогда

$$\theta_{ij1}(x_1,x_2,t_0)-F_{ij1}^{(m)}(\mathbf{x},t_0)=\delta_{0i}\delta_{0j}T_0^{(m)}(\mathbf{x})\,.\qquad(52)$$

Так как начальное распределение температуры $T_0^{(m)}(\mathbf{x})$ произвольно, функция θ_{ij1} не зависит от переменной x_3 и функция $F_{ij1}^{(m)}$ по переменной x_3 имеет вполне определенную зависимость (49), то начальное условие (52) в общем случае не может быть выполнено точно во всех точках оболочки, поэтому здесь и далее начальные условия (52), (38), (43) будем выполнять в интегральном смысле (проинтегрировав по толщине оболочки эти равенства), что является необходимым и достаточным условием для затухания поправки $T_{\tau ij}^{(m)}$ в (22) в окрестности начального момента времени t_0.

Проинтегрировав равенство (52) по толщине оболочки, получим начальное условие для функции θ_{ij1}:

$$\theta_{ij1}(x_1,x_2,t_0)=\frac{1}{H}\sum_{m=1}^{M}\int\limits_{H_{m-1}}^{H_m}\left[\delta_{0i}\delta_{0j}T_0^{(m)}(\mathbf{x})+F_{ij1}^{(m)}(\mathbf{x},t_0)\right]dx_3,\quad (x_1,x_2)\in G\,,\qquad(53)$$

где $x_3=H>0$ − аппликата внешней лицевой поверхности в безразмерной системе координат.

Уравнение (34) с учетом (8), (45) и (47) можно преобразовать к виду

$$\partial_3(\lambda_{33}^{(m)}\partial_3T_{ij2}^{(m)}+\lambda_{31}^{(m)}\partial_1T_{ij1}^{(m)}+\lambda_{32}^{(m)}\partial_2T_1^{(m)})=-\sum_{\ell=1}^{2}\partial_\ell(\lambda_{\ell1}^{(m)}\partial_1\theta_{ij0}+$$

$$+\lambda_{l2}^{(m)}\partial_2\theta_{ij0})+\sum_{\ell=1}^{2}\partial_\ell\left[\lambda_{\ell3}^{(m)}(\lambda_{31}^{(m)}\partial_1\theta_{ij0}+\right.$$

$$\left.+\lambda_{32}^{(m)}\partial_2\theta_{ij0})\frac{1}{\lambda_{33}^{(m)}}\right]+C^{(m)}\partial_t\theta_{ij0}\,.$$

Проинтегрировав по x_3 это уравнение, с учетом (35), (45) и первого равенства (36) получим

$$\lambda_{33}^{(m)}\partial_3T_{ij2}^{(m)}+\lambda_{31}^{(m)}\partial_1T_{ij1}^{(m)}+\lambda_{32}^{(m)}\partial_2T_{ij1}^{(m)}=Q_{ij2}^{(m)}(\mathbf{x},t),\ \ 1\le m\le M\,,\qquad(54)$$

где

$$Q_{ij2}^{(m)}(\mathbf{x},t)\equiv\delta_{0i}\delta_{0j}\gamma^{(-)}Q^{(-)}+\delta^{(-)}\theta_{i-1,j,0}+\int\limits_{H_{m-1}}^{x_3}\left\{\sum_{\ell=1}^{2}\partial_\ell\left[\lambda_{\ell3}^{(m)}(\lambda_{31}^{(m)}\partial_1\theta_{ij0}+\right.\right.$$

$$\left.+\lambda_{32}^{(m)}\partial_2\theta_{ij0})\frac{1}{\lambda_{33}^{(m)}}\right]-\sum_{\ell=1}^{2}\partial_\ell(\lambda_{\ell1}^{(m)}\partial_1\theta_{ij0}+\lambda_{\ell2}^{(m)}\partial_2\theta_{ij0})+$$

$$\left.+C^{(m)}\partial_t\theta_{ij0}\right\}dx_3+D^{(m)}(\theta_{ij0})\,,\qquad(55)$$

дифференциальный оператор $D^{(m)}(\cdot)$ имеет вид

$$D^{(m)}(\cdot)\equiv\sum_{\ell=1}^{m-1}\int\limits_{H_{\ell-1}}^{H_\ell}\left\{\sum_{p=1}^{2}\partial_p\left[\lambda_{p3}^{(\ell)}\left(\lambda_{31}^{(\ell)}\partial_1(\cdot)+\lambda_{32}^{(\ell)}\partial_2(\cdot)\right)\frac{1}{\lambda_{33}^{(\ell)}}\right]-\sum_{p=1}^{2}\partial_p\left(\lambda_{p1}^{(\ell)}\partial_1(\cdot)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\lambda_{p2}^{(\ell)}\partial_2(\cdot)\right)+C^{(m)}\partial_t(\cdot)\right\}dx_3,\qquad D^{(1)}(\cdot)\equiv 0\,. \tag{56}$$

Из равенства (54) при $m=M$, $x_3=H_M=H$ и из второго равенства (36) с учетом (55), (56), (45) следует

$$D^{(M+1)}(\theta_{ij0})=-\delta_{0i}\delta_{0j}\left(\gamma^{(-)}Q^{(-)}+\gamma^{(+)}Q^{(+)}\right)-\delta^{(-)}\theta_{i-1,j,0}-\delta^{(+)}\theta_{i,j-1,0}\,,$$
$$(x_1,x_2)\in G\,. \tag{57}$$

Это уравнение с учетом (44), (45) определяет функцию $\theta_{ij0}(x_1,x_2,t)$ при уже известных $\theta_{i-1,j,0}$ и $\theta_{i,j-1,0}$. Уравнению (57) соответствуют граничное условие (51), заданное на контуре Γ, и начальное условие (46). Зная из начально-краевой задачи (46), (51), (57) функцию θ_{ij0}, получим в силу (49), (55), (56) известные правую часть в (54) и функцию $F_{ij1}^{(m)}(\mathbf{x},t)$ в (48). Подставив (48) в (54), получим

$$\partial_3T_{ij2}^{(m)}=\left(Q_{ij2}^{(m)}(\mathbf{x},t)+\lambda_{31}^{(m)}\partial_1F_{ij1}^{(m)}+\lambda_{32}^{(m)}\partial_2F_{ij1}^{(m)}\right)\frac{1}{\lambda_{33}^{(m)}}-$$
$$-\left(\lambda_{31}^{(m)}\partial_1\theta_{ij1}+\lambda_{32}^{(m)}\partial_2\theta_{ij1}\right)\frac{1}{\lambda_{33}^{(m)}}\,, \tag{58}$$

где первое слагаемое в правой части − известная функция. Проинтегрировав это равенство по x_3, с учетом (35) будем иметь

$$T_{ij2}^{(m)}(\mathbf{x},t)=\theta_{ij2}(x_1,x_2,t)-F_{ij2}^{(m)}(\mathbf{x},t),\qquad 1\le m\le M\,, \tag{59}$$

где

$$F_{ij2}^{(m)}(\mathbf{x},t)\equiv\int\limits_{H_{m-1}}^{x_3}\left(\lambda_{31}^{(m)}\partial_1\theta_{ij1}+\lambda_{32}^{(m)}\partial_2\theta_{ij1}\right)\frac{1}{\lambda_{33}^{(m)}}\,dx_3+$$
$$+\sum_{\ell=1}^{m-1}\int\limits_{H_{\ell-1}}^{H_\ell}\left(\lambda_{31}^{(\ell)}\partial_1\theta_{ij1}+\lambda_{32}^{(\ell)}\partial_2\theta_{ij1}\right)\frac{1}{\lambda_{33}^{(\ell)}}\,dx_3-$$
$$-\int\limits_{H_{m-1}}^{x_3}\left(Q_{ij2}^{(m)}+\lambda_{31}^{(m)}\partial_1F_{ij1}^{(m)}+\lambda_{32}^{(m)}\partial_2F_{ij1}^{(m)}\right)\frac{1}{\lambda_{33}^{(m)}}\,dx_3-$$
$$-\sum_{\ell=1}^{m-1}\int\limits_{H_{\ell-1}}^{H_\ell}\left(Q_{ij2}^{(\ell)}+\lambda_{31}^{(\ell)}\partial_1F_{ij1}^{(\ell)}+\lambda_{32}^{(\ell)}\partial_2F_{ij1}^{(\ell)}\right)\frac{1}{\lambda_{33}^{(\ell)}}\,dx_3\,, \tag{60}$$

$\theta_{ij2}(x_1,x_2,t)\equiv T_{ij2}^{(1)}(x_1,x_2,0,t)$ − произвольная функция, подлежащая определению.

Подставим (58) в граничное условие на кромке (37) и проинтегрируем его по толщине оболочки с учетом (48), тогда

$$\beta\sum_{\ell=1}^{2}\partial_\ell\theta_{ij1}\sum_{m=1}^{M}\int\limits_{H_{m-1}}^{H_m}\left[-\sum_{p=1}^{3}n_p\lambda_{p\ell}^{(m)}+\lambda_{3\ell}^{(m)}\sum_{p=1}^{3}\frac{n_p\lambda_{p3}^{(m)}}{\lambda_{33}^{(m)}}\right]dx_3-$$
$$-\delta\theta_{ij1}\sum_{m=1}^{M}\int\limits_{H_{m-1}}^{H_m}\alpha^{(m)}\,dx_3=$$

$$= \sum_{m=1}^{M} \int\limits_{H_{m-1}}^{H_m} \Bigg[-\beta \sum_{\ell=1}^{3} n_\ell \big(\lambda_{1\ell}^{(m)} \partial_1 F_{ij1}^{(m)} + \lambda_{\ell 2}^{(m)} \partial_2 F_{ij1}^{(m)} \big) + \beta \sum_{p=1}^{3} \frac{n_p \lambda_{p3}^{(m)}}{\lambda_{33}^{(m)}} \big(Q_{ij2}^{(m)} +$$

$$+ \lambda_{31}^{(m)} \partial_1 F_{ij1}^{(m)} + \lambda_{32}^{(m)} \partial_2 F_{ij1}^{(m)} \big) + \delta_{0i} \delta_{0j} \big(\gamma q_n^{(m)} - \delta \alpha^{(m)} T_\infty \big) -$$

$$- \delta \alpha^{(m)} F_{ij1}^{(m)} \Bigg] dx_3, \qquad (x_1, x_2) \in \Gamma . \tag{61}$$

Подставив (59) в начальное условие (38) и проинтегрировав его по толщине оболочки, получим

$$\theta_{ij2}(x_1, x_2, t_0) = \frac{1}{H} \sum_{m=1}^{M} \int\limits_{H_{m-1}}^{H_m} F_{ij2}^{(m)}(\mathbf{x}, t_0)\, dx_3, \qquad (x_1, x_2) \in G . \tag{62}$$

В силу формального сходства соотношений (34)–(38) и (39)–(43) соответственно и равенств (59), (48) и (54), (47) можно для начально-краевой задачи (39)–(43) при $k \ge 3$ сделать допущения

$$\lambda_{33}^{(m)} \partial_3 T_{ijk-1}^{(m)} + \lambda_{31}^{(m)} \partial_1 T_{ijk-2}^{(m)} + \lambda_{32}^{(m)} \partial_2 T_{ijk-2}^{(m)} = Q_{ijk-1}^{(m)}(\mathbf{x}, t), \qquad 1 \le m \le M , \tag{63}$$

$$T_{ijk-2}^{(m)}(\mathbf{x}, t) = \theta_{ijk-2}(x_1, x_2, t) - F_{ijk-2}^{(m)}(\mathbf{x}, t), \qquad 1 \le m \le M , \tag{64}$$

где $Q_{ijk-1}^{(m)}(\mathbf{x}, t)$, $F_{ijk-2}^{(m)}(\mathbf{x}, t)$ предполагаются уже известными функциями. (При $k = 3$ допущения (63), (64) выполняются, так как справедливы равенства (48), (54) и функции $Q_{ij2}^{(m)}$, $F_{ij1}^{(m)}$ известны из (49), (55) и решенной начально-краевой задачи (46), (51), (57).)

Выразим из (63) производную $\partial_3 T_{ijk-1}^{(m)}$ и подставим с учетом (8) в уравнение (39), тогда после использования равенства (64) получим

$$\partial_3 \big(\lambda_{33}^{(m)} \partial_3 T_{ijk}^{(m)} + \lambda_{31}^{(m)} \partial_1 T_{ijk-1}^{(m)} + \lambda_{32}^{(m)} \partial_2 T_{ijk-1}^{(m)} \big) = -\delta_{0i} \delta_{0j} \delta_{3k} Q^{(m)}(\mathbf{x}, t) -$$

$$- \sum_{\ell=1}^{2} \Bigg\{ \partial_\ell \Bigg[\lambda_{\ell 3}^{(m)} \big(Q_{ijk-1}^{(m)} + \lambda_{31}^{(m)} \partial_1 F_{ijk-2}^{(m)} + \lambda_{32}^{(m)} \partial_2 F_{ijk-2}^{(m)} \big) \frac{1}{\lambda_{33}^{(m)}} \Bigg] -$$

$$- \partial_\ell \big(\lambda_{1\ell}^{(m)} \partial_1 F_{ijk-2}^{(m)} + \lambda_{\ell 2}^{(m)} \partial_2 F_{ijk-2}^{(m)} \big) \Bigg\} - C^{(m)} \partial_t F_{ijk-2}^{(m)} +$$

$$+ \sum_{\ell=1}^{2} \Bigg\{ \partial_\ell \Bigg[\lambda_{\ell 3}^{(m)} \big(\lambda_{31}^{(m)} \partial_1 \theta_{ijk-2} + \lambda_{32}^{(m)} \partial_2 \theta_{ijk-2} \big) \frac{1}{\lambda_{33}^{(m)}} \Bigg] -$$

$$- \partial_\ell \big(\lambda_{1\ell}^{(m)} \partial_1 \theta_{ijk-2} + \lambda_{\ell 2}^{(m)} \partial_2 \theta_{ijk-2} \big) \Bigg\} + C^{(m)} \partial_t \theta_{ijk-2} .$$

Проинтегрировав по x_3 это уравнение, с учетом (40), (41) будем иметь

$$\lambda_{33}^{(m)} \partial_3 T_{ijk}^{(m)} + \lambda_{31}^{(m)} \partial_1 T_{ijk-1}^{(m)} + \lambda_{32}^{(m)} \partial_2 T_{ijk-1}^{(m)} = Q_{ijk}^{(m)}(\mathbf{x}, t), \qquad 1 \le m \le M , \tag{65}$$

где

$$Q_{ijk}^{(m)}(\mathbf{x}, t) \equiv \delta^{(-)} T_{i-1,j,k-2}^{(1)} \Big|_{x_3=0} - \delta_{1i} \delta_{0j} \delta_{3k} \delta^{(-)} T_\infty^{(-)} - \int\limits_{H_{m-1}}^{x_3} \Bigg\{ \delta_{0i} \delta_{0j} \delta_{3k} Q^{(m)}(\mathbf{x}, t) -$$

$$- \sum_{p=1}^{2} \partial_p \big(\lambda_{1p}^{(m)} \partial_1 F_{ijk-2}^{(m)} + \lambda_{p2}^{(m)} \partial_2 F_{ijk-2}^{(m)} \big) + C^{(m)} \partial_t F_{ijk-2}^{(m)} +$$

$$+ \sum_{p=1}^{2} \partial_p \Bigg[\lambda_{p3}^{(m)} \big(Q_{ijk-1}^{(m)} + \lambda_{31}^{(m)} \partial_1 F_{ijk-2}^{(m)} +$$

$$+ \lambda_{32}^{(m)} \partial_2 F_{ijk-2}^{(m)} \big) \frac{1}{\lambda_{33}^{(m)}} \Bigg] \Bigg\} dx_3 - \sum_{\ell=1}^{m-1} \int\limits_{H_{\ell-1}}^{H_\ell} \Bigg\{ \delta_{0i} \delta_{0j} \delta_{3k} Q^{(\ell)}(\mathbf{x}, t) -$$

$$
-\sum_{p=1}^{2}\partial_p\left(\lambda_{1p}^{(\ell)}\partial_1 F_{ijk-2}^{(\ell)}+\lambda_{p2}^{(\ell)}\partial_2 F_{ijk-2}^{(\ell)}\right)+C^{(\ell)}\partial_t F_{ijk-2}^{(\ell)}+
$$

$$
+\sum_{p=1}^{2}\partial_p\left[\lambda_{p3}^{(\ell)}\left(Q_{ijk-1}^{(\ell)}+\lambda_{31}^{(\ell)}\partial_1 F_{ijk-2}^{(\ell)}+\lambda_{32}^{(\ell)}\partial_2 F_{ijk-2}^{(\ell)}\right)\frac{1}{\lambda_{33}^{(\ell)}}\right]\Bigg\}\,dx_3+
$$

$$
+\int_{H_{m-1}}^{x_3}\left\{\sum_{p=1}^{2}\partial_p\left[\lambda_{p3}^{(m)}\left(\lambda_{31}^{(m)}\partial_1\theta_{ijk-2}+\lambda_{32}^{(m)}\partial_2\theta_{ijk-2}\right)\frac{1}{\lambda_{33}^{(m)}}\right]-\right.
$$

$$
-\sum_{p=1}^{2}\partial_p\left(\lambda_{1p}^{(m)}\partial_1\theta_{ijk-2}+\lambda_{p2}^{(m)}\partial_2\theta_{ijk-2}\right)+
$$

$$
\left.+C^{(m)}\partial_t\theta_{ijk-2}\right\}dx_3+D^{(m)}(\theta_{ijk-2}),\qquad (66)
$$

дифференциальный оператор $D^{(m)}(\cdot)$ определен в (56). Из соотношения (65) при $m=M$, $x_3=H_M=H$ и из второго равенства (41) с учетом (56) следует

$$
D^{(M+1)}(\theta_{ijk-2})=-\delta^{(-)}\,T_{i-1,j,k-2}^{(1)}\Big|_{x_3=0}-\delta^{(+)}\,T_{i,j-1,k-2}^{(M)}\Big|_{x_3=H}+\delta_{1i}\delta_{0j}\delta_{3k}\delta^{(-)}T_\infty^{(-)}+
$$

$$
+\delta_{0i}\delta_{1j}\delta_{3k}\delta^{(+)}T_\infty^{(+)}+\sum_{m=1}^{M}\int_{H_{m-1}}^{H_m}\left\{\delta_{0i}\delta_{0j}\delta_{3k}Q^{(m)}(\mathbf{x},t)-\right.
$$

$$
-\sum_{p=1}^{2}\partial_p\left(\lambda_{1p}^{(m)}\partial_1 F_{ijk-2}^{(m)}+\lambda_{p2}^{(m)}\partial_2 F_{ijk-2}^{(m)}\right)+\sum_{p=1}^{2}\partial_p\left[\lambda_{p3}^{(m)}\left(Q_{ijk-1}^{(m)}+\right.\right.
$$

$$
\left.\left.+\lambda_{31}^{(m)}\partial_1 F_{ijk-2}^{(m)}+\lambda_{32}^{(m)}\partial_2 F_{ijk-2}^{(m)}\right)\frac{1}{\lambda_{33}^{(m)}}\right]+C^{(m)}\partial_t F_{ijk-2}^{(m)}\Bigg\}dx_3,
$$

$$
(x_1,x_2)\in G,\qquad t\ge t_0,\qquad (67)
$$

где правая часть – известная функция переменных x_1,x_2,t, так как функции $Q_{ijk-1}^{(m)}$, $F_{ijk-2}^{(m)}$ предполагаются уже известными (см. (63), (64)).

При $k=3$ уравнение (67) определяет функцию $\theta_{ij1}(x_1,x_2,t)$ при граничном условии (61), заданном на кромке оболочки, и начальном условии (53). При $k\ge 4$ граничное условие для уравнения (67) получим, проинтегрировав равенство (42) по толщине оболочки для предыдущего значения k (заменив в (42) k на $k-1$), тогда, исключив из (42) за счет (63) производную $\partial_3 T_{ijk-1}^{(m)}$ и использовав равенство (64), будем иметь

$$
\beta\sum_{\ell=1}^{2}\partial_\ell\theta_{ijk-2}\sum_{m=1}^{M}\int_{H_{m-1}}^{H_m}\left[-\sum_{p=1}^{3}n_p\lambda_{p\ell}^{(m)}+\lambda_{3\ell}^{(m)}\sum_{p=1}^{3}\frac{n_p\lambda_{p3}^{(m)}}{\lambda_{33}^{(m)}}\right]dx_3-
$$

$$
-\delta\theta_{ijk-2}\sum_{m=1}^{M}\int_{H_{m-1}}^{H_m}\alpha^{(m)}\,dx_3=\sum_{m=1}^{M}\int_{H_{m-1}}^{H_m}\left[-\beta\sum_{\ell=1}^{3}n_\ell\left(\lambda_{1\ell}^{(m)}\partial_1 F_{ijk-2}^{(m)}+\right.\right.
$$

$$
\left.+\lambda_{l2}^{(m)}\partial_2 F_{ijk-2}^{(m)}\right)+\beta\sum_{p=1}^{3}\frac{n_p\lambda_{p3}^{(m)}}{\lambda_{33}^{(m)}}\left(Q_{ijk-1}^{(m)}+\lambda_{31}^{(m)}\partial_1 F_{ijk-2}^{(m)}+\right.
$$

$$
\left.\left.+\lambda_{32}^{(m)}\partial_2 F_{ijk-2}^{(m)}\right)-\delta\alpha^{(m)}F_{ijk-2}^{(m)}\right]dx_3,\quad (x_1,x_2)\in\Gamma,\ k=4,5,6\ldots.
$$

$$
(68)
$$

Для определения же начального условия, соответствующего уравнению (67) при $k\ge 4$, подставим (64) в равенство (43) (заменив в нем k на $k-2$) и учтем, что согласно сделанному допущению функция $F^{(m)}_{ijk-2}$ уже известна, тогда после интегрирования по толщине оболочки получим

$$\theta_{ijk-2}(x_1,x_2,t_0)=\frac{1}{H}\sum_{m=1}^{M}\int\limits_{H_{m-1}}^{H_m}F^{(m)}_{ijk-2}(\mathbf{x},t_0)\,dx_3,\quad (x_1,x_2)\in G,\ k=4,5,6\ldots. \tag{69}$$

Выразим из (63) производную $\partial_3 T^{(m)}_{ijk-1}$ и проинтегрируем полученное равенство по x_3, тогда с учетом (64) получим

$$T^{(m)}_{ijk-1}(\mathbf{x},t)=\theta_{ijk-1}(x_1,x_2,t)-F^{(m)}_{ijk-1}(\mathbf{x},t),\quad 1\le m\le M, \tag{70}$$

где

$$\begin{aligned}F^{(m)}_{ijk-1}(\mathbf{x},t)\equiv&\int\limits_{H_{m-1}}^{x_3}\left(\lambda^{(m)}_{31}\partial_1\theta_{ijk-2}+\lambda^{(m)}_{32}\partial_2\theta_{ijk-2}\right)\frac{1}{\lambda^{(m)}_{33}}dx_3+\\&+\sum_{\ell=1}^{m-1}\int\limits_{H_{\ell-1}}^{H_\ell}\left(\lambda^{(\ell)}_{31}\partial_1\theta_{ijk-2}+\lambda^{(\ell)}_{32}\partial_2\theta_{ijk-2}\right)\frac{1}{\lambda^{(\ell)}_{33}}dx_3-\\&-\int\limits_{H_{m-1}}^{x_3}\left(Q^{(m)}_{ijk-1}+\lambda^{(m)}_{31}\partial_1F^{(m)}_{ijk-2}+\lambda^{(m)}_{32}\partial_2F^{(m)}_{ijk-2}\right)\frac{1}{\lambda^{(m)}_{33}}dx_3-\\&-\sum_{\ell=1}^{m-1}\int\limits_{H_{\ell-1}}^{H_\ell}\left(Q^{(\ell)}_{ijk-1}+\lambda^{(\ell)}_{31}\partial_1F^{(\ell)}_{ijk-2}+\lambda^{(\ell)}_{32}\partial_2F^{(\ell)}_{ijk-2}\right)\frac{1}{\lambda^{(\ell)}_{33}}dx_3\,,\end{aligned} \tag{71}$$

$\theta_{ijk-1}(x_1,x_2,t)\equiv T^{(1)}_{ijk-1}(x_1,x_2,0,t)$ – произвольная функция, подлежащая определению. (При $k=3$ равенства (70), (71) совпадают с (59), (60) соответственно.)

Определив функцию θ_{ijk-2} из начально-краевой задачи (67), (61), (53) (при $k=3$) или (67)–(69) (при $k\ge 4$), будем иметь в силу (71), (66) и допущений (63), (64) известные функции $F^{(m)}_{ijk-1}$, $Q^{(m)}_{ijk}$ в равенствах (65), (70), которые формально полностью совпадают с (63), (64). Таким образом, допущения (63), (64) остаются справедливыми и для следующего значения k, поэтому по схеме (63)–(71) можно построить решение начально-краевой задачи (39)–(43) (где $i,j=0,1,2\ldots$) для нового значения k и т.д.

Предложенный алгоритм определения основного трехмерного нестационарного температурного поля в слоистой анизотропной оболочке показывает, что для вычисления неизвестных коэффициентов $T^{(m)}_{ijk}$ в асимптотическом разложении (23) при каждом $k=0,1,2,\ldots$ необходимо проинтегрировать двумерные уравнения (57), (67), которые отличаются лишь известными правыми частями и в развернутом виде в силу (56) выглядят так:

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{M}\int\limits_{H_{m-1}}^{H_m}&\left\{\sum_{\ell=1}^{2}\partial_\ell\left[\lambda^{(m)}_{\ell 3}\left(\lambda^{(m)}_{31}\partial_1\theta_{ijk-2}+\lambda^{(m)}_{32}\partial_2\theta_{ijk-2}\right)\frac{1}{\lambda^{(m)}_{33}}\right]-\right.\\&\left.-\sum_{\ell=1}^{2}\partial_\ell\left(\lambda^{(m)}_{1\ell}\partial_1\theta_{ijk-2}+\lambda^{(m)}_{\ell 2}\partial_2\theta_{ijk-2}\right)\right\}dx_3=\\&=-\partial_t\theta_{ijk-2}\sum_{m=1}^{M}\int\limits_{H_{m-1}}^{H_m}C^{(m)}\,dx_3+W_k(x_1,x_2,t),\end{aligned} \tag{72}$$

где W_k определяется правой частью (57) при $k=2$ или правой частью (67) при $k\ge 3$.

Так как уравнение (72) содержит производную по времени t лишь первого порядка и производные по пространственным переменным x_1, x_2 второго порядка, то оно является уравнением параболического типа.

Покажем, что дифференциальный оператор в левой части уравнения (72) является эллиптическим. С этой целью рассмотрим следующее уравнение:

$$\sum_{\ell=1}^{2}\partial_\ell\left[\lambda_{\ell 3}^{(m)}\left(\lambda_{31}^{(m)}\partial_1\theta_{ijk-2}+\lambda_{32}^{(m)}\partial_2\theta_{ijk-2}\right)\frac{1}{\lambda_{33}^{(m)}}\right]-\sum_{\ell=1}^{2}\partial_\ell\left(\lambda_{\ell 1}^{(m)}\partial_1\theta_{ijk-2}+\right.$$
$$\left.+\lambda_{\ell 2}^{(m)}\partial_2\theta_{ijk-2}\right)=w_k(x_1,x_2,x_3),\quad 1\le m\le M\,, \tag{73}$$

где переменная x_3 выступает в качестве параметра, а левая часть совпадает с подынтегральным выражением в левой части (72). Характеристическое уравнение для (73) имеет вид

$$\left[\left(\lambda_{22}^{(m)}\lambda_{33}^{(m)}-\lambda_{23}^{(m)}\lambda_{23}^{(m)}\right)x_2'^2-2\left(\lambda_{12}^{(m)}\lambda_{33}^{(m)}-\lambda_{13}^{(m)}\lambda_{23}^{(m)}\right)x_2'+\right.$$
$$\left.+\left(\lambda_{11}^{(m)}\lambda_{33}^{(m)}-\lambda_{13}^{(m)}\lambda_{13}^{(m)}\right)\right]\frac{1}{\lambda_{33}^{(m)}}=0\,, \tag{74}$$

где $x_2'(x_1)=dx_2/dx_1$ – производная, задающая направление характеристики при фиксированном x_3. Дискриминант этого уравнения

$$D=-\frac{4}{\lambda_{33}^{(m)}}\det\left(\lambda_{ij}^{(m)}\right),\qquad i,\,j=1,2,3\,,$$

где $\det\left(\lambda_{ij}^{(m)}\right)$ – определитель матрицы коэффициентов теплопроводности. Согласно постулату Онзагера [2] и $A_i>0$, $\lambda_{33}^{(m)}>0$, $\det\left(\lambda_{ij}^{(m)}\right)>0$, поэтому $D<0$. Следовательно, оператор в (73) является эллиптическим, а для коэффициентов в (74) при любых x_3 выполняется неравенство

$$\left[\frac{2}{\lambda_{33}^{(m)}}\left(\lambda_{12}^{(m)}\lambda_{33}^{(m)}-\lambda_{13}^{(m)}\lambda_{23}^{(m)}\right)\right]^2<$$
$$<4\,\frac{\lambda_{22}^{(m)}\lambda_{33}^{(m)}-\lambda_{23}^{(m)}\lambda_{23}^{(m)}}{\lambda_{33}^{(m)}}\cdot\frac{\lambda_{11}^{(m)}\lambda_{33}^{(m)}-\lambda_{13}^{(m)}\lambda_{13}^{(m)}}{\lambda_{33}^{(m)}}\,.$$

Проинтегрируем это неравенство по толщине оболочки

$$\sum_{m=1}^{M}\int_{H_{m-1}}^{H_m}\left(\frac{\lambda_{12}^{(m)}\lambda_{33}^{(m)}-\lambda_{13}^{(m)}\lambda_{23}^{(m)}}{\lambda_{33}^{(m)}}\right)^2dx_3<\sum_{m=1}^{M}\int_{H_{m-1}}^{H_m}\frac{\lambda_{22}^{(m)}\lambda_{33}^{(m)}-\lambda_{23}^{(m)}\lambda_{23}^{(m)}}{\lambda_{33}^{(m)}}\times$$
$$\times\frac{\lambda_{11}^{(m)}\lambda_{33}^{(m)}-\lambda_{13}^{(m)}\lambda_{13}^{(m)}}{\lambda_{33}^{(m)}}\,dx_3\,, \tag{75}$$

отсюда, применив к левой части неравенство Буняковского [1], получим

$$\left(\sum_{m=1}^{M}\int_{H_{m-1}}^{H_m}\frac{\lambda_{12}^{(m)}\lambda_{33}^{(m)}-\lambda_{13}^{(m)}\lambda_{23}^{(m)}}{\lambda_{33}^{(m)}}\,dx_3\right)^2<\sum_{m=1}^{M}\int_{H_{m-1}}^{H_m}\frac{\lambda_{22}^{(m)}\lambda_{33}^{(m)}-\lambda_{23}^{(m)}\lambda_{23}^{(m)}}{\lambda_{33}^{(m)}}\times$$
$$\times\frac{\lambda_{11}^{(m)}\lambda_{33}^{(m)}-\lambda_{13}^{(m)}\lambda_{13}^{(m)}}{\lambda_{33}^{(m)}}\,dx_3<\sum_{m=1}^{M}\int_{H_{m-1}}^{H_m}\frac{\lambda_{22}^{(m)}\lambda_{33}^{(m)}-\lambda_{23}^{(m)}\lambda_{23}^{(m)}}{\lambda_{33}^{(m)}}\,dx_3\times$$
$$\times\sum_{m=1}^{M}\int_{H_{m-1}}^{H_m}\frac{\lambda_{11}^{(m)}\lambda_{33}^{(m)}-\lambda_{13}^{(m)}\lambda_{13}^{(m)}}{\lambda_{33}^{(m)}}\,dx_3\,, \tag{76}$$

где последнее неравенство является следствием того, что в силу постулата Онзагера сомножители под знаком интеграла в правой части (75) положительны при всех x_3.

Используя неравенства (76), можно определить тип оператора в левой части разрешающего уравнения (72). В стационарном случае ($\partial_t \theta_{ijk-2} \equiv 0$) характеристическое уравнение для (72) имеет вид

$$x_2'^2 \sum_{m=1}^{M} \int\limits_{H_{m-1}}^{H_m} \frac{\lambda_{22}^{(m)}\lambda_{33}^{(m)} - \lambda_{23}^{(m)}\lambda_{23}^{(m)}}{\lambda_{33}^{(m)}} dx_3 \; - 2x_2' \sum_{m=1}^{M} \int\limits_{H_{m-1}}^{H_m} \frac{\lambda_{12}^{(m)}\lambda_{33}^{(m)} - \lambda_{13}^{(m)}\lambda_{23}^{(m)}}{\lambda_{33}^{(m)}} dx_3 + \\ + \sum_{m=1}^{M} \int\limits_{H_{m-1}}^{H_m} \frac{\lambda_{11}^{(m)}\lambda_{33}^{(m)} - \lambda_{13}^{(m)}\lambda_{13}^{(m)}}{\lambda_{33}^{(m)}} dx_3 = 0,$$

а его дискриминант

$$D = 4\left(\sum_{m=1}^{M} \int\limits_{H_{m-1}}^{H_m} \frac{\lambda_{12}^{(m)}\lambda_{33}^{(m)} - \lambda_{13}^{(m)}\lambda_{23}^{(m)}}{\lambda_{33}^{(m)}} dx_3 \right)^2 - 4 \sum_{m=1}^{M} \int\limits_{H_{m-1}}^{H_m} \frac{\lambda_{22}^{(m)}\lambda_{33}^{(m)} - \lambda_{23}^{(m)}\lambda_{23}^{(m)}}{\lambda_{33}^{(m)}} dx_3 \times \\ \times \sum_{m=1}^{M} \int\limits_{H_{m-1}}^{H_m} \frac{\lambda_{11}^{(m)}\lambda_{33}^{(m)} - \lambda_{13}^{(m)}\lambda_{13}^{(m)}}{\lambda_{33}^{(m)}} dx_3 . \tag{77}$$

Из (77) с учетом неравенства (76) получаем $D < 0$. Следовательно, дифференциальный оператор в левой части разрешающего уравнения (72) является эллиптическим оператором второго порядка по двум пространственным переменным x_1, x_2, поэтому в стационарном случае ($\partial_t \theta_{ijk-2} \equiv 0$) уравнение (72) является уравнением эллиптического типа, зависящим лишь от двух переменных x_1, x_2.

Если на обеих лицевых поверхностях заданы граничные условия II-го рода ($\beta^{(\pm)} = \gamma^{(\pm)} = 1$, $\delta^{(\pm)} = 0$ или $\alpha_{(\pm)} = 0$ в (10)), то в разложении (15) остается лишь первое слагаемое ($T^{(m)}(\mathbf{x},t) = T_{00}^{(m)}(\mathbf{x},t)$) и внешнее асимптотическое разложение температуры определяется соотношением (23) при $i = j = 0$.

Обсудим некоторые свойства полученного асимптотического разложения (23) при граничных условиях II-го рода на лицевых поверхностях (при $i = j = 0$ и $\alpha_{(\pm)} = 0$). Из разложения (23) следует, что при $Q^{(\pm)} \neq 0$ имеем

$$T_{*00}^{(m)}(x_1, x_2, x_3, t) = O(1/\varepsilon) \qquad \text{при} \qquad \varepsilon \to 0, \tag{78}$$

т. е. с уменьшением ε температура $T_{*00}^{(m)}$ в каждом слое неограниченно возрастает по модулю. Этот факт имеет физическое объяснение. А именно: уменьшению ε соответствует уменьшение толщины оболочки и слоев при фиксированных прочих входных данных задачи (размерах отсчетной поверхности оболочки, плотности мощности внутренних источников тепла, тепловых потоках на лицевых поверхностях). Так как характерный размер оболочки $\bar{L}$ и тепловые потоки на лицевых поверхностях $Q^{(\pm)}$ в каждый момент времени фиксированы, то безразмерный приток (отток) тепла через эти поверхности имеет выражение

$$Q_* = -\iint\limits_G \left(Q^{(+)} + Q^{(-)} \right) A_1 A_2 \, dx_1 \, dx_2 + O(\varepsilon) . \tag{79}$$

При уменьшении же толщины оболочки и слоев (уменьшении ε) уменьшаются объем конструкции и площади торцевых поверхностей оболочки и слоев (на кромках). Поэтому, чтобы обеспечить фиксированный отток (приток) тепла через эти поверхности, равный значению первого слагаемого в правой части (79), при уменьшении ε должны возрастать по модулю тангенциальные компоненты теплового потока в оболочке, а значит, по закону Фурье неограниченно должен возрастать модуль градиента температуры. Следствием этого будет неограниченное возрастание по модулю температуры при $\varepsilon \to 0$. Этот факт и отражает соотношение (78).

Из разложения (23) и равенств (57), (67) (при $k=3$) следует, что вклад в температуру от тепловых потоков $Q^{(\pm)}$, заданных на лицевых поверхностях оболочки, по ε на порядок больше вклада от внутренних источников тепла $Q^{(m)}$, так как $Q^{(\pm)}$ определяют функцию $T_{000}^{(m)}$ (через θ_{000}) и последующие $T_{00k}^{(m)}$, $k=1,2,3,\ldots$ (см. (57)), а $Q^{(m)}$ задает функцию $T_{001}^{(m)}$ (через θ_{001}) и последующие $T_{00k}^{(m)}$, $k=1,2,3,\ldots$ (см. (67)). Этот факт также имеет физическое объяснение. При уменьшении ε уменьшается объем оболочки и слоев, а значит, в силу (14) уменьшается мощность тепла Q_V, производимого в данный момент времени во всей оболочке внутренними источниками тепла $Q^{(m)}$, причем $Q_V \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, так как стремится к нулю объем оболочки. Мощность же притока (оттока) тепла Q_*, привносимого в конструкцию в данный момент времени за счет тепловых потоков $Q^{(\pm)}$ согласно (79) в общем случае не стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$. Поэтому тепловые потоки $Q^{(\pm)}$, заданные на лицевых поверхностях, оказывают большее влияние на температуру, чем внутренние источники тепла.

Если в каждой точке каждого слоя оболочки одна из главных осей анизотропии совпадает с направлением x_3, то $\lambda_{31}^{(m)}=\lambda_{32}^{(m)}=0$, $1\le m\le M$. (Такими свойствами обладают, например, оболочки, слои которых постоянной толщины армированы по поверхностям, эквидистантным отсчетной поверхности $x_3=0$.) В этом случае при термоизоляции лицевых поверхностей ($Q^{(\pm)}=0$), наличии внутренних источников тепла ($Q^{(m)}\ne 0$) и ненулевом начальном условии (53) из (60), (49), (55) получаем

$$F_{001}^{(m)}(\mathbf{x},t)\equiv F_{002}^{(m)}(\mathbf{x},t)\equiv 0, \qquad Q_{002}^{(m)}(\mathbf{x},t)\equiv 0, \qquad 1\le m\le M. \tag{80}$$

Следовательно, при $\lambda_{31}^{(m)}=\lambda_{32}^{(m)}=0$ и $Q^{(\pm)}=0$ из (23), (45), (48), (59), (80) вытекает, что с точностью $O(\varepsilon^2)$ температуру можно считать постоянной по толщине оболочки за пределами пограничного слоя даже в случае неоднородности материалов слоев по толщине ($\partial_3\lambda_{ij}^{(m)}\ne 0$).

Если лицевые поверхности не термоизолированы ($Q^{(\pm)}\ne 0$), а внутренние источники тепла отсутствуют ($Q^{(m)}=0$), то функция $T_{003}^{(m)}$ при $\lambda_{31}^{(m)}=$ $=\lambda_{32}^{(m)}=0$, $1\le m\le M$, в силу (66), (70), (71), (49), (55), (60) имеет квадратичное распределение по толщине слоев, поэтому из (23) следует, что с точностью $O(\varepsilon^3)$ распределение температуры за пределами пограничного слоя по толщине слоев можно задавать по квадратичному закону (по кусочно-квадратичному закону по толщине слоистой оболочки в целом).

Если на обеих лицевых поверхностях имеет место конвективный теплообмен ($\beta^{(\pm)}=\delta^{(\pm)}=1$ в (10)) с малыми числами Био $\alpha_{(\pm)}$ и эти числа имеют порядок ε ($\alpha_{(\pm)}\sim\varepsilon$), то в силу разложений (15), (23) получим асимптотические свойства основного температурного поля $T_*^{(m)}$, аналогичные тем, что приведены выше для случая граничных условий второго рода на лицевых поверхностях.

3. Случай граничных условий I-го и III-го рода при средних и больших числах Био на лицевых поверхностях оболочки. В этом случае остаются справедливыми уравнения и соотношения (1)−(14), но числа Био на лицевых поверхностях $\alpha_{(\pm)}\ge 1$, причем по-прежнему выполняется асимптотическая оценка $\alpha_{(\pm)}=O(1)$ при $\varepsilon\to 0$.

Для удобства дальнейшего изложения в настоящем параграфе сделаем следующие переобозначения: $\alpha_{(\pm)} \equiv \alpha^{(\pm)} \ge 1$ – числа Био на лицевых поверхностях; $T_0^{(m)} \equiv T_{00}^{(m)}$ – безразмерная начальная функция распределения температуры; нижний индекс после запятой означает частное дифференцирование по пространственной переменной x_i ($(\cdot)_{,i} \equiv \partial_i(\cdot)$, $i = 1,2,3$) или времени t ($(\cdot)_{,t} \equiv \partial_t(\cdot)$).

Наличие малого параметра ε при высших производных в уравнении (7), в условиях сопряжения (9) и граничных условиях (10), (11) указывает на то, что начально-краевая задача (7)–(12) является задачей с сингулярным возмущением, поэтому решение этой задачи будем разыскивать в виде, отличном от (15),

$$T^{(m)} = T_*^{(m)} + T_\tau^{(m)} + T_{\mathrm{b}}^{(m)}, \qquad 1 \le m \le M, \tag{81}$$

где $T_*^{(m)}$ – основное температурное поле в m-м слое; $T_\tau^{(m)}$ – поправка к основному температурному полю в окрестности начального момента времени $t = t_0$; $T_{\mathrm{b}}^{(m)}$ – поправка к основному температурному полю в пограничном слое в окрестности торцевой поверхности оболочки.

В этом случае в качестве непротиворечивого внешнего асимптотического разложения температуры следует выбрать

$$T_*^{(m)}(x_1, x_2, x_3, t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} T_k^{(m)}(x_1, x_2, x_3, t)\, \varepsilon^k, \quad 1 \le m \le M. \tag{82}$$

С учетом сделанных переобозначений безразмерные уравнения и соотношения (7)–(12) полностью совпадают с уравнениями и соотношениями (2)–(7) в [4] соответственно, а разложения (81), (82) совпадают с разложениями (9), (10) в [4], поэтому для определения коэффициентов $T_k^{(m)}$ разложения (82) можно дословно повторить все рассуждения, приведенные в [4].

1. *Выгодский М. Я.* Справочник по высшей математике. – Москва: Наука, 1977. – 872 с.
2. *Гуров К. П.* Феноменологическая термодинамика необратимых процессов. – Москва: Наука, 1978. – 128 с.
3. *Зино Е. И., Тропп Э. А.* Асимптотические методы в задачах теории теплопроводности и термоупругости. – Ленинград: Изд-во Ленингр. ун-та, 1978. – 224 с.
4. *Немировский Ю. В., Янковский А. П.* Асимптотический анализ задачи нестационарной теплопроводности слоистых анизотропных пластин при граничных условиях первого и третьего рода // Сиб. журн. индустр. математики. – 2007. – **X**, № 4(32). – С. 83–94.

АСИМПТОТИЧНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ НЕСТАЦІОНАРНОЇ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ШАРУВАТИХ АНІЗОТРОПНИХ НЕОДНОРІДНИХ ОБОЛОНОК

Побудовано зовнішні асимптотичні розклади розв'язків задачі нестаціонарної теплопровідності шаруватих анізотропних неоднорідних оболонок при різних крайових умовах на лицьових поверхнях. Проаналізовано отримані двовимірні розв'язувальні рівняння і досліджено асимптотичні властивості розв'язків задачі теплопровідності. Наведено фізичні обґрунтування деяких особливостей асимптотичного розкладу температури.

ASYMPTOTIC SOLUTION OF THE PROBLEM OF NON-STATIONARY THERMAL CONDUCTION OF LAYER ANISOTROPIC INHOMOGENEOUS SHELLS

Exterior asymptotic expansions of solutions of the problem on non-stationary thermal conduction of layer anisotropic inhomogeneous shells are constructed under various boundary conditions on obverse surfaces. The obtained two-dimensional resolving equations are analyzed and asymptotic properties of solutions of the problem on thermal conduction are investigated. The physical substantiation of some singularities of asymptotic expansion of temperature is given.

Ин-т теорет. и прикл. механики
СО РАН, Новосибирск, Россия

Получено
26.08.08