

**РОЗРАХУНОК ЕФЕКТИВНИХ ЕЛЕКТРОФІЗИЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ЗВОЛОЖЕНИХ ПОРИСТИХ МАТЕРІАЛІВ**

*Розглянуто особливості гомогенізації пористого осередку. Використовуючи метод просторового усереднення за локального подання параметрів поля введено ефективні електрофізичні характеристики пористого зволоженого середовища та записані рівняння електродинаміки. Запропоновано узагальнену методичку розрахунку діелектричних втрат у пористих тілах низької електропровідності з різним вмістом вологи.*

**Вступ.** Розвиток електромагнітних методів моніторингу водних ресурсів [18] та обробки зволжених матеріалів (мікрохвильове осушування) [13] вимагають адекватного опису електромагнітних процесів у пористих зволжених середовищах, електрофізичні характеристики яких залежать в першу чергу від діелектричних і провідних властивостей води. Відомо, що в міру насичення пористого матеріалу рідиною суттєво зростають діелектричні втрати (тепловиділення), змінюються частотні (дисперсійні) і фазові співвідношення, виникають резонансні явища, пов'язані зі зміною часу релаксації поляризації [15]. Поглиблене дослідження характеристик пористого зволоженого матеріалу базується на моделюванні такого неоднорідного середовища відповідним багатоскладовим композитом.

У цій статті розглянуто моделі композитних матеріалів, які можна застосувати для розрахунку ефективної комплексної діелектричної проникності як функції вологовмісту у тілах з малою та великою пористістю. Проаналізовано залежність діелектричних втрат при фіксованій частоті електромагнітного поля від ступеня насичення водою.

**Пористе середовище. Просторове усереднення.** Розглядаємо пористе середовище, яке є частиною твердого тіла і містить велику кількість пустот (пор) з малими розмірами (порівняно з характерним розміром тіла) та скелет (тверду фазу) [19]. Вважаємо середовище ненасиченим, тобто в порах наявна речовина в рідкій фазі та газоподібній фазі, яка є двоскладовою сумішшю атмосферного повітря і водяної пари. Пори можуть мати різноманітну геометричну форму (сферичні, циліндричні, щілинні тощо) і розмір, який характеризується ефективним радіусом  $r_{\text{eff}}$ : мікропори ( $r_{\text{eff}} \leq 2$  нм), мезопори ( $2 \text{ нм} < r_{\text{eff}} \leq 50$  нм) і макропори ( $r_{\text{eff}} > 50$  нм) [11].

Через неоднорідність структури пористого матеріалу опис фізичних процесів, які відбуваються у ньому, суттєво ускладнюється. Для його спрощення реально пористе середовище замінюють макроскопічно еквівалентним неперервним середовищем, використовуючи методи теорії гомогенізації (усереднення) [17]. Ці методи дозволяють перейти від локального опису пористого середовища в мікроскопічному (найменшому) масштабі до опису в масштабі мезоскопічному (середньому). Зауважимо, що мікроскопічний масштаб, який використовується при описі однофазних (неперервних) середовищ, є непридатний для опису багатофазних середовищ, оскільки має місце неоднорідність структури пористого матеріалу на мікрорівні.

Характерним для методу гомогенізації є те, що мезоскопічні властивості пористого середовища описують за допомогою середніх величин. Такі середні величини вводять, виходячи з фізичних властивостей кожної з фаз у мезооб'ємі усереднення без уточнення специфіки взаємодії фаз на поверхнях поділу.

Оскільки більшість пористих матеріалів характеризується випадковою структурою, то для розрахунку їх усереднених характеристик можна використати відносно простий підхід – метод просторового усереднення [10].

Перевага цього методу полягає в тому, що не потрібно жодних даних про внутрішню структуру середовища. При цьому отримані середні величини в балансових рівняннях і в рівняннях, що описують властивості матеріалу (матеріальних чи конститутивних), відповідають експериментально вимірюваним.

Розглянемо особливості гомогенізації області  $\mathcal{P}$  пористого середовища (рис. 1). Нехай  $d$  – характерний розмір області в мікромасштабі (ефективний радіус пор),  $\ell$  – розмір в мезомасштабі (характерний розмір об'єму усереднення), а  $L$  – в макромасштабі (розмір області  $\mathcal{P}$ ). Тоді нерівність  $d \ll \ell \ll L$  визначає умову відокремленості масштабів [17]. Якщо такі масштаби в тілі можемо виділити, то гомогенізація є можливою.

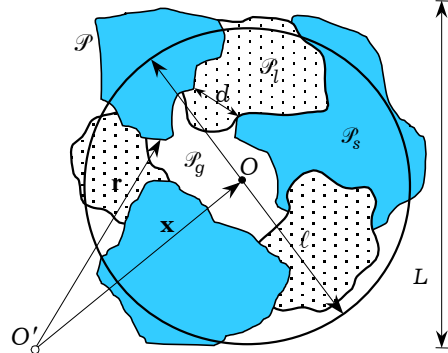


Рис. 1

Умова відокремленості масштабів, однак, не є достатньою, оскільки пористе середовище має охоплювати велике число взаємно сполучених пор такого розміру, щоб у мезомасштабі можна було умовно виділити певну повторювану за характерним розміром  $\ell$  «репрезентативну область усереднення»  $v$  (REV – representative elementary volume) [9]. Тоді кожній точці  $O$  області  $\mathcal{P}$  можна поставити у відповідність REV (в теорії гомогенізації звичайно вибирають у вигляді сфери з діаметром  $\ell$ ). Точку  $O$  в декартовій системі координат з центром у точці  $O'$  характеризуємо радіусом-вектором  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{x} = x_i \mathbf{i}_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  (де  $x_i$  – декартові координати,  $\mathbf{i}_i$  – одиничні орти). Вважаємо, що область  $v$  має сталий об'єм  $V_R$ , який охоплює всі фази середовища. Точки в межах REV характеризуємо радіусом-вектором  $\mathbf{r} = r_i \mathbf{i}_i$ , де  $r_i$  – їх декартові координати. Якщо пористе середовище містить достатньо велике число таких областей усереднення (елементарних комірок), то задовольняється друга умова, необхідна для гомогенізації середовища – умова періодичності масштабів [17].

Область  $\mathcal{P}$  трифазного пористого середовища зволоженого тіла складається з областей твердої  $\mathcal{P}_s$ , рідкої  $\mathcal{P}_l$  і газоподібної  $\mathcal{P}_g$  фаз, тому довільний об'єм  $V_R$  усереднення містить фазові підоб'єми скелету  $V_s(t)$  (тверда фаза), води  $V_l(t)$  (рідка фаза) і газу  $V_g(t)$  (пароповітряна фаза), які змінюються з часом  $t$ . Підоб'єми  $V_l(t)$  і  $V_g(t)$  визначають об'єм пор  $V_p(t) = V_l(t) \cup V_g(t)$ . При цьому  $V_R = \sum_{\sigma} V_{\sigma}(t)$ , де  $\sigma = \{s, l, g\}$ .

Конфігурацію фаз в області усереднення описують за допомогою характеристичної функції

$$\chi_{\sigma}(\mathbf{r}, t) = \begin{cases} 1, & \mathbf{r} \in V_{\sigma}(t), \\ 0, & \mathbf{r} \notin V_{\sigma}(t), \end{cases} \quad \sigma = \{s, l, g\}. \quad (1)$$

Функція  $\chi_{\sigma}(\mathbf{r}, t)$  враховує переміщення фаз тіла, зумовлене процесами переносу маси чи деформування. Тоді  $V_{\sigma}(t) = \int_{V_R} \chi_{\sigma}(\mathbf{r}, t) dV_R$ , а об'ємну частку

$\sigma$ -фази матеріалу подають як

$$\theta_{\sigma}(\mathbf{x}, t) = \frac{V_{\sigma}(\mathbf{x}, t)}{V_R}, \quad \sum_{\sigma} \theta_{\sigma} = 1. \quad (2)$$

Розглядають також ступені насичення пор рідиною  $S_l$  та газом  $S_g$ :

$$S_l = \frac{V_l}{V_l + V_g}, \quad S_g = \frac{V_g}{V_l + V_g}, \quad S_l + S_g = 1. \quad (3)$$

Тоді, враховуючи означення локальної пористості  $\phi$  [9], маємо

$$\phi = \frac{V_l + V_g}{V_R} = 1 - \frac{V_s}{V_R}, \quad (4)$$

а для об'ємних часток фаз отримуємо вирази

$$\theta_s = 1 - \phi, \quad \theta_l = \phi S_l, \quad \theta_g = \phi(1 - S_l). \quad (5)$$

Нехай функція  $\xi(\mathbf{r}, t)$  описує в межах REV певну локальну фізичну величину, що характеризує область  $\mathcal{P}$  пористого середовища. Просторове середнє цієї величини в точці  $\mathbf{x}$  репрезентативної області у момент часу  $t$  визначають так [9]:

$$\langle \xi \rangle(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{V_R} \int_{V_R} \xi(\mathbf{r}, t) dV_R. \quad (6)$$

Подібно за допомогою характеристичної функції (1) вводять фазово та внутрішньо середні величини:

$$\langle \xi \rangle_\sigma(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{V_R} \int_{V_R} \xi(\mathbf{r}, t) \chi_\sigma(\mathbf{r}, t) dV_R, \quad (7)$$

$$\langle \xi \rangle_\sigma^\sigma(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{V_\sigma} \int_{V_\sigma} \xi(\mathbf{r}, t) \chi_\sigma(\mathbf{r}, t) dV_R. \quad (8)$$

Оскільки справджується співвідношення

$$\int_{V_R} \xi(\mathbf{r}, t) \chi_\sigma(\mathbf{r}, t) dV_R = \int_{V_\sigma} \xi(\mathbf{r}, t) \chi_\sigma(\mathbf{r}, t) dV_R, \quad (9)$$

то фазове і внутрішнє середні пов'язані між собою:

$$\langle \xi \rangle_\sigma(\mathbf{x}, t) = \theta_\sigma(\mathbf{x}, t) \langle \xi \rangle_\sigma^\sigma(\mathbf{x}, t). \quad (10)$$

Таким чином, використовуючи метод просторового усереднення, пористе середовище можна описати певними неперервними фізичними величинами. Це дає можливість розглядати його як суперпозицію трьох матеріальних континуумів – скелету, рідини і газу. За такого підходу рівняння моделі пористого середовища записують відносно введених середніх величин і вони формально є еквівалентними рівнянням для однофазного середовища.

**2. Рівняння електродинаміки.** Застосуємо метод просторового усереднення, щоб описати електромагнітні процеси у пористому середовищі, спричинені дією зовнішнього гармонічного електромагнітного поля. Для цього розглянемо локальні характеристики – напруженості електричного  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  та магнітного  $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$  полів і характеристики, що визначають властивості середовища – електричне зміщення  $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$  (тут  $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$  – вектор поляризації, а  $\varepsilon_0$  – діелектрична стала), магнітну індукцію  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$  та густину струму  $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$ . Введемо також вектор узагальненого діелектричного зміщення [5]

$$\mathbf{D}'(\mathbf{r}, t) = \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) + \int_{-\infty}^t \mathbf{J}(\mathbf{r}, t') dt'. \quad (11)$$

Припускаємо, що пористе середовище немагнітне і характеризується поляризацією фаз і низькою електропровідністю (неідеальний діелектрик [1]). Провідність такого середовища зумовлена електрофізичними властивостями фаз. Поляризація фаз може мати характер електронної, іонної або дипольної орієнтацій [2]. Зауважимо, що для пористого середовища, як і

для всіх композитних матеріалів, характерним є також особливий вид поляризації – інтерфейсна поляризація (ефект Максвелла – Вагнера [12]).

Локальне електромагнітне поле у мікроскопічному масштабі будемо описувати системою рівнянь Максвелла – Лоренца [2]

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, & \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\partial \mathbf{D}'(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \\ \nabla \cdot \mathbf{D}'(\mathbf{r}, t) &= 0, & \nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= 0,\end{aligned}\quad (12)$$

тут  $\nabla$  – оператор Гамільтона. При цьому на поверхнях поділу фаз запишемо умови спряження характеристик електромагнітного поля:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}'_{\sigma t} &= \mathbf{E}'_{\sigma' t}, & \mathbf{H}'_{\sigma t} &= \mathbf{H}'_{\sigma' t}, & \mathbf{D}'_{\sigma n} &= \mathbf{D}'_{\sigma' n}, & \mathbf{B}_{\sigma n} &= \mathbf{B}_{\sigma' n}, \\ \sigma, \sigma' &= \{s, l, g\}, & \sigma &\neq \sigma',\end{aligned}\quad (13)$$

де індексами  $t$  і  $n$  позначено відповідно тангенціальні та нормальні компоненти векторів.

Приймаємо, що за дії зовнішнього гармонічного електромагнітного поля у кожній точці середовища поле має гармонічний характер (розмір неоднорідностей такий, що відсутнє комптонівське розсіювання) зі зміною частоти хвилі [5]. Тоді характеристики електромагнітного поля шукаємо у вигляді

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \text{Re}[\Phi_*(\mathbf{r})e^{i\omega t}], \quad \Phi = \{\mathbf{E}, \mathbf{H}\}, \quad (14)$$

де  $\Phi_*(\mathbf{r})$  – комплексні амплітуди. Враховуючи означення (11) і подання (14), матеріальні рівняння для комплексних амплітуд узагальненого діелектричного зміщення  $\mathbf{D}_*(\mathbf{r})$  та магнітної індукції  $\mathbf{B}_*(\mathbf{r})$  у провідному немагнітному середовищі запишемо у вигляді

$$\mathbf{D}'_*(\mathbf{r}) = \varepsilon_c(\mathbf{r}, \omega)\mathbf{E}_*(\mathbf{r}), \quad \mathbf{B}_*(\mathbf{r}) = \mu_0\mathbf{H}_*(\mathbf{r}), \quad (15)$$

де  $\varepsilon_c(\mathbf{r}, \omega) = \varepsilon'_c(\mathbf{r}, \omega) - i\varepsilon''_c(\mathbf{r}, \omega) = \varepsilon(\mathbf{r}, \omega) + \frac{\sigma(\mathbf{r})}{i\omega}$  – узагальнена комплексна динамічна діелектрична проникність,  $\varepsilon(\mathbf{r}, \omega) = \varepsilon'(\mathbf{r}, \omega) - i\varepsilon''(\mathbf{r}, \omega)$  – комплексна діелектрична проникність,  $\sigma(\mathbf{r})$  – питома статична електропровідність.

Тоді рівняння поля (12) у пористому тілі низької електропровідності відносно комплексних амплітуд будуть

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E}_*(\mathbf{r}) &= -i\omega\mu_0\mathbf{H}_*(\mathbf{r}), & \nabla \times \mathbf{H}_*(\mathbf{r}) &= i\omega\varepsilon_c(\mathbf{r}, \omega)\mathbf{E}_*(\mathbf{r}), \\ \nabla \cdot \mathbf{D}'_*(\mathbf{r}) &= \nabla \cdot \{\varepsilon_c(\mathbf{r}, \omega)\mathbf{E}_*(\mathbf{r})\} = 0, & \nabla \cdot \mathbf{H}_*(\mathbf{r}) &= 0.\end{aligned}\quad (16)$$

Оскільки у багатофазному пористому середовищі електрофізичні характеристики змінюються стрибкоподібно на поверхнях поділу фаз, то локальна узагальнена комплексна діелектрична проникність  $\varepsilon_c(\mathbf{r}, \omega)$  не є неперервною функцією координат. Як наслідок, характеристики поля, що входять в рівняння електродинаміки (16), теж будуть розривними функціями. За допомогою характеристичної функції (1) величину  $\varepsilon_c(\mathbf{r}, \omega)$  подамо у вигляді

$$\varepsilon_c(\mathbf{r}, \omega) = \varepsilon_c^s(\omega)\chi_s(\mathbf{r}, t) + \varepsilon_c^l(\omega)\chi_l(\mathbf{r}, t) + \varepsilon_c^g(\omega)\chi_g(\mathbf{r}, t), \quad (17)$$

де  $\varepsilon_c^\sigma(\omega) = \varepsilon_\sigma(\omega) + \frac{\sigma_\sigma}{i\omega}$  – узагальнена комплексна динамічна діелектрична проникність  $\sigma$ -фази. Тут враховано зміну діелектричної проникності внаслідок розташування фаз. Щоб описати електромагнітне поле в пористому середовищі як у суцільному середовищі неперервними характеристиками, використаємо метод просторового усереднення [10]. При цьому вважатимемо, що рівняння електродинаміки та матеріальні співвідношення відносно середніх величин повинні мати таку ж структуру, як у випадку однофаз-

ного середовища. Формальну еквівалентність рівнянь можна забезпечити, задовольняючи граничні умови (13) на межі поділу фаз у мікроскопічному масштабі, а матеріальних співвідношень – шляхом введення ефективних діелектричних характеристик до електродинамічних співвідношень.

Застосовність методу просторового усереднення розглянемо на простому прикладі. Нехай в кожній точці області  $v$  усереднення REV електричне поле є потенціальним, тобто  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\nabla\psi(\mathbf{r}, t)$ , де  $\psi(\mathbf{r}, t) = \text{Re}[\psi_*(\mathbf{r})e^{i\omega t}]$ , а  $\psi_*(\mathbf{r})$  – його амплітуда. Тоді зв'язок між комплексними амплітудами узагальненого діелектричного зміщення і напруженості електричного поля має вигляд

$$\mathbf{D}'_*(\mathbf{r}) = \varepsilon_c(\mathbf{r}, \omega)\mathbf{E}_*(\mathbf{r}) = -\varepsilon_c(\mathbf{r}, \omega)\nabla\psi_*(\mathbf{r}). \quad (18)$$

Припустимо, що в REV поле однорідне, тобто  $\mathbf{E}_*(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_{0*}$ ,  $\mathbf{r} \in v$ , де  $\mathbf{E}_{0*}$  – комплексна амплітуда поля. Тоді вираз для амплітуди динамічного потенціалу буде

$$\psi_*(\mathbf{r}) = -\mathbf{E}_{0*} \cdot \mathbf{r}, \quad \mathbf{r} \in v. \quad (19)$$

Ефективну узагальнену комплексну динамічну діелектричну проникність  $\bar{\varepsilon}_c$  середовища введемо на основі рівності, що виражає формальну еквівалентність матеріальних співвідношень:

$$\langle \mathbf{D}'_* \rangle(\mathbf{x}) = \bar{\varepsilon}_c(\omega)\langle \mathbf{E}_* \rangle(\mathbf{x}) = -\bar{\varepsilon}_c(\omega)\langle \nabla\psi_* \rangle(\mathbf{x}). \quad (20)$$

Згідно з означенням просторово середнього (5) та співвідношень (17) і (18) маємо

$$\langle \mathbf{D}'_* \rangle(\mathbf{x}) = -\frac{1}{V_R} \int_{V_R} \varepsilon_c(\mathbf{r}, \omega)\nabla\psi_*(\mathbf{r}) dV_R = \mathbf{E}_{0*} \sum_{\sigma} \theta_{\sigma}(\mathbf{x}, t)\varepsilon_c^{\sigma}(\omega). \quad (21)$$

Тут враховано, що за подання (19) просторове середнє від градієнта динамічного потенціалу

$$\langle \nabla\psi_* \rangle(\mathbf{x}) = \frac{1}{V_R} \int_{V_R} \nabla\psi_*(\mathbf{r}) dV_R = -\mathbf{E}_{0*}. \quad (22)$$

Підставляючи (21) і (22) у співвідношення (20), отримуємо

$$\bar{\varepsilon}_c(\omega) = \sum_{\sigma} \theta_{\sigma}(\mathbf{x}, t)\varepsilon_c^{\sigma}(\omega), \quad (23)$$

де  $\bar{\varepsilon}_c(\omega) = \bar{\varepsilon}(\omega) + \frac{\bar{\sigma}}{i\omega}$  – ефективна узагальнена комплексна динамічна діелектрична проникність, а  $\bar{\varepsilon}(\omega)$  і  $\bar{\sigma}$  – ефективні комплексна динамічна діелектрична проникність і провідність середовища. Величина  $\bar{\varepsilon}_c$  залежить як від частоти зовнішнього поля (дисперсійна залежність), так і діелектричних проникностей та об'ємних часток фаз.

Припускаємо, що характерний час зміни електромагнітного поля у середовищі (що визначається частотою  $\omega$ ) є набагато менший, ніж відносна швидкість зміни розташування фаз, тобто виконуються умови  $\omega \gg \frac{1}{\theta_{\sigma}} \frac{\partial \theta_{\sigma}}{\partial t}$ .

Тоді з рівнянь поля (16) в мікромасштабі при врахуванні означення (20) ефективної діелектричної проникності шляхом просторового усереднення отримуємо рівняння електродинаміки

$$\begin{aligned} \nabla \times \langle \mathbf{E}_* \rangle(\mathbf{x}) &= -i\omega\mu_0 \langle \mathbf{H}_* \rangle(\mathbf{x}), & \nabla \times \langle \mathbf{H}_* \rangle(\mathbf{x}) &= i\omega\bar{\varepsilon}_c(\omega)\langle \mathbf{E}_* \rangle(\mathbf{x}), \\ \nabla \cdot \langle \mathbf{E}_* \rangle(\mathbf{x}) &= 0, & \nabla \cdot \langle \mathbf{H}_* \rangle(\mathbf{x}) &= 0, \end{aligned} \quad (24)$$

де  $\langle \Phi \rangle(\mathbf{x}, t) = \text{Re}[\langle \Phi_* \rangle(\mathbf{x}, t)e^{i\omega t}]$ ,  $\Phi = \{\mathbf{E}, \mathbf{H}\}$ , а  $\langle \Phi \rangle(\mathbf{x}, t)$ ,  $\langle \Phi \rangle_*(\mathbf{x}, t)$ ,  $\bar{\varepsilon}_c(\omega)$  є слабозмінними в часі (зокрема, на періоді  $T = 2\pi/\omega$ ) функціями координат. Тут час  $t$  – параметр, за допомогою якого враховується переміщення фаз.

Наведений приклад розрахунку ефективної узагальненої комплексної динамічної діелектричної проникності не враховує локальної мікроструктури пористого середовища, взаємодії між фазовими включеннями та їх геометричної форми і орієнтації.

**3. Закони змішування.** Нижче розглянуто відомі в літературі моделі трифазного композита (закони змішування), в яких зроблено спробу врахувати згадані фактори. В їх основі лежить припущення, що збурення макроскопічного поля в межах REV визначається лише локальною геометрією фазових включень і не залежить від розподілу поля поза його межами, яке вважають однорідним. Таке припущення є справедливим, коли довжина електромагнітної хвилі  $\lambda$  в середовищі є значно більшою від характерного розміру  $\ell$  REV ( $\lambda = 2\pi c/\omega \gg \ell$ , де  $c$  – швидкість поширення світла в середовищі).

**3.1. Багатошарова сферична модель.** Розглянемо композитний матеріал, який складається зі сферичних частинок, оточених поверхневим шаром і розміщених у твердій матриці – багатошарова сферична модель (filler – layer – matrix (FLM) [16]). Область усереднення  $v$  (REV) з радіусом  $c$  (рис. 2) містить сферичну частинку – заповнювач ( $f$ ) (filler) і зовнішній поверхневий шар ( $l$ ) (layer), яким відповідають сфери з радіусами  $a$  і  $b$ . Область усереднення частково охоплює матрицю матеріалу ( $m$ ) (matrix). Поза межами REV знаходиться композит ( $c$ ), електрофізичні властивості якого необхідно визначити.

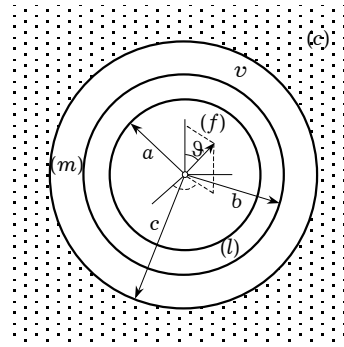


Рис. 2

У цьому випадку об'ємні частки  $\theta_\sigma$ ,  $\sigma = \{f, l, m\}$ , компонентів згідно з (2) будуть  $\theta_f = a^3/c^3$ ,  $\theta_l = (b^3 - a^3)/c^3$ ,  $\theta_m = 1 - b^3/c^3$ .

Використаємо подання (14) для локальних характеристик гармонічного поля та матеріальні співвідношення (15) і, виходячи з системи (16), отримаємо рівняння для визначення динамічного потенціалу  $\psi_*(\mathbf{r})$  локального поля

$$\nabla \cdot \{\varepsilon_c(\mathbf{r}, \omega) \cdot \nabla \psi_*(\mathbf{r})\} = 0, \quad (25)$$

де  $\varepsilon_c(\mathbf{r}, \omega) = \sum_{\sigma} \varepsilon_c^{(\sigma)}(\omega) \chi_{\sigma}(\mathbf{r}, t)$ ,  $\sigma = \{f, l, m\}$ , – локальна узагальнена комплекс-

на динамічна проникність. Оскільки діелектричні проникності фаз  $\varepsilon_c^{(\sigma)}(\omega)$  не залежать від координати, то зі співвідношення (25) випливає, що в межах кожної фази  $\Delta \psi_* = 0$ . Крім того, поле в композиті приймаємо однорідним, тобто статичний потенціал у ньому має вигляд  $\psi_*(\mathbf{r}) = -(\mathbf{E}_{0*} \cdot \mathbf{r}) = -E_{0*} r \cos \theta$ ,  $r \notin v$ . Тому вирази для потенціалів у межах компонентів можна подати у вигляді розвинення в ряд за поліномами Лежандра  $P_n$  [3]:

$$\psi_{*\sigma}(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( A_n^{(\sigma)} r^n + B_n^{(\sigma)} \frac{1}{r^{n+1}} \right) P_n(\cos \theta), \quad \sigma = \{f, l, m, c\}, \quad (26)$$

де  $A_n^{(\sigma)}$  і  $B_n^{(\sigma)}$  – коефіцієнти розвинення.

На границях поділу складових запишемо умови спряження електричного поля

$$\begin{aligned}
\Psi_{*f} &= \Psi_{*l}, & \varepsilon_c^f(\omega) \frac{\partial \Psi_{*f}}{\partial r} &= \varepsilon_c^l(\omega) \frac{\partial \Psi_{*l}}{\partial r} & \text{при} & & r = a, \\
\Psi_{*l} &= \Psi_{*m}, & \varepsilon_c^l(\omega) \frac{\partial \Psi_{*l}}{\partial r} &= \varepsilon_c^m(\omega) \frac{\partial \Psi_{*m}}{\partial r} & \text{при} & & r = b, \\
\Psi_{*m} &= \Psi_{*c}, & \varepsilon_c^m(\omega) \frac{\partial \Psi_{*m}}{\partial r} &= \bar{\varepsilon}_c(\omega) \frac{\partial \Psi_{*c}}{\partial r} & \text{при} & & r = c,
\end{aligned} \tag{27}$$

і доповнимо їх умовою обмеженості потенціалу  $\lim_{r \rightarrow 0} \Psi_{*f} = \text{const}$ .

Підставляючи вирази для потенціалу (26) у співвідношення (27), отримуємо систему однорідних лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення ненульових коефіцієнтів розкладу  $A_n^{(\sigma)}$  і  $B_n^{(\sigma)}$ . З умови розв'язності системи (рівності нулю визначника) отримуємо закон зміщування для ефективної узагальненої діелектричної сприйнятливості композита  $\bar{\varepsilon}_c$ , який виражає її через сприйнятливості  $\varepsilon_c^\sigma$  та їх об'ємні частки  $\theta_\sigma$ :

$$\bar{\varepsilon}_c(\omega) = \frac{\varepsilon_c^f(\omega)\theta_f + \varepsilon_c^l(\omega)\theta_l R + \varepsilon_c^m(\omega)\theta_m S}{\theta_f + \theta_l R + \theta_m S}, \tag{28}$$

де

$$\begin{aligned}
S &= \frac{(2\varepsilon_c^l(\omega) + \varepsilon_c^f(\omega))(2\varepsilon_c^m(\omega) + \varepsilon_c^l(\omega)) - 2d(\varepsilon_c^l(\omega) - \varepsilon_c^m(\omega))(\varepsilon_c^l(\omega) - \varepsilon_c^f(\omega))}{9\varepsilon_c^m(\omega)\varepsilon_c^l(\omega)}, \\
R &= \frac{2\varepsilon_c^l(\omega) + \varepsilon_c^f(\omega)}{3\varepsilon_c^f(\omega)}, & d &= \frac{\theta_f}{\theta_l + \theta_f}.
\end{aligned}$$

Зауважимо, що у композиті, в якому дисипація електромагнітної енергії зумовлена лише провідністю поверхневого шару  $\varepsilon_l \ll \sigma/\omega$ , а об'ємна частка поверхневого шару  $\theta_l$  є значно меншою ніж частка заповнювача  $\theta_f$ , формула (28) набуває вигляду дебаївського дисперсійного співвідношення [7]:

$$\bar{\varepsilon}_c(\omega) = \bar{\varepsilon}(\omega) = \varepsilon_\infty + \frac{\varepsilon_0 - \varepsilon_\infty}{1 + i\omega\tau_D},$$

де величини

$$\begin{aligned}
\varepsilon_0 &= \varepsilon_m \cdot \frac{1 + 2\theta_f}{1 - \theta_f}, & \varepsilon_\infty &= \varepsilon_m \cdot \frac{(\varepsilon_f + 2\varepsilon_m) + 2 \cdot (\varepsilon_f - \varepsilon_m) \cdot \theta_f}{(\varepsilon_f + 2\varepsilon_m) - (\varepsilon_f - \varepsilon_m) \cdot \theta_f}, \\
\tau_D &= \frac{\theta_f}{1 - \theta_f} \cdot \frac{3\varepsilon_0}{2\sigma_l\theta_l} \cdot [(\varepsilon_f + 2\varepsilon_m) - (\varepsilon_f - \varepsilon_m)\theta_f]
\end{aligned}$$

відповідають статичній і високочастотній діелектричним проникностям і часу релаксації.

**3.2. Модель Максвелла – Гарнета. Наближення ефективного середовища.** У моделі Максвелла – Гарнета [12] розглядається композит, який містить сферичні включення різного сорту  $\sigma$  з радіусами  $a_\sigma$ ,  $\sigma = \{s, l, g\}$ , де (s) – тверда, (l) – рідка, (g) – газоподібна фази. Такі фазові включення (частинки) випадково вкраплені в однорідне фонове середовище (матрицю або основу) (рис. 3). Вибирається область усереднення  $v_A$  з радіусом  $A$  і об'ємом  $V_A$ , який містить  $N_\sigma$  сферичних частинок фази  $\sigma$  ( $a_\sigma \ll A$ ). Матеріали частинок і фонове середовище характеризуються комплекс-

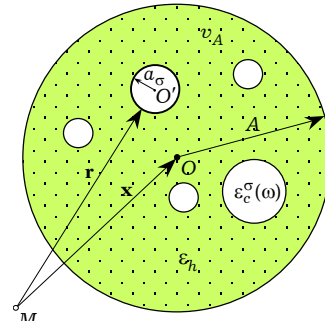


Рис. 3

ними діелектричними сталими  $\varepsilon_c^\sigma(\omega)$  і  $\varepsilon_h$ . Частинки фаз  $\sigma$  займають в області  $v_A$  підоб'єм  $V_\sigma = \bigcup_{N_\sigma} V_{a_\sigma}$ .

Означимо характеристичну функцію  $\chi_\sigma(\mathbf{r}, t)$  для  $\sigma$ -фази  $\chi_\sigma(\mathbf{r}, t) = \prod_{N_\sigma} \chi_{a_\sigma}(\mathbf{r}, t)$ , де  $\chi_{a_\sigma}(\mathbf{r}, t) = \begin{cases} 1, & r < a_\sigma, \\ 0, & r > a_\sigma, \end{cases}$  – характеристична функція для окремої сферичної частинки сорту  $\sigma$ . Якщо  $V_h$  – підоб'єм фонового середовища, то об'єм усереднення  $V_A = \left( \bigcup_{\sigma} V_\sigma \right) \cup V_h$ . Як і для фаз, введемо характеристичну функцію для фонового середовища  $\chi_h(\mathbf{r}, t)$ . Тоді діелектричну проникність композита запишемо у вигляді

$$\varepsilon_c(\mathbf{r}, \omega) = \sum_{\sigma} \varepsilon_c^\sigma(\omega) \chi_\sigma(\mathbf{r}, t) + \varepsilon_h(\omega) \chi_h(\mathbf{r}, t). \quad (29)$$

Застосовуючи метод просторового усереднення, комплексну амплітуду напруженості електричного поля в області  $v_A$  (REV) подамо як суму фазових середніх

$$\langle \mathbf{E}_* \rangle(\mathbf{x}, t) = \sum_{\sigma} \langle \mathbf{E}_* \rangle_{\sigma}(\mathbf{x}, t) + \langle \mathbf{E}_* \rangle_h(\mathbf{x}, t), \quad (30)$$

тут  $\langle \mathbf{E}_* \rangle_{\sigma}(\mathbf{x}, t)$  і  $\langle \mathbf{E}_* \rangle_h(\mathbf{x}, t)$  – величини означені згідно з (7), при цьому фазове середнє

$$\langle \mathbf{E}_* \rangle_{\sigma}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{V_A} \sum_{N_\sigma} V_{a_\sigma} \langle \mathbf{E}_* \rangle_{a_\sigma}^{\sigma}(\mathbf{x}, t), \quad (31)$$

де  $\langle \mathbf{E}_* \rangle_{a_\sigma}^{\sigma}(\mathbf{x}, t)$  – внутрішнє середнє амплітуди  $\mathbf{E}_*(\mathbf{r})$  поля за формулою (8).

Оскільки локальне поле в межах сфери радіусу  $a_\sigma$  є однорідним, тобто

$$\mathbf{E}_*(\mathbf{r}) = (1 - \alpha_\sigma(\omega)) \mathbf{E}_{0*}, \quad \mathbf{r} \in V_{a_\sigma},$$

(де  $\alpha_\sigma(\omega) = \frac{\varepsilon_c^\sigma(\omega) - \varepsilon_h}{\varepsilon_c^\sigma(\omega) + 2\varepsilon_h}$  – поляризованість сферичної частинки  $\sigma$ -фази,  $\mathbf{E}_{0*}$  – амплітуда прикладеного однорідного зовнішнього поля), то внутрішнє середнє амплітуди напруженості електричного поля буде

$$\langle \mathbf{E}_* \rangle_{a_\sigma}^{\sigma}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{V_{a_\sigma}} \int_{V_{a_\sigma}} \mathbf{E}_*(\mathbf{r}) \chi_{a_\sigma}(\mathbf{r}, t) dV_{a_\sigma} = (1 - \alpha_\sigma(\omega)) \mathbf{E}_{0*}.$$

Підставивши його вираз в (31) для фазового середнього, знаходимо

$$\langle \mathbf{E}_* \rangle_{\sigma}(\mathbf{x}, t) = \frac{(1 - \alpha_\sigma(\omega)) \mathbf{E}_{0*}}{V_A} \sum_{N_\sigma} V_{a_\sigma} = \theta_\sigma (1 - \alpha_\sigma(\omega)) \mathbf{E}_{0*}. \quad (32)$$

Враховуючи, що середня поляризованість об'єму усереднення  $V_A$  пов'язана з поляризованостями частинок співвідношенням  $\langle \alpha \rangle = \sum_{\sigma} \theta_\sigma \alpha_\sigma(\omega)$ , згідно з

(30) для просторово середнього  $\langle \mathbf{E}_* \rangle(\mathbf{x}, t)$  отримуємо вираз

$$\langle \mathbf{E}_* \rangle(\mathbf{x}, t) = \mathbf{E}_{0*} \sum_{\sigma} \theta_\sigma (1 - \alpha_\sigma(\omega)) \langle \mathbf{E}_* \rangle_h(\mathbf{x}, t) = \mathbf{E}_{0*} (1 - \langle \alpha \rangle) + \langle \mathbf{E}_* \rangle_h(\mathbf{x}, t). \quad (33)$$

Просторове середнє для амплітуди узагальненого електричного зміщення у межах області усереднення  $v_A$  є сумою фазових середніх:

$$\langle \mathbf{D}' \rangle(\mathbf{x}, t) = \langle \varepsilon_c \mathbf{E}_* \rangle_{\sigma}(\mathbf{x}, t) + \varepsilon_h \langle \mathbf{E}_* \rangle_h(\mathbf{x}, t). \quad (34)$$



Використовуючи вирази (29) і (32), перший доданок в (34) подамо у вигляді

$$\langle \varepsilon_c \mathbf{E}_* \rangle_\sigma(\mathbf{x}, t) = \sum_\sigma \varepsilon_c^\sigma(\omega) \langle \mathbf{E}_* \rangle_\sigma(\mathbf{x}, t) = \mathbf{E}_{0*} \sum_\sigma \theta_\sigma \varepsilon_c^\sigma(\omega) (1 - \alpha_\sigma(\omega)). \quad (35)$$

Тоді, підставивши  $\langle \mathbf{E}_* \rangle_h(\mathbf{x}, t)$  зі співвідношення (33) у формулу (34), отримуємо

$$\langle \mathbf{D}'_* \rangle(\mathbf{x}, t) = 3\varepsilon_h \langle \alpha \rangle \mathbf{E}_{0*} + \varepsilon_h \langle \mathbf{E}_* \rangle(\mathbf{x}, t). \quad (36)$$

Розглядаючи невзаємодіючі сферичні частинки ( $\langle \mathbf{E}_* \rangle_h(\mathbf{x}, t) = 0$ ), згідно з формулою (33) отримуємо амплітуду напруженості зовнішнього однорідного поля

$$\mathbf{E}_{0*} = \frac{\langle \mathbf{E}_* \rangle(\mathbf{x}, t)}{1 - \langle \alpha \rangle}. \quad (37)$$

Підставивши цей вираз у (36) і беручи до уваги означення ефективної узагальненої комплексної динамічної діелектричної проникності (20), приходимо до закону змішування Максвелла – Гарнета [12]

$$\bar{\varepsilon}_c(\omega) = \varepsilon_h \left( 1 + \frac{3 \langle \alpha \rangle}{1 - \langle \alpha \rangle} \right). \quad (38)$$

У літературі відоме також наближення ефективного середовища (ЕМА – effective medium approach), у якому приймають  $\varepsilon_h = \bar{\varepsilon}_c(\omega)$ ,  $\langle \alpha \rangle = 0$ . Тоді, використовуючи означення середньої поляризованості  $\langle \alpha \rangle$ , отримуємо закон змішування Брюгемана [6]

$$\sum_\sigma \theta_\sigma \frac{\varepsilon_c^\sigma(\omega) - \bar{\varepsilon}_c(\omega)}{\varepsilon_c^\sigma(\omega) + 2\bar{\varepsilon}_c(\omega)} = 0. \quad (39)$$

Для визначення  $\bar{\varepsilon}_c(\omega)$  за формулою (39) діелектрична проникність  $\varepsilon_h$  фонового середовища непотрібна.

**3.3. Модель плоских паралельних шарів.** У моделі плоских паралельних шарів (WB – Winer bounds) [14] у межах області усереднення композит моделюється паралельними шарами з однорідного матеріалу фаз, орієнтованими перпендикулярно або вздовж напрямку зовнішнього однорідного гармонічного електромагнітного поля. Поза областю усереднення композит розглядається як суцільне гомогенне середовище. При визначенні ефективної діелектричної проникності використовується, як і в попередніх моделях, метод гомогенізації, що базується на співвідношенні (20).

Якщо шари орієнтовані перпендикулярно до поля, то на межі поділу фаз записують лише умови рівності амплітуди діелектричного зміщення

$$\mathbf{D}'_{0*} = \varepsilon_c^\ell(\omega) \mathbf{E}_{\ell*} = \varepsilon_c^{\ell+1}(\omega) \mathbf{E}_{\ell+1*}, \quad \mathbf{r} \in \nu, \quad (40)$$

де  $\mathbf{E}_{\ell*}$  і  $\mathbf{E}_{\ell+1*}$  – амплітуди напруженості електричного поля в межах  $\ell$ -го та  $(\ell + 1)$ -го шарів з матеріалів різних фаз, а  $\varepsilon_c^\ell(\omega)$  і  $\varepsilon_c^{\ell+1}(\omega)$  – їх узагальнені динамічні діелектричні сталі. Для амплітуди напруженості електричного поля в REV справджується подання

$$\mathbf{E}_*(\mathbf{r}, t) = \sum_\sigma \chi_\sigma(\mathbf{r}, t) \mathbf{E}_{\sigma*}, \quad (41)$$

де  $\chi_\sigma$  – характеристична функція для  $\sigma$ -фази. З урахуванням контактних умов (40) співвідношення (41) записуємо у вигляді

$$\mathbf{E}_*(\mathbf{r}, t) = \mathbf{D}'_{0*} \sum_\sigma \frac{\chi_\sigma(\mathbf{r}, t)}{\varepsilon_c^\sigma(\omega)}. \quad (42)$$

Після процедури просторового усереднення співвідношень (40) і (42) отримуємо

$$\langle \mathbf{D}'_*(\mathbf{x}, t) \rangle = \mathbf{D}'_{0*}, \quad \langle \mathbf{E}_*(\mathbf{x}, t) \rangle = \mathbf{D}'_{0*} \sum_{\sigma} \frac{\theta_{\sigma}(\mathbf{x}, t)}{\varepsilon_c^{\sigma}(\omega)},$$

де  $\theta_{\sigma}(\mathbf{x}, t)$  – об'ємна частка  $\sigma$ -фази. Звідси згідно з (20) отримуємо закон змішування

$$\frac{1}{\bar{\varepsilon}_c(\omega)} = \sum_{\sigma} \frac{\theta_{\sigma}(\mathbf{x}, t)}{\varepsilon_c^{\sigma}(\omega)}. \quad (43)$$

Аналогічно знаходимо ефективну узагальнену комплексну динамічну діелектричну проникність для композита при розташуванні шарів уздовж поля. У цьому випадку на межі поділу фаз записуються лише умови рівності тангентальних компонент напруженості електричного поля

$$\mathbf{E}_{0*} = \mathbf{E}_{l*} = \mathbf{E}_{l+1*}, \quad \mathbf{r} \in v.$$

При цьому

$$\mathbf{D}'_*(\mathbf{r}, t) = \sum_{\sigma} \chi_{\sigma}(\mathbf{r}, t) \varepsilon_c^{\sigma}(\omega) \mathbf{E}_{\sigma*}$$

і закон змішування визначається співвідношенням

$$\bar{\varepsilon}_c(\omega) = \sum_{\sigma} \theta_{\sigma}(\mathbf{x}, t) \varepsilon_c^{\sigma}(\omega), \quad (44)$$

яке співпадає з формулою (23).

Формули (43) і (44) відомі у літературі [14] як зв'язки Вайнера та описують відповідно мінімальне і максимальне значення ефективної діелектричної сталої композита.

**4. Узагальнений підхід до визначення діелектричних властивостей трифазного пористого середовища.** Наведені вище закони змішування для визначення ефективної узагальненої комплексної динамічної діелектричної проникності композита можна застосувати до пористого зволоженого середовища, яке є трикомпонентним композитом, що містить тверду – скелет ( $S$ ), рідку – вода ( $W$ ) та газоподібну – повітря ( $A$ ) фази. На їх основі сформулюємо загальний метод розрахунку ефективної діелектричної проникності  $\bar{\varepsilon}_c(\omega)$  середовища з відомою пористістю  $\phi$  при різних ступенях насичення водою  $S_l$ . Для цього проаналізуємо наведені в пп. 3.1–3.3 модельні залежності  $\bar{\varepsilon}_c(\omega)$  від об'ємної частки води  $\theta_l$  при фіксованій частоті  $\nu = \omega/2\pi = 1.8884 \cdot 10^9$  Гц зовнішнього поля. При цьому вважаємо, що комплексні діелектричні характеристики  $\varepsilon_s$ ,  $\varepsilon_w$  та  $\varepsilon_a$  ( $\varepsilon_s$  – скелет,  $\varepsilon_w$  – вода,  $\varepsilon_a$  – повітря) окремих фаз зволоженого багатофазного середовища є відомими з експерименту (табл. 1 [4]).

Таблиця 1

$\varepsilon_s$		$\varepsilon_w$		$\varepsilon_a$	
$\varepsilon'_s$	$\varepsilon''_s$	$\varepsilon'_w$	$\varepsilon''_w$	$\varepsilon'_a$	$\varepsilon''_a$
5.5	0.116	80	20	1	0

За базу виберемо багатшарову сферичну модель FLM, розглянуту в п. 3.1. Нагадаємо, що в ній кожна точка трикомпонентного композитного тіла моделюється сферичною частинкою (заповнювачем –  $f$ ), оточеною поверхневим шаром  $l$  і матрицею  $m$  (рис. 2). Для пористого зволоженого тіла у моделі FLM всього можливі шість фазових конфігурацій: SWA, SAW, WSA, ASW, WAS і AWS (перша літера означає заповнювач) для сферичних включень. З них фізично обґрунтованими є три: SAW, SWA і WAS. Діелектричні проникності заповнювача  $\varepsilon_f$ , поверхневого шару  $\varepsilon_l$  і матриці  $\varepsilon_m$  та їх об'ємні частки  $\theta_{\sigma}$ ,  $\sigma = \{f, l, m\}$ , для цих конфігурацій подані у табл. 2.

Таблиця 2

Конфігурація	Діелектричні проникності			Об'ємні частки		
	$\varepsilon_f$	$\varepsilon_l$	$\varepsilon_m$	$\theta_f$	$\theta_l$	$\theta_m$
SAW	$\varepsilon_s$	$\varepsilon_a$	$\varepsilon_w$	$1 - \varphi$	$\varphi(1 - S_l)$	$\varphi S_l$
SWA	$\varepsilon_s$	$\varepsilon_w$	$\varepsilon_a$	$1 - \varphi$	$\varphi S_l$	$\varphi(1 - S_l)$
WAS	$\varepsilon_w$	$\varepsilon_a$	$\varepsilon_s$	$\varphi S_l$	$\varphi(1 - S_l)$	$1 - \varphi$

**Обґрунтування.** За фіксованої середньої пористості  $\varphi = 1/2$  при малих значеннях ступеня насичення вологою ( $S_l \rightarrow 0$ ) рівномірними є конфігурації, для яких фоновою фазою виступає скелет або повітря, а при великих значеннях ( $S_l \rightarrow 1$ ) – вода або скелет, тобто

$$\bar{\varepsilon}_{\{SAW,SWA\}}|_{S_l \rightarrow 0} = \bar{\varepsilon}_{MG}(\varepsilon_h \rightarrow \varepsilon_a)|_{S_l \rightarrow 0},$$

$$\bar{\varepsilon}_{\{SAW,SWA\}}|_{S_l \rightarrow 1} = \bar{\varepsilon}_{MG}(\varepsilon_h \rightarrow \varepsilon_w)|_{S_l \rightarrow 1},$$

$$\bar{\varepsilon}_{WAS}|_{S_l \rightarrow 0} = \bar{\varepsilon}_{MG}(\varepsilon_h \rightarrow \varepsilon_s)|_{S_l \rightarrow 0}, \quad \bar{\varepsilon}_{WAS}|_{S_l \rightarrow 1} = \bar{\varepsilon}_{MG}(\varepsilon_h \rightarrow \varepsilon_s)|_{S_l \rightarrow 1},$$

тут  $\bar{\varepsilon}_\Phi$ ,  $\Phi = \{SAW, SWA, WAS\}$ , – ефективна узагальнена комплексна динамічна діелектрична проникність для даних конфігурацій розрахована за моделлю FLM (28), а  $\bar{\varepsilon}_{MG}$  – за моделлю Максвелла – Гарнета (38) ( $\varepsilon_h$  – діелектрична проникність фонового середовища).

Базуючись на моделі ЕМА (п. 3.2, формула (39)), проаналізуємо внески конфігурацій SAW, SWA і WAS у розрахованій за формулою (28) ефективній проникності  $\bar{\varepsilon}_c(\omega)$  композита, а також порівняємо наведені значення ефективної узагальненої комплексної динамічної діелектричної проникності за цими моделями з граничними (п. 3.3, формули (43) і (44)) для багатошарової (WB) моделі.

На рис. 4 та рис. 5 показані залежності дійсної  $\varepsilon'_c$  та уявної  $\varepsilon''_c$  частин ефективної комплексної динамічної діелектричної проникності від об'ємної частки  $\theta_l$  води, розраховані за конфігураційною (FLM) (для SAW, SWA і WAS), самоузгодженою (ЕМА) і багатошаровою (WB) моделями.

Видно, що з трьох допустимих конфігурацій дві – SAW і WAS, дають значення ефективної узагальненої комплексної динамічної діелектричної проникності, близькі відповідно до максимального і мінімального, розрахованими за моделлю WB.

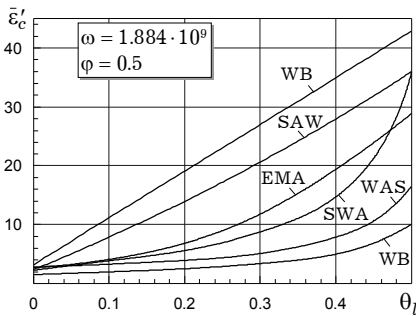


Рис. 4

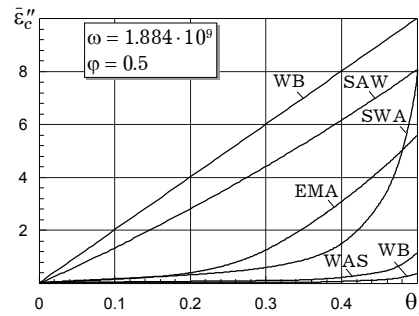


Рис. 5

На рис. 6 для згаданих моделей подано залежність тангенса кута діелектричних втрат  $\text{tg } \delta = \bar{\varepsilon}''_c(\omega)/\bar{\varepsilon}'_c(\omega)$  від об'ємної частки води  $\theta_l$  за середньої пористості ( $\varphi = 1/2$ ). З аналізу даних, наведених на рис. 4–6, випливає,

що конфігурація SWA відіграє роль проміжної (рівноважної) і може бути застосована для опису діелектричних властивостей тіл із пористістю, близькою до середньої. На це вказує також близькість кривої, розрахованої для даної конфігурації, з кривою, побудованою за моделлю ЕМА.

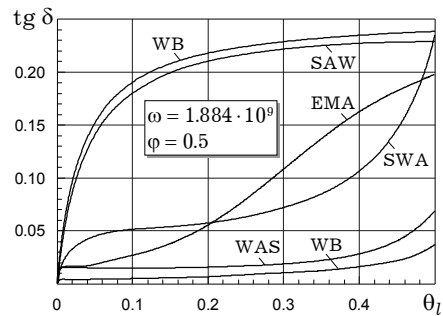


Рис. 6

Для тіл з великим ( $\varphi = 0.75$ ) і малим ( $\varphi = 0.25$ ) значеннями пористості залежності  $\text{tg } \delta$  від ступеня насичення водою  $S_l$ , розраховані за різними моделями, зображені відповідно на рис. 7 та рис. 8.

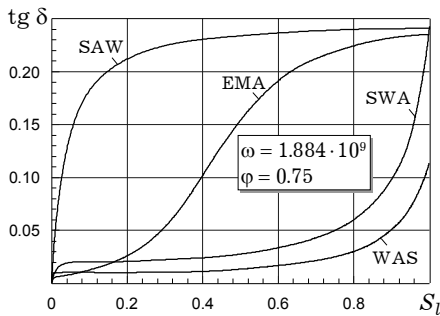


Рис. 7

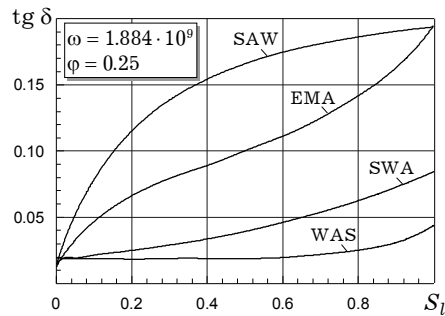


Рис. 8

З аналізу цих залежностей випливає, що наближення ЕМА займає проміжне місце між конфігураціями SAW і SWA для тіл із великою пористістю (рис. 7) і між конфігураціями SWA і WAS для тіл із малою пористістю (рис. 8). Крива, розрахована згідно з моделлю ЕМА, на рис. 7 вказує, що  $\text{tg } \delta = \bar{\epsilon}_c'' / \bar{\epsilon}_c''$  при повному насиченні водою ( $S_l \rightarrow 1$ ) прямує до сталого значення у тілах з великою пористістю.

**Висновки.** Жодна з конфігурацій багатосферної сферичної моделі FLM не може бути застосована для розрахунку ефективних електрофізичних властивостей зволоженого пористого середовища при великих і малих значеннях пористості  $\varphi$ . Модель Максвелла – Гарнета лише у випадку, коли скелет виступає як фонове середовище ( $\epsilon_h = \epsilon_s$ ), коректно описує наявність рідкої фази у тілах з малою пористістю. Єдиною моделлю, яка обґрунтовує конфігураційний підхід FLM та адекватно враховує міжфазну взаємодію у пористому середовищі, є модель Брюгемана ЕМА. Наближення ефективного середовища придатне для розрахунку електрофізичних характеристик у зволжених тілах з довільною пористістю.

1. Бурак Я. Й., Гачкевич О. Р., Терлецький Р. Ф. Термомеханіка багатокомпонентних тіл низької електропровідності. – Львів: СПОЛЮМ, 2006. – 296 с. – (Моделювання та оптимізація в термомеханіці електропровідних неоднорідних тіл: В 5 т. – Т. 1.)
2. Губкин А. Н. Физика диэлектриков. Теория диэлектрической поляризации в постоянном и переменном электрическом поле. – Москва: Высш. шк., 1971. – 268 с.
3. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. – Москва: Наука, 1978. – 831 с.

4. *Машкович М. Д.* Электрические свойства неорганических диэлектриков в диапазоне СВЧ. – Москва: Сов. радио, 1969. – 238 с.
5. *Bottcher C. J. F., Bordewijk P.* Theory of electric polarization. – Amsterdam: Elsevier, 1978. – Vol. II. – 476 p.
6. *Bruggeman D. A. G.* Berechnung verschiedener physikalischer Konstanten von heterogenen Substanzen. I. Dielektrizitätskonstanten und Leitfähigkeiten der Mischkörper aus isotropen Substanzen // *Ann. Phys. Leipzig.* – 1935. – **24.** – P. 636–679.
7. *Debye P.* Polar molecules. – New York: Dover Publications, 1945. – 246 p.  
Те саме: *Дебай П.* Полярные молекулы. – Москва – Ленинград: Госнаучтехиздат, 1931. – 247 с.
8. *Foster K. R., Schwan H. P.* Dielectric properties of tissues and biological materials: a critical review // *Crit. Rev. in Biomed. Eng.* – 1987. – **91.** – P. 3072–3076.
9. *Gawin D.* Modelowanie sprzężonych zjawisk ciepno-wilgotnościowych w materiałach i elementach budowlanych. – Łódź: Wyd-wo Politechniki Łódzkiej, 2000. – 303 s. – *Zeszyty nauk. Politechniki Łódz.* – Vol. **853.**
10. *Howes A. H., Whitaker S.* The spatial averaging theorem revisited // *Chem. Eng. Sci.* – 1980. – **23.** – No. 12. – P. 1613–1623.
11. *IUPAC.* Manual of symbols and terminology for physico-chemical quantities and units. Appendix II // *Pure and Appl. Chemistry.* – 1972. – **31.** – No. 4. – P. 577–621.
12. *Maxwell J. C., Garnett B. A.* Colours in metal glasses and in metallic films // *Philos. Trans. R. Soc., Ser. A. London.* – 1904. – **203.** – P. 385–420.
13. *Scaman C. H., Durance T. D.* Combined microwave vacuum drying // In: *Emerging Technologies in Food Processing / Ed. Da-Wen Sun.* – London: Elsevier Acad. Press, 2005. – P. 527–534.
14. *Sihlova A.* Electromagnetic mixing formulas and applications. – London: Inst. Electr. Eng (IEE), 1999. – 304 p.
15. *Smith K. A., Mullins C. E.* Soil and environmental analysis: Physical methods. – New York: Marcell Dekker, 2001. – 656 p.
16. *Steevan P. A. M., Maurer F. H. J.* An interlayer model for the complex dielectric constant of composites // *Colloid and Polymer Sci.* – 1990. – **268.** – P. 315–325.
17. *Strzelecki T.* Mechanika ośrodków niejednorodnych. Teorja homogenizacji. – Wrocław: Dolnośląskie Wyd-wo Edukacyjne, 1996. – 266 p.
18. *White I., Zegelin S. J.* Electric and dielectric methods for monitoring soil-water content // In: *Handbook of Vadose Zone Characterization and Monitoring / Eds L. G. Wilson et al.* – New York: 1995. – P. 343–385.
19. *Wyrwal J.* Termodynamiczne podstawy fizyki budowli. – Opole: Politechnika Opolska, 2004. – 251 s.

#### **РАСЧЕТ ЭФФЕКТИВНЫХ ЭЛЕКТРОФИЗИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК УВЛАЖНЕННЫХ ПОРИСТЫХ МАТЕРИАЛОВ**

*Рассмотрены особенности гомогенизации пористой области. С использованием метода пространственного усреднения при локальном представлении параметров поля введены эффективные электрофизические характеристики пористой увлажненной среды и записаны уравнения электродинамики. Предложена обобщенная методика расчета диэлектрических потерь в пористых телах слабой электропроводности с разным содержанием влаги.*

#### **EVALUATION OF EFFECTIVE ELECTRO-PHYSICAL CHARACTERISTICS FOR DEWY POROUS MATERIALS**

*The peculiarities of homogenization for porous media have been considered. Based on a spatial averaging method following from a local field conception the effective electro-physical characteristics for the porous dewy region have been introduced and equations of electrodynamics have been represented. Generalized principles for evaluation of dielectric losses in the porous media of weak conductivity with various water content have been proposed.*

Ін-т прикл. проблем механіки і математики  
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано  
22.07.08