

**МЕХАНОЕЛЕКТРОМАГНІТНА ВЗАЄМОДІЯ В ІЗОТРОПНИХ ДІЕЛЕКТРИКАХ З УРАХУВАННЯМ ЛОКАЛЬНОГО ЗМІЩЕННЯ МАСИ**

*На основі запропонованої раніше моделі електромагнітомеханіки поляризованих тіл, яка враховує процес локального зміщення маси, ключові рівняння записано відносно відповідних скалярних і векторних потенціалів. Запропоновано узагальнення калібрування Лоренца, при якому рівняння для визначення скалярного та векторного потенціалів електромагнітного поля стають незв'язаними. Записано розв'язувальну систему рівнянь відносно потенціалів у безрозмірній формі та отримано параметр взаємозв'язку процесів локального зміщення маси та деформування. З використанням цієї системи досліджено поширення плоскої гармонічної хвилі у безмежному ізотропному середовищі. Показано, що модель описує дисперсію модифікованої пружної хвилі в області високих частот. Одержані результати узгоджуються з відомими у літературі, отриманими з використанням співвідношень градієнтної теорії п'єзоелектриків.*

**1. Вступ.** У класичних теоріях електромагнітної механіки діелектриків за спряжені параметри стану приймають тензори деформації – напружень та вектори напруженості електричного поля – поляризації. Такий підхід у лінійному наближенні дозволяє врахувати взаємодію механічних та електромагнітних полів в анізотропних матеріалах (п'єзоелектриках) [9–13, 21]. Для ізотропних тіл взаємозв'язок механічних та електромагнітних полів у таких моделях відсутній, що не узгоджується з результатами експериментальних досліджень [11]. У праці [2] за параметри стану, що характеризують процес поляризації (локального зміщення електричного заряду), вибрано тензорну характеристику розподілу зв'язаних зарядів і тензор електричних напружень та отримано систему диференціальних рівнянь, яка описує взаємозв'язок механічних, теплових та електромагнітних полів в електропровідному неполяризованому ізотропному твердому тілі. У роботах [17, 20] розширено простір параметрів стану діелектричних тіл і, крім векторних параметрів напруженості електричного поля – поляризації, введено пару тензорних характеристик, однією з яких є градієнт вектора поляризації. Така нелокальна теорія якісно добре описує дисперсію коротких хвиль [18, 22, 24], встановлену експериментально [15, 16] аномальну залежність смності тонких діелектричних плівок від їх товщини [17, 24], а також враховує у лінеаризованому наближенні взаємодію механічних та електромагнітних полів у тілах із центральною симетрією [19]. Огляд досліджень, проведених у рамках нелокальних теорій п'єзоелектричних тіл, можна знайти у працях [10, 23].

У роботах [3, 4, 14] показано, що врахування в поляризованих тілах, окрім локального зміщення електричного заряду, також і локального зміщення маси приводить до співвідношень, які описують у лінеаризованому наближенні механоелектромагнітну взаємодію в ізотропних матеріалах. Один із шляхів врахування необоротності процесів локальних зміщень маси та електричного заряду запропоновано в [4]. Побудовані таким чином моделі поляризованих тіл є нелокальними [4, 5] і також дозволяють описати аномалію Міда [7].

Метою цієї роботи є подальше дослідження (у рамках запропонованих авторами раніше модельних співвідношень) ефектів механоелектромагнітної взаємодії для ізотропних матеріалів.

**2. Вихідні рівняння.** Якщо за визначальні функції вибрати збурення функцій векторів переміщення  $\mathbf{u}$ , напруженості електричного  $\mathbf{E}$ , індукції магнітного  $\mathbf{B}$  полів і скалярної величини  $\tilde{\mu}'_{\pi} = \mu'_{\pi} - \mu'_{\pi 0}$ , то в ізотермічному

лінеаризованому наближенні ключова система співвідношень моделі електромагніто механіки деформівних твердих тіл, що враховує локальне зміщення маси, має вигляд [3, 14]

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \left( a_1^\sigma + a_2^\sigma - \frac{a_{ep}^2}{\rho_0 a_\rho^\mu} \right) \nabla \otimes \nabla \cdot \mathbf{u} + a_2^\sigma \Delta \mathbf{u} + \frac{a_{ep}}{a_\rho^\mu} \nabla \tilde{\mu}'_\pi + \rho_0 \mathbf{F}, \quad (1)$$

$$\Delta \tilde{\mu}'_\pi + \frac{1}{a_\mu^\pi a_\rho^\mu} \tilde{\mu}'_\pi = \frac{1}{a_\mu^\pi a_\rho^\mu} \frac{a_{ep}}{\rho_0} \nabla \cdot \mathbf{u} - \frac{a_{E\mu}}{a_\mu^\pi} \nabla \cdot \mathbf{E}, \quad (2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \cdot [\varepsilon \mathbf{E} - \rho_0 a_{E\mu} \nabla \tilde{\mu}'_\pi] = 0,$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \rho_0 \mu_0 a_{E\mu} \frac{\partial \nabla \tilde{\mu}'_\pi}{\partial t}. \quad (3)$$

Тут  $\mu'_\pi = \mu_\pi - \mu$ ;  $\mu, \mu_\pi$  – хімічний потенціал і міра зміни питомої внутрішньої енергії системи, спричиненої локальним зміщенням маси;  $\rho_0$  – густина маси у початковий момент часу;  $\mathbf{F}$  – вектор масових сил;  $\varepsilon = \varepsilon_0 - \rho_0 a_E^p$  – діелектрична проникність середовища, а  $\varepsilon_0$  та  $\mu_0$  – діелектрична та магнітна проникності вакууму;  $a_{ep}, a_\rho^\mu, a_\mu^\pi, a_1^\sigma, a_2^\sigma, a_{E\mu}, a_E^p$  – характеристики матеріалу;  $\nabla$  – оператор Гамільтона;  $\Delta$  – оператор Лапласа; « $\otimes$ », « $\times$ », « $\cdot$ » – символи відповідно діадного, векторного та скалярного добутків. Зазначимо, що система рівнянь (1)–(3) записана для вихідного стану, в якому  $\mathbf{u} = 0$ ,  $\mu'_\pi = \mu'_{\pi 0}$ ,  $\nabla \mu'_\pi = 0$ .

### 3. Потенціальний опис.

**3.1. Калібрування Лоренца.** Подамо вектор переміщення  $\mathbf{u}$  як суму його потенціальної та вихрової складових, а напруженості електричного  $\mathbf{E}$  та магнітного  $\mathbf{B}$  полів, як прийнято в електродинаміці [1, 11], через скалярний (електричний) потенціал  $\varphi_e$  і векторний потенціал  $\mathbf{A}$ :

$$\mathbf{u} = \nabla \varphi_m + \nabla \times \boldsymbol{\psi}, \quad \nabla \cdot \boldsymbol{\psi} = 0, \quad (4)$$

$$\mathbf{E} = -\nabla \varphi_e - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (5)$$

Аналогічним чином вектор масових сил  $\mathbf{F}$  запишемо у вигляді

$$\mathbf{F} = \nabla \Phi + \nabla \times \boldsymbol{\Psi}, \quad \nabla \cdot \boldsymbol{\Psi} = 0.$$

Тоді, враховуючи формулу (4), з рівняння руху (1) маємо

$$\left( a_1^\sigma + 2a_2^\sigma - \frac{a_{ep}^2}{\rho_0 a_\rho^\mu} \right) \Delta \varphi_m - \rho_0 \frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial t^2} + \rho_0 \Phi = -\frac{a_{ep}}{a_\rho^\mu} \tilde{\mu}'_\pi, \quad (6)$$

$$a_2^\sigma \Delta \boldsymbol{\Psi} - \rho_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{\Psi}}{\partial t^2} + \rho_0 \boldsymbol{\Psi} = 0. \quad (7)$$

Якщо тепер співвідношення (5) підставити в останнє з рівнянь системи (3), то отримаємо

$$\Delta \mathbf{A} - \mu_0 \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \rho_0 \mu_0 a_{E\mu} \frac{\partial \nabla \tilde{\mu}'_\pi}{\partial t} = \nabla \left( \nabla \cdot \mathbf{A} + \mu_0 \varepsilon \frac{\partial \varphi_e}{\partial t} \right). \quad (8)$$

Приймемо надалі, що справджується умова калібрування Лоренца [1]

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \mu_0 \varepsilon \frac{\partial \varphi_e}{\partial t} = 0. \quad (9)$$

За врахування співвідношення (9) рівняння (8) набуде вигляду

$$\Delta \mathbf{A} - \mu_0 \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = \rho_0 \mu_0 a_{E\mu} \frac{\partial \nabla \tilde{\mu}'_\pi}{\partial t}. \quad (10)$$

Якщо подання (5) для вектора напруженості електричного поля підставити

у третє з рівнянь системи (3) і врахувати формулу (9), то у підсумку одержимо

$$\Delta\varphi_e - \mu_0\varepsilon \frac{\partial^2\varphi_e}{\partial t^2} = -\frac{\rho_0 a_{E\mu}}{\varepsilon} \Delta\tilde{\mu}'_\pi. \quad (11)$$

Враховуючи співвідношення (9) та (11), шляхом підстановки формул (4), (5)<sub>1</sub> у рівняння (2) маємо

$$\left(1 + \frac{\rho_0 a_{E\mu}^2}{\varepsilon a_\mu^\pi}\right) \Delta\tilde{\mu}'_\pi - \lambda^2 \tilde{\mu}'_\pi = -\lambda^2 \frac{a_{ep}}{\rho_0} \Delta\varphi_m. \quad (12)$$

Тут  $\lambda^2 = -(a_\mu^\pi a_\rho^\mu)^{-1} > 0$  [8]. Величина  $\lambda^{-1}$  має розмірність довжини і є характерною віддалю [7].

Таким чином, перейшовши до потенціального опису згідно з формулами (4), (5) і прийнявши умову калібрування Лоренца (9), замість ключових рівнянь (1)–(3) моделі локально градієнтної електромагнітомеханіки отримуємо систему рівнянь (6), (7), (10)–(12). Рівняння (7) для визначення функції  $\Psi$  не є пов'язане з рештою рівнянь цієї системи. Це свідчить, що зміна форми не пов'язана не тільки зі зміною об'єму (стиском-розтягом), а й з локальним зміщенням маси та електромагнітними процесами. Поперечна хвиля є механічною. На противагу цьому механічний процес зміни об'єму (який характеризується скалярним потенціалом  $\varphi_m$ ) взаємозв'язаний з процесом локального зміщення маси (рівняння (6) і (12)). Локальне зміщення маси є причиною збурення електромагнітного поля (див. рівняння (10), (11)). При цьому для збурення індукції магнітного поля отримуємо однорідне рівняння. Справді, діючи оператором  $\text{rot}$  на рівняння (10) і враховуючи, що  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ , а  $\nabla \times (\nabla \tilde{\mu}'_\pi) = 0$ , отримуємо

$$\Delta\mathbf{B} - \mu_0\varepsilon \frac{\partial^2\mathbf{B}}{\partial t^2} = 0.$$

Це свідчить, що магнітна складова електромагнітного поля не пов'язана ні з процесами стиску-розтягу, ні зсуву, ні локального зміщення маси. А для визначення напруженості електричного поля  $\mathbf{E} = -\nabla\varphi_e - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}$  з рівнянь (10) і (11) одержуємо таке неоднорідне рівняння:

$$\Delta\mathbf{E} - \mu_0\varepsilon \frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{\rho_0 a_{E\mu}}{\varepsilon} \left[ \Delta(\nabla\tilde{\mu}'_\pi) - \mu_0\varepsilon \frac{\partial^2(\nabla\tilde{\mu}'_\pi)}{\partial t^2} \right]. \quad (13)$$

Звідси випливає, що збурення функції  $\tilde{\mu}'_\pi$  (процес локального зміщення маси) є причиною виникнення збурення електричного поля. Зазначимо при цьому, що для векторної величини

$$\mathbf{E}_\mu = \mathbf{E} - \frac{\rho_0 a_{E\mu}}{\varepsilon} \nabla\tilde{\mu}'_\pi \quad (14)$$

з (13) одержуємо таке однорідне хвильове рівняння:

$$\Delta\mathbf{E}_\mu - \mu_0\varepsilon \frac{\partial^2\mathbf{E}_\mu}{\partial t^2} = 0. \quad (15)$$

Це означає, що збурення величини  $\mathbf{E}_\mu$  не пов'язане ні з механічними процесами, ні з локальним зміщенням маси.

Якщо рівняння (6) підставити у (12), то із системи рівнянь (6), (7), (10)–(12) можна виключити функцію  $\tilde{\mu}'_\pi$ . Тоді для визначення функції  $\varphi_m$  одержуємо таке рівняння четвертого порядку:

$$\left(1 + \frac{\rho_0 a_{E\mu}^2}{\varepsilon a_\mu^\pi}\right) \left[ \left( a_1^\sigma + 2a_2^\sigma - \frac{a_{ep}^2}{\rho_0 a_\rho^\mu} \right) \Delta \Delta \varphi_m - \rho_0 \frac{\partial^2 (\Delta \varphi_m)}{\partial t^2} \right] - (a_1^\sigma + 2a_2^\sigma) \lambda^2 \Delta \varphi_m + \rho_0 \lambda^2 \frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial t^2} + \rho_0 \left[ \lambda^2 \Phi - \left( 1 + \frac{\rho_0 a_{E\mu}^2}{\varepsilon a_\mu^\pi} \right) \Delta \Phi \right] = 0.$$

Якщо розв'язок  $\varphi_m$  цього рівняння знайдено, то з рівняння (6) обчислюємо функцію  $\tilde{\mu}'_\pi$ , а на основі (10) та (11) визначаємо невідомі векторну  $\mathbf{A}$  і скалярну  $\varphi_e$  функції.

**3.2. Узагальнене калібрування Лоренца.** З огляду на співвідношення (14) введемо функцію  $\varphi_{e\mu}$  таку, що

$$\varphi_{e\mu} = \varphi_e + \frac{\rho_0 a_{E\mu}}{\varepsilon} \tilde{\mu}'_\pi, \quad (16)$$

яку назвемо узагальненим скалярним потенціалом. За умову калібрування приймемо тепер співвідношення

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \mu_0 \varepsilon \frac{\partial \varphi_{e\mu}}{\partial t} = 0, \quad (17)$$

яке для моделі, що розглядається, узагальнює калібрування Лоренца (9). Тоді з рівнянь (8), (11) для визначення векторного потенціалу  $\mathbf{A}$  та узагальненого скалярного потенціалу  $\varphi_{e\mu}$  отримаємо однорідні рівняння

$$\Delta \mathbf{A} - \mu_0 \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = 0, \quad (18)$$

$$\Delta \varphi_{e\mu} - \mu_0 \varepsilon \frac{\partial^2 \varphi_{e\mu}}{\partial t^2} = 0. \quad (19)$$

Рівняння (6), (7), (12), які використовують для визначення потенціалів  $\Psi$ ,  $\varphi_m$  та  $\mu'_\pi$ , залишаються без змін. Таким чином, процеси, які описуються полями  $\Psi$ ,  $\mathbf{A}$  та  $\varphi_{em}$ , не пов'язані ні між собою, ні з процесами локального зміщення маси та стиску-розтягу.

**4. Безрозмірна форма рівнянь.** Введемо такі безрозмірні величини:

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{R}} &= \frac{\mathbf{r}}{L^*}, & \tau &= \frac{t}{t^*}, & \underline{\varphi}_m &= \frac{\varphi_m}{\varphi_m^*}, & \underline{\Psi} &= \frac{\Psi}{\Psi^*}, & \underline{\varphi}_{e\mu} &= \frac{\varphi_{e\mu}}{\varphi_{e\mu}^*}, \\ \underline{\mathbf{A}} &= \frac{\mathbf{A}}{A^*}, & \underline{\mu}'_\mu &= \frac{\tilde{\mu}'_\pi}{\mu_\pi^*}, & \underline{\Phi}' &= \frac{\Phi}{\Phi^*}, & \underline{\Psi} &= \frac{\Psi}{\Psi^*}. \end{aligned}$$

Тут  $\mathbf{r}$  – радіус-вектор довільної точки тіла;  $L^*$ ,  $t^*$ ,  $\varphi_m^*$ ,  $\Psi^*$ ,  $\varphi_{e\mu}^*$ ,  $A^*$ ,  $\mu_\pi^*$ ,  $\Phi^*$ ,  $\Psi^*$  – відповідні характерні значення розглядуваних величин. Для таким чином введених безрозмірних величин оператор Лапласа та похідна за часом набувають вигляду

$$\underline{\Delta} = (L^*)^2 \Delta, \quad \frac{\partial}{\partial \tau} = t^* \frac{\partial}{\partial t}.$$

Тоді систему рівнянь (6), (7), (12), (18), (19) запишемо так:

$$\underline{\Delta} \varphi_m - \left( \frac{v_*}{c_1} \right)^2 \frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial \tau^2} - \underline{\Phi} = -\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{S}} \underline{\mu}'_\pi, \quad (20)$$

$$\underline{\Delta} \Psi - \left( \frac{v_*}{c_2} \right)^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \tau^2} - \underline{\Psi} = 0, \quad (21)$$

$$\underline{\Delta}\underline{\mu}'_{\pi} - \xi^2 \underline{\mu}'_{\pi} = -\xi^2 \underline{\mathfrak{S}} \underline{\Delta}\underline{\varphi}_m, \quad (22)$$

$$\underline{\Delta}\underline{\mathbf{A}} - \mu_0 \varepsilon v_*^2 \frac{\partial^2 \underline{\mathbf{A}}}{\partial \tau^2} = 0, \quad (23)$$

$$\underline{\Delta}\underline{\varphi}_{e\mu} - \mu_0 \varepsilon v_*^2 \frac{\partial^2 \underline{\varphi}_{e\mu}}{\partial \tau^2} = 0. \quad (24)$$

Тут

$$\mathfrak{M} = \left( a_1^\sigma + 2a_2^\sigma - \frac{a_{ep}^2}{\rho_0 a_p^\mu} \right)^{-1} \frac{a_{ep}^2}{\rho_0 a_p^\mu}, \quad \mathfrak{S} = \frac{a_{ep} \varphi_m^*}{\rho_0 L^{*2} \mu_\pi^*},$$

$$\xi = L^* \xi_0, \quad \xi_0 = \lambda \left( 1 + \frac{\rho_0 a_{E\mu}^2}{\varepsilon a_\mu^\pi} \right)^{-1/2},$$

$$c_1 = \sqrt{\left( a_1^\sigma + 2a_2^\sigma - \frac{a_{ep}^2}{\rho_0 a_p^\mu} \right) \frac{1}{\rho_0}} \quad - \text{швидкість поширення поздовжньої хвилі},$$

$$c_2 = \sqrt{a_2^\sigma \frac{1}{\rho_0}} \quad - \text{швидкість поширення поперечної хвилі}, \quad v_* = \frac{L^*}{t^*} \quad - \text{характер-$$

на швидкість, а характерні значення  $\Phi^*$ ,  $\Psi^*$  вибрано так:  $\Phi^* = \varphi_m^* \frac{c_1^2}{L^{*2}}$ ,

$$\Psi^* = \psi^* \frac{a_2^\sigma}{\rho_0 L^{*2}}.$$

Подіємо на рівняння (20) оператором  $\mathbf{L}_2 \equiv \underline{\Delta} - \xi^2$ , а на рівняння (22) – оператором  $\mathbf{L}_1 \equiv \underline{\Delta} - v_*^2 \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}$ . У підсумку отримаємо

$$\mathbf{L}_1 \mathbf{L}_2 \underline{\varphi}_m - \varepsilon_\mu \underline{\Delta} \underline{\varphi}_m = -\mathbf{L}_2 \underline{\Phi},$$

$$\mathbf{L}_1 \mathbf{L}_2 \underline{\mu}'_{\pi} - \varepsilon_\mu \underline{\Delta} \underline{\mu}'_{\pi} = 0,$$

де  $\varepsilon_\mu = \mathfrak{M} \xi^2$  – параметр взаємозв'язку процесів локального зміщення маси та деформування. Зауважимо, що у термопружності аналогічним чином введено параметр взаємозв'язку теплових і деформаційних процесів (див., наприклад, [6]).

Надалі для зручності будемо опускати підкреслення, яким відмічено відповідні безрозмірні величини. На повернення до розмірних величин кожного разу буде вказано.

**5. Плоска хвиля у безмежному середовищі.** Нехай у середовищі, віднесеному до декартової системи координат  $Oxyz$ , уздовж осі  $Ox$  поширюється плоска гармонічна хвиля частоти  $\omega$ . Приймаємо, що масові сили відсутні ( $\Phi = 0$ ,  $\Psi = 0$ ). За такої зовнішньої дії рівняння (20)–(24) набувають вигляду

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} - \left( \frac{v_*}{c_2} \right)^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \tau^2} = 0, \quad (25)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial X^2} - \left( \frac{v_*}{c_1} \right)^2 \frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial \tau^2} = -\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{S}} \mu'_\pi, \quad (26)$$

$$\frac{\partial^2 \mu'_\pi}{\partial X^2} - \xi^2 \mu'_\pi = -\xi^2 \mathfrak{S} \frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial X^2}, \quad (27)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial X^2} - \mu_0 \varepsilon v_*^2 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial \tau^2} = 0, \quad (28)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_{e\mu}}{\partial X^2} - \mu_0 \varepsilon v_*^2 \frac{\partial^2 \varphi_{e\mu}}{\partial \tau^2} = 0. \quad (29)$$

Тут  $X = x/L^*$ . Подамо шукані функції  $f(X, \tau) = \{\varphi_m(X, \tau), \Psi(X, \tau), \mu'_\pi(X, \tau), \mathbf{A}(X, \tau), \varphi_{e\mu}(X, \tau)\}$  у вигляді плоских хвиль  $f(X, \tau) \sim e^{-i\alpha X + i\bar{\omega}\tau}$ , де  $\bar{\omega} = \omega t^*$ ,  $\alpha = kL^*$ ,  $k$  – хвильове число. Тоді з системи (25)–(29) одержимо такі дисперсійні рівняння:

$$\begin{aligned} \alpha^2 - \left(\frac{v_* \bar{\omega}}{c_2}\right)^2 &= 0, \\ \alpha^4 + \alpha^2 \left[ \xi^2 (1 + \mathfrak{M}) - \left(\frac{v_* \bar{\omega}}{c_1}\right)^2 \right] - \left(\xi \frac{v_* \bar{\omega}}{c_1}\right)^2 &= 0, \\ \alpha^2 - \mu_0 \varepsilon v_*^2 \bar{\omega}^2 &= 0. \end{aligned} \quad (30)$$

Якщо у другому рівнянні системи (30) величини  $\xi^2$  і  $\mathfrak{M}$  замінити відповідно на  $\frac{\varepsilon}{\alpha \varepsilon_0}$  і  $k^2$ , то воно співпадає з дисперсійним рівнянням для поздовжньої квазіпружної хвилі, отриманим у праці [24] з використанням градієнтної теорії п'єзоелектриків. (Символами  $\varepsilon$  і  $\varepsilon_0$  в [24] позначено абсолютну діелектричну проникність у тілі та вакуумі, а  $\alpha$  і  $k^2$  – параметри, які характеризують взаємозв'язок деформаційних та електромагнітних процесів у тілі.)

Розв'язками системи рівнянь (30) для хвиль, що поширюються у додатному напрямку осі  $OX$ , є

$$\alpha_1 = \frac{v_* \bar{\omega}}{c_2}, \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \alpha_{2,3} = \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \xi^2 (1 + \mathfrak{M}) - \left(\frac{\bar{\omega} v_*}{c_1}\right)^2 \right] \pm \right. \\ \left. \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left[ \xi^2 (1 + \mathfrak{M}) - \left(\frac{\bar{\omega} v_*}{c_1}\right)^2 \right]^2 + 4 \xi^2 \left(\frac{\bar{\omega} v_*}{c_1}\right)^2} \right\}^{1/2}, \end{aligned} \quad (32)$$

$$\alpha_4 = \sqrt{\varepsilon \mu_0} v_* \bar{\omega}. \quad (33)$$

Корінь (31) відповідає поперечній механічній хвилі ( $k_1 = \omega/c_2$ ), а (33) – електромагнітній ( $k_4 = \sqrt{\varepsilon \mu_0} \omega$ ).

Зі співвідношень (32) для розмірних хвильових чисел  $k_j = \alpha_j/L^*$ ,  $j = 2, 3$ , отримаємо

$$k_{2,3} = \left\{ -\frac{1}{2} \xi_0^2 (1 - \Omega^2 + \mathfrak{M}) \pm \frac{1}{2} \xi_0^2 (1 + \Omega^2) \sqrt{1 + \mathfrak{M} \frac{2(1 - \Omega^2) + \mathfrak{M}}{(1 + \Omega^2)^2}} \right\}^{1/2}, \quad (34)$$

тут  $\Omega = \omega/(c_1 \xi_0)$ . Якщо у формулах (34) використати малість параметра  $\mathfrak{M}$  і обмежитися лише складовими, лінійними стосовно  $\mathfrak{M}$ , то вирази для хвильових чисел  $k_2$  і  $k_3$  значно спрощуються:

$$k_2 = \frac{\omega}{c_1} \sqrt{1 - \frac{\mathcal{M}\xi_0^2}{\xi_0^2 + \omega^2/c_1^2}} = \frac{\omega}{v_1}, \quad k_3 = -i\xi_0 \sqrt{1 + \frac{\mathcal{M}\xi_0^2}{\xi_0^2 + \omega^2/c_1^2}} = -ik_{30},$$

де

$$v_1 = \frac{c_1}{\sqrt{1 - \frac{\mathcal{M}\xi_0^2}{\xi_0^2 + \omega^2/c_1^2}}}, \quad k_{30} = \xi_0 \sqrt{1 + \frac{\mathcal{M}\xi_0^2}{\xi_0^2 + \omega^2/c_1^2}},$$

$k_{30}$  – дійсна величина,  $v_1$  – фазова швидкість поширення хвилі, яку можна назвати модифікованою пружною поздовжньою хвилею. Зауважимо, що швидкість поширення такої хвилі залежить від частоти, тобто середовище для неї є дисперсійним. Оскільки за прийнятого тут модельного опису всі процеси є оборотними, то модифікована пружна поздовжня хвиля є негаасаючою. Зазначимо, що дисперсія модифікованої пружної хвилі зумовлена врахуванням локального зміщення маси та його взаємозв'язком з механічними процесами. Вона відсутня, коли коефіцієнт  $\mathcal{M}$  взаємозв'язку цих процесів дорівнює нулеві.

На рис. 1 наведено залежність швидкості  $v_1/c_1$  поширення модифікованої пружної поздовжньої хвилі від частоти  $\Omega = \omega/(c_1\xi_0)$ . Криві 1–3 відповідають значенням параметра  $\mathcal{M} = 0.01, 0.05, 0.1$ . Бачимо, що для низьких частот величина  $v_1/c_1$  практично не залежить від  $\omega$ , а для високих – швидкість модифікованої пружної хвилі зі збільшенням частоти зменшується і для прийнятих тут характеристик матеріалу це зменшення може досягати 6%. Аналогічну частотну залежність має параметр  $k_{30}$ .

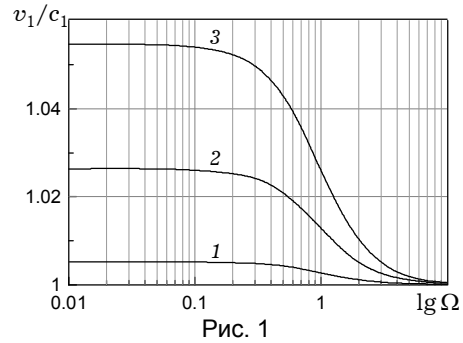


Рис. 1

Згідно з розв'язками (34) дисперсійного рівняння (30)<sub>2</sub> функції  $g(X, \tau) = \{\varphi_m(X, \tau), \mu'_\pi(X, \tau)\}$  можна подати як суму

$$g(X, \tau) = (g_2 e^{-ix_2 X} + g_3 e^{-ix_3 X}) e^{i\omega\tau}$$

або в розмірній формі

$$g(x, t) = \left( g_2 e^{-i\frac{\omega}{v_1}x} + g_3 e^{-k_{30}x} \right) e^{i\omega t}. \quad (35)$$

Другий доданок у рівнянні (35) описує власне не хвилю, а коливання швидко загасаючого зі зростанням  $x$  просторового збурення в околі початку системи координат. Очевидно, що таке збурення практично буде відсутнє в безмежному середовищі. Для скінченних тіл такі збурення характерні для приповерхневих областей.

**6. Висновки.** Показано, що запропонована раніше модель електромагнітомеханіки поляризованих тіл, яка враховує локальне зміщення маси, дозволяє описати взаємозв'язок механічних та електромагнітних полів в ізотропних тілах. Цей взаємозв'язок властивий процесам стиску-розтягу, електромагнітним та зміщення маси, тоді як деформації зсуву в безмежному тілі не є пов'язані з ними. Показано, що модель описує дисперсію модифікованої пружної поздовжньої хвилі в області високих частот, що узгоджується з результатами, отриманими з використанням співвідношень градієнтної теорії п'єзоелектриків.

1. Бредов М. М., Румянцев В. В., Топтыгин И. Н. Классическая электродинамика. – Москва: Наука, 1985. – 400 с.
2. Бурак Я. И. Уравнения электроупругости изотропного диэлектрика в электростатическом поле // Физ.-хим. механика материалов. – 1966. – 2, № 1. – С. 51–57.
3. Бурак Я. Й., Кондрат В. Ф., Грицина О. Р. Приповерхневі механоелектромагнетні явища у термопружних поляризованих тілах за локального зміщення маси // Физ.-хим. механіка матеріалів. – 2007. – № 4. – С. 5–17.
4. Грицина О. Р., Кондрат В. Ф. Моделювання електротермомеханічних процесів у в'язкій електропровідній поляризованій рідині з урахуванням необоротності локальних зміщень маси та електричного заряду // Физ.-мат. моделювання та інформ. технології. – 2007. – Вип. 5. – С. 42–54.
5. Грицина О., Кондрат В. Термомеханічні процеси у в'язкій рідині з урахуванням локального зміщення маси // Физ.-мат. моделювання та інформ. технології. – 2006. – Вип. 4. – С. 39–46.
6. Коваленко А. Д. Термоупругость. – Киев: Вища школа, 1975. – 216 с.
7. Кондрат В. Ф., Грицина О. Р. До опису аномалії Міда у тонких діелектричних плівках // Доп. НАН України. – 2009. – № 3. – С. 84–89.
8. Кондрат В., Грицина О. Рівняння електромагнітоермомеханіки поляризованих неферромагнітних тіл за врахування локального зміщення маси // Физ.-мат. моделювання та інформ. технології. – 2008. – Вип. 8. – С. 69–83.
9. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. – Москва: Наука, 1982. – 620 с.
10. Можен Ж. Механика электромагнитных сплошных сред. – Москва: Мир, 1991. – 560 с.
11. Новацкий В. Электромагнитные эффекты в твердых телах. – Москва: Мир, 1984. – 159 с.
12. Партон В. З., Кудрявцев Б. А. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. – Москва: Наука, 1988. – 472 с.
13. Шульга М. О., Карлаш В. Л. Резонансні електромеханічні коливання п'єзоелектричних пластин. – Київ: Наук. думка, 2008. – 272 с.
14. Burak Ya., Kondrat V., Hrytsyna O. An introduction of the local displacements of mass and electric charge phenomena into the model of the mechanics of polarized electromagnetic solids // J. Mech. Materials and Struct. – 2008. – 3, No. 6. – P. 1037–1046.
15. Mead C. A. Anomalous capacitance of thin dielectric structures // Phys. Rev. Lett. – 1961. – 6, No. 10. – P. 545–546.
16. Mead C. A. Electron transport mechanisms in thin insulating films // Phys. Rev. – 1962. – 128. – P. 2088–2093.
17. Mindlin R. D. Continuum and lattice theories of influence of electromechanical coupling on capacitance of thin dielectrics films // Int. J. Solids and Struct. – 1969. – 5. – P. 1197–1208.
18. Mindlin R. D. Elasticity, piezoelectricity and crystal lattice dynamics // J. Elasticity. – 1972. – 2, No. 4. – P. 217–282.
19. Mindlin R. D. Electromechanical vibrations of centrosymmetric cubic crystal plates // Q. J. Mech. Appl. Math. – 1971. – 35, No. 4. – P. 404–408.
20. Mindlin R. D. Polarization gradient in elastic dielectrics // Int. J. Solids and Structures. – 1968. – 4. – P. 637–642.
21. Voigt W. Lehrbuch der Kristallphysik. – Leipzig: B. G. Teubner, 1910. – 832 S.
22. Wang J., Yang J. S. Higher-Order theories of piezoelectric plates and applications // Appl. Mech. Rev. – 2000. – 53. – P. 87–99.
23. Yang J. A review of a few topics in piezoelectricity // Appl. Mech. Rev. – 2006. – 59. – P. 335–345.
24. Yang X. M., Hu Y. T., Yang J. S. Electric field gradient effects in anti-plane problems of polarized ceramics // Int. J. Solids and Struct. – 2004. – 41, No. 24–25. – P. 6801–6811.



### МЕХАНОЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ В ИЗОТРОПНЫХ ДИЭЛЕКТРИКАХ С УЧЕТОМ ЛОКАЛЬНОГО СМЕЩЕНИЯ МАССЫ

На основе предложенной ранее модели электромагнитомеханики поляризуемых тел, учитывающей процесс локального смещения массы, ключевые уравнения записаны относительно соответствующих скалярных и векторных потенциалов. Предложено обобщение калибровки Лоренца, при котором уравнения для определения скалярного и векторного потенциалов электромагнитного поля становятся несвязанными. Записана разрешающая система уравнений относительно потенциалов в безразмерной форме и получен параметр взаимосвязи процессов локального смещения массы и деформирования. С использованием этой системы исследован процесс распространения плоской гармонической волны в безграничной изотропной среде. Показано, что модель описывает дисперсию модифицированной упругой волны в области высоких частот. Полученные результаты согласуются с известными в литературе, базирующимися на градиентной теории пьезоэлектриков.

### MECHANOELECTROMAGNETIC INTERACTION IN ISOTROPIC DIELECTRICS TAKING INTO ACCOUNT A LOCAL MASS DISPLACEMENT

*On the base of earlier proposed model of electromagnetomechanics of polarizable bodies considering the process of local mass displacement the key set of model equations is written with respect to corresponding scalar and vector potentials of displacement vector and vectors of electromagnetic field. Generalization of Lorentz calibration is proposed. With such generalized calibration the equations for determining scalar and vector potentials of the electromagnetic field become incoherent. The key set of equations is written relatively to the potentials in dimensionless form and the coupling factor of processes of local mass displacement and deformation is obtained. Using the obtained relations the process of plane harmonic wave propagation in infinity isotropic medium is investigated. It is shown that the model describes dispersion of the modified elastic short wave. The obtained results are in agreement with that known in literature, based on the gradient theories of piezoelectrics.*

Центр мат. моделювання  
Ін-ту прикл. проблем механіки і математики  
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано  
24.02.09