

### КОНТАКТНА ВЗАЄМОДІЯ ПРОРІЗНОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ ТА ДЕФОРМІВНОГО ЗАПОВНЮВАЧА З УРАХУВАННЯМ СУХОГО ТЕРТЯ

Сформульовано постановку змішаної задачі фрикційної взаємодії деформівного заповнювача з прорізною циліндричною оболонкою. З використанням одновимірних моделей оболонки та заповнювача отримано інтегральне рівняння для знаходження контактних напружень. На основі чисельного розв'язку досліджено вплив геометричних розмірів, кількості розрізів в оболонці та фізичних властивостей взаємодіючих тіл на жорсткість і міцність системи.

Тонкостінна циліндрична оболонка і контактуючий з її внутрішньою поверхнею товстостінний масив, який виготовлений з іншого матеріалу, є конструкційним елементом багатьох машин і механізмів [1, 5, 9, 10]. При моделюванні таких систем в умовах немонотонного навантаження виникають конструктивно нелінійні неконсервативні змішані контактні задачі про фрикційну взаємодію оболонок з деформівним заповнювачем. У роботах [5, 10] розглянуто питання стійкості оболонок обертання різноманітних геометричних форм з пружним заповнювачем під дією комбінованого навантаження. У праці [9] проведено дослідження параметрів оболонкової системи з пористим заповнювачем.

Метою цієї роботи є побудова математичної моделі фрикційного контакту прорізної циліндричної оболонки з деформівним заповнювачем. У повідомленнях [2, 8] реалізовано модель прорізної оболонки з затисненням на торцях. Запропонований підхід до задачі дозволив розробити методичку інженерного розрахунку прорізних оболонкових елементів і проаналізувати основні їх властивості [2]. З метою розширення діапазону застосовності розробленої методички розрахунку прорізних оболонкових пружних елементів і більш адекватного опису їх роботи у цій статті сформульовано та розв'язано змішану контактну задачу, яка враховує особливості «нежорсткого» закріплення панелей.

Розглянемо пружний циліндр радіуса  $R$  та довжини  $2\ell$ , який заповнює циліндричну оболонку товщини  $h$ . У межах заповнювача оболонка має меридіанні розрізи. На торці пружного заповнювача через абсолютно жорсткі гладкі поршні передається зовнішнє навантаження  $F$ . Характер контактної взаємодії заповнювача та прорізної оболонки визначається законом сухого тертя. Напружено-деформований стан контактної системи досліджуємо в циліндричній системі координат  $O r \theta z$  (рис. 1).

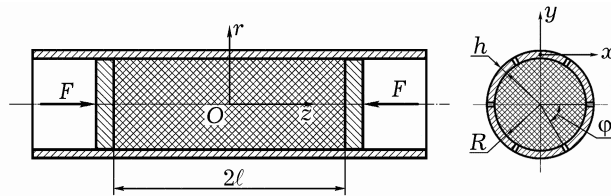


Рис. 1

Приймаємо, що число розрізів оболонки є великим і заповнювач перебуває в умовах осесиметричної деформації. Для його моделювання використовуємо співвідношення, запропоновані в [6, 7]:

$$\begin{aligned} \sigma_r = \sigma_\theta = \sigma, \quad \tau_{r\zeta} = \frac{\tau r}{R}, \quad u_\zeta = u, \quad u_r = \frac{wr}{R}, \\ \varepsilon_r = \varepsilon_\theta = \frac{w}{R} = \frac{1}{E} [(1-\nu)\sigma - \nu\sigma_\zeta], \\ \varepsilon_\zeta = \frac{1}{\ell} \frac{du}{d\zeta} = \frac{1}{E} [\sigma_\zeta - 2\nu\sigma], \quad \frac{d\sigma_\zeta}{d\zeta} + \frac{2\ell\tau}{R} = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

де  $\sigma_r, \sigma_\zeta, \sigma_\theta, \tau_{r\zeta}$  – нормальні та дотичне напруження;  $\sigma, \tau$  – нормальне і дотичне контактні напруження;  $u_\zeta, u_r$  – осьове та радіальне переміщення;  $w$  – радіальне переміщення на поверхні контакту  $r = R$ ;  $u$  – осьове переміщення перерізів заповнювача;  $\varepsilon_r, \varepsilon_\theta, \varepsilon_z, \varepsilon_{rz}$  – деформації;  $\zeta = z/\ell$  – безрозмірна осьова координата;  $E, \nu$  – модуль Юнга і коефіцієнт Пуассона матеріалу заповнювача.

Фрикційну взаємодію прорізної оболонки і заповнювача при монотонному зовнішньому навантаженні системи моделюємо співвідношеннями одностороннього нормального контакту з урахуванням зони відлипання [2]:

$$[w] = w_0 - w = 0, \quad \sigma(\zeta) < 0, \quad \zeta \in T', \quad T' = [-1, a] \cup [a, 1], \quad (2)$$

$$[w] > 0, \quad \sigma(\zeta) = 0, \quad \zeta \in T'', \quad T'' = (-a, a), \quad (3)$$

де  $w_0$  – прогин панелі;  $[w]$  – стрибок радіальних переміщень на контактній поверхні;  $T', T''$  – області проковзування та відлипання відповідно;  $a$  – невідома безрозмірна координата точок їх розмежування.

Закон тертя Кулона описує контактну взаємодію панелей та заповнювача в зоні проковзування

$$\tau(\zeta) = f\sigma(\zeta) \operatorname{sgn} \zeta, \quad \zeta \in T', \quad (4)$$

де  $f$  – коефіцієнт сухого тертя.

На торцях заповнювача виконуються умови

$$\sigma_\zeta(\pm 1) = -p \equiv -\frac{F}{\pi R^2}. \quad (5)$$

Зі співвідношення (1) з урахуванням умови (5) знаходимо інтегральний вираз для радіальних переміщень заповнювача на поверхні контакту:

$$w(\zeta) = \frac{R}{E} \left\{ (1 - \nu)\sigma(\zeta) - \nu \left[ -p + \frac{\ell}{R} \int_{T'} \tau(\xi) \operatorname{sgn}(\xi - \zeta) d\xi \right] \right\}. \quad (6)$$

Тонкостінну оболонку розглядатимемо як систему, що складається з трьох з'єднаних між собою частин: прорізної (розташованої в центральній частині конструкції) і двох коротких циліндричних суцільних оболонок, розміщених на краях. Приймаємо, що центральна частина оболонки, яка має розрізи, складається з панелей, що зазнають плоского згину в радіальних площинах. Запишемо рівняння, що визначає прогин панелі, розглядаючи її як стержень з дугоподібною формою поперечного перерізу:

$$\frac{E_0 I_x}{\ell^4} \frac{d^4 w_0}{d\zeta^4} = -\sigma(\zeta)b, \quad \zeta \in [-1, 1], \quad (7)$$

де  $b = 2R \sin(\varphi/2)$  – ширина панелі;  $E_0 I_x = E_0 h R^3 (\varphi + \sin \varphi - 8 \sin^2(\varphi/2) / \varphi) / 2$  – жорсткість панелі на згин;  $\varphi = 2\pi/N$ ,  $N$  – число розрізів;  $E_0$  – модуль Юнга матеріалу оболонки.

У місцях з'єднання прорізної та суцільних оболонок виконуються умови рівності радіальних та кутових переміщень

$$w_0(\mp 1) = w_i, \quad \theta_0(\mp 1) = \theta_i, \quad i = 1, 2, \quad (8)$$

де  $\theta_0$  – кут повороту перерізу панелі;  $w_i, \theta_i$  – відповідно радіальні переміщення та кути повороту торцевих перерізів правої ( $i = 1$ ) та лівої ( $i = 2$ ) суцільних оболонок.

Розглянемо напружено-деформований стан однієї із двох суцільних оболонок, наприклад правої. Циліндрична оболонка довжини  $L$  з постійною товщиною стінки  $h$  радіально навантажена розподіленими по торцевому перерізу погонним зусиллям  $q$  і моментами  $m$ , які визначаються співвід-

ношеннями

$$m = \frac{M_0}{R\varphi}, \quad q = \frac{Q_0}{R\varphi}, \quad (9)$$

де  $M_0, Q_0$  – згинальний момент та поперечна сила, які діють на краях панелей.

Розрахунок проводимо за моментною теорією оболонки, згідно з якою радіальні переміщення серединної поверхні визначаються з диференціального рівняння [3]

$$\frac{d^4 w_1(x)}{dx^4} + 4k^4 w_1(x) = 0, \quad x \in [0, L], \quad (10)$$

де  $k^4 = \frac{E_0 h}{4R^2 D} = \frac{3(1-\nu_1^2)}{R^2 h^2}$ ,  $D = \frac{E_0 h^3}{12(1-\nu_1^2)}$  – параметр та циліндрична жорсткість оболонки,  $\nu_1$  – коефіцієнт Пуассона матеріалу оболонки.

У роботі розглядаємо оболонки, для яких виконуються співвідношення  $\sqrt{k} \ell < 3$ , тому при знаходженні розв'язку рівняння (10) необхідно врахувати умови закріплення на обох краях оболонки. У розглядуваному випадку один торець циліндричної оболонки вільний від навантаження, на іншому виконуються співвідношення

$$m_z|_{x=0} = D \frac{d^2 w_1(x)}{dx^2} \Big|_{x=0} = m, \quad q_z|_{x=0} = -D \frac{d^3 w_1(x)}{dx^3} \Big|_{x=0} = q, \quad (11)$$

де  $m_z, q_z$  – згинальний момент та перерізувальне зусилля в перерізах оболонки.

Розв'язок рівняння (10) з урахуванням (11) подамо у вигляді

$$w_1(x) = w_1(0)K_0(kx) + \frac{1}{k} K_1(kx) \frac{dw_1(x)}{dx} \Big|_{x=0} + \frac{1}{k^2} K_2(kx) \frac{d^2 w_1(x)}{dx^2} \Big|_{x=0} + \frac{1}{k^3} K_3(kx) \frac{d^3 w_1(x)}{dx^3} \Big|_{x=0} + \frac{1}{k^3 D} \int_0^x K_3[k(x-x_1)] q dx_1, \quad (12)$$

де  $K_0(kx), K_1(kx), K_2(kx), K_3(kx)$  – функції Крилова [3].

Радіальні переміщення та кут повороту торцевого перерізу оболонки ( $x = 0$ ) визначаються співвідношеннями

$$w_1(x)|_{x=0} = \frac{1}{k^2 D} \left[ \frac{K_0 K_2 + 4K_3^2}{4(K_2^2 - K_1 K_3)} m + \frac{K_1 K_2 - K_0 K_3}{4(K_2^2 - K_1 K_3)} \frac{q}{k} \right],$$

$$\frac{dw_1(x)}{dx} \Big|_{x=0} = \frac{1}{k D} \left[ -\frac{K_0 K_1 + 4K_2 K_3}{4(K_2^2 - K_1 K_3)} m - \frac{K_1^2 - K_0 K_2}{4(K_2^2 - K_1 K_3)} \frac{q}{k} \right], \quad (13)$$

де через  $K_0, K_1, K_2, K_3$  позначено функції Крилова при  $x = L$ .

Розглянемо напружено-деформований стан панелі прорізної оболонки. Згинальний момент та поперечна сила, що діють в поперечних перерізах зв'язані диференціальними залежностями з прогином панелі

$$M_0(\zeta) = -\frac{E_0 I_x}{\ell^2} \frac{d^2 w_0}{d\zeta^2}, \quad Q_0(\zeta) = -\frac{E_0 I_x}{\ell^3} \frac{d^3 w_0}{d\zeta^3}. \quad (14)$$

Отже, співвідношення (9) з урахуванням (14) набувають вигляду

$$m = -\frac{E_0 I_x}{\ell^2 R \varphi} \frac{d^2 w_0}{d\zeta^2} \Big|_{\zeta=1}, \quad q = -\frac{E_0 I_x}{\ell^3 R \varphi} \frac{d^3 w_0}{d\zeta^3} \Big|_{\zeta=1}. \quad (15)$$

Підставивши (15) в (13) і використовуючи (8), одержимо рівняння, що описують крайові умови для панелей:

$$w_0 = \frac{\sqrt{3(1-v_0^2)}}{\pi} \frac{NI_x}{\ell^2 h^2} \left[ \frac{K_0 K_2 + 4K_3^2}{4(K_2^2 - K_1 K_3)} \frac{d^2 w_0}{d\zeta^2} + \frac{K_1 K_2 - K_0 K_3}{4(K_2^2 - K_1 K_3)} \frac{1}{k\ell} \frac{d^3 w_0}{d\zeta^3} \right],$$

$$\frac{dw_0}{d\zeta} = -\frac{3(1-v_0^2)}{\pi} \frac{NI_x}{k\ell^2 h^3} \left[ \frac{K_0 K_1 + 4K_2 K_3}{2(K_2^2 - K_1 K_3)} \frac{d^2 w_0}{d\zeta^2} + \frac{K_1^2 - K_0 K_2}{4(K_2^2 - K_1 K_3)} \frac{1}{k\ell} \frac{d^3 w_0}{d\zeta^3} \right]. \quad (16)$$

Загальний розв'язок задачі (7), (16) знаходимо у вигляді

$$w_0(\zeta) = c_0 + c_1 \zeta + c_2 \zeta^2 + c_3 \zeta^3 - \frac{\lambda^4}{12} \int_{-1}^1 (\xi - \zeta)^3 \operatorname{sgn}(\xi - \zeta) \sigma(\xi) d\xi, \quad (17)$$

де  $\lambda^4 = \frac{\ell^4 b}{E_0 I_x}$ . Розкривши крайові умови (16), одержимо систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих сталих інтегрування. Підставляючи співвідношення (6) і (17) в умову (2) та враховуючи рівність (4), одержимо інтегральне рівняння відносно невідомого контактного напруження:

$$\sigma(\zeta) + \int_{T'} H(\xi, \zeta) \sigma(\xi) d\xi = -\frac{v}{1-v} p, \quad \zeta \in T', \quad (18)$$

де

$$H(\zeta, \xi) = -\frac{v}{1-v} \ell f \operatorname{sgn} \zeta \operatorname{sgn}(\xi - \zeta) +$$

$$+ 4\mu^4 \left[ c_0 + c_1 \zeta + c_2 \zeta^2 + c_3 \zeta^3 + \frac{1}{12} (\xi - \zeta)^3 \operatorname{sgn}(\xi - \zeta) \right],$$

$$c_0 = -\frac{\xi^2}{8} - \frac{1}{24} + \frac{2\beta_{11} - 1}{4(1 - \beta_{21})} \left[ 3(\beta_{21} + \beta_{22}) \left( -\frac{\xi^3}{24} + \frac{\xi}{8} - \frac{1}{3} \right) + \beta_{21} \xi \right] -$$

$$- \frac{1}{4(1 - \beta_{21})} \left( -\frac{\xi^2}{8} + \frac{1}{8} \right) + 6(\beta_{21} + \beta_{22}) \left( -\frac{\xi^3}{24} + \frac{\xi}{8} - \frac{1}{12} \right) + \frac{1}{2} \beta_{11},$$

$$c_1 = \frac{1}{8} \xi^3 + \frac{1}{8} \xi,$$

$$c_2 = \frac{3(\beta_{21} + \beta_{22}) \left( -\frac{1}{24} \xi^3 + \frac{1}{8} \xi - \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{8} \xi^2 - \frac{1}{8} + \beta_{21} \xi}{4(1 - \beta_{21})},$$

$$c_3 = -\frac{1}{24} \xi^2 + \frac{1}{8} \xi, \quad 4\mu^4 = \frac{1}{1-v} \frac{\ell^4 b}{R I_x} \frac{E}{E_0}.$$

Коефіцієнти  $\beta_{11}$ ,  $\beta_{12}$ ,  $\beta_{21}$ ,  $\beta_{22}$  визначаються за формулами

$$\beta_{11} = \frac{\sqrt{3(1-v_0^2)}}{\pi} \frac{NI_x}{\ell^2 h^2} \frac{K_0 K_2 + 4K_3^2}{4(K_2^2 - K_1 K_3)},$$

$$\beta_{12} = \frac{1}{k} \frac{\sqrt{3(1-v_0^2)}}{\pi} \frac{NI_x}{\ell^3 h^2} \frac{K_1 K_2 - K_0 K_3}{4(K_2^2 - K_1 K_3)},$$

$$\beta_{21} = -\frac{6(1-v_0^2)}{\pi} \frac{NI_x}{k\ell^2 h^3} \frac{K_0 K_1 + 4K_2 K_3}{4(K_2^2 - K_1 K_3)},$$

$$\beta_{22} = -\frac{3(1-v_0^2)}{\pi} \frac{K_1^2 - K_0 K_2}{4(K_2^2 - K_1 K_3)} \frac{NI_x}{k^2 \ell^3 h^3}. \quad (19)$$

Для визначення невідомих координат точок поділу зон проковзування та відлипання використаємо умову (3), яку запишемо у вигляді

$$\sigma(\pm a) = 0. \quad (20)$$

Розв'язок системи рівнянь (18), (20) одержано методом квадратур з використанням формули трапецій з рівномірною сіткою вузлів [4]. При цьому застосовано метод послідовних наближень масиву вузлових значень контактної напруженості і невідомих координат  $\pm a$ , розглянутий в роботі [2]. В результаті отримано таблицю значень контактних напружень

$$\sigma_i = \sigma(\zeta_i), \quad i = 1, \dots, n,$$

де  $\zeta_j = -1 + (j-1)g$ ;  $g = 2/(n-1)$  – сталий крок інтегрування;  $n$  – кількість вузлів у методі квадратур. Знаючи контактні напруження, можна знайти всі необхідні характеристики оболонкової системи.

Числові розрахунки виконано для оболонкових систем з параметрами  $h/R = 0.1$ ,  $E/E_0 = 0.0001$ ,  $\nu = 0.499$ ,  $\nu_0 = 0.3$ ,  $f = 0.3$  при різних значеннях довжини розрізів  $\ell/R$  і різних значеннях їх кількості  $N$ .

На рис. 2 зображено розподіл уздовж осі  $z$  контактної напруженості  $q = -\sigma/p$  для оболонкової системи з кількістю розрізів  $N = 6$  при  $L/R = 0.4$  і  $\ell/R = 3, 4$ .

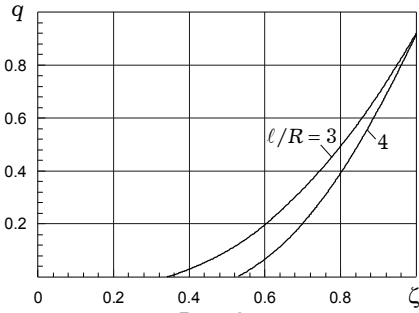


Рис. 2

На рис. 3 наведено залежність безрозмірного осевого переміщення поршнів  $\tilde{\delta} = \delta E/(pR)$  від довжини  $L/R$  суцільної частини оболонки. Суцільними лініями позначено результати при кількості розрізів оболонки  $N = 6$ , штриховими –  $N = 8$ . При збільшенні довжини суцільної частини оболонки, податливість системи зменшується.

На рис. 4 показано графік зміни відносного осевого напруження  $\tilde{\sigma}_\zeta = \sigma_\zeta/p$  від довжини  $L/R$  у перерізі, що з'єднує суцільну та прорізну частину оболонки. Позначення кривих аналогічні до попередніх. Необхідно відмітити, що зі збільшенням довжини суцільної частини оболонки досліджувані характеристики набувають асимптотичного характеру.

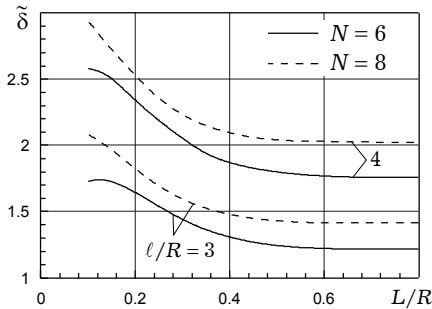


Рис. 3

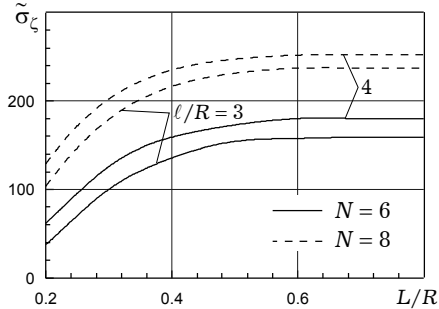


Рис. 4

Встановлено, що збільшення довжини суцільної частини оболонки призводить до підвищення контактної напруженості заповнювача на оболонку та зменшення лінійних і кутових переміщень в місцях спряження прорізної та суцільної оболонок, зниження несучої здатності контактної системи.

1. А. С. 637572 (СССР), МКИ F 16 F 1/40. Упругий элемент / В. М. Шопа, С. В. Величкович. – Опубл.15.12.78, Бюл. № 46.
2. Бедзір О. О., Шацький І. П., Шопа В. М. Методика розв'язування змішаних задач про фрикційний контакт заповнювача з прорізним оболонковим елементом // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2004. – 47, № 1. – С. 111–114.
3. Биргер И. А., Шор Б. Ф., Иосилевич Г. Б. Расчет на прочность деталей машин. – Москва: Машиностроение, 1979. – 702 с.
4. Верлань А. Ф., Сизиков В. С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. Справочное пособие. – Киев: Наук. думка, 1986. – 544 с.
5. Ильгамов М. А., Иванов В. А., Гулин Б. В. Расчет оболочек с упругим заполнителем. – Москва: Наука, 1987. – 261 с.
6. Попадюк І. Й., Шацький І. П., Шопа В. М. Механіка фрикційного контакту оболонок з деформівним заповнювачем. – Івано-Франківськ: Факел, 2003. – 180 с.
7. Шопа В. М., Шацький І. П., Попадюк І. Й. Фрикционное взаимодействие цилиндрической оболочки с упругим заполнителем // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1989. – № 3. – С. 48–50.
8. Шопа В. М., Шацький І. П., Бедзір О. О. Фрикційна взаємодія прорізної циліндричної оболонки з пружним заповнювачем // Доп. АН України. – 1993. – № 8. – С. 70–73.
9. Dawson M. A., Gibson L. J. Optimization of cylindrical shells with compliant cores // Int. J. of Solids and Struct. – 2007. – 44, No. 3-4. – P. 1145–1160.
10. Ghorbanpour A., Golabi S., Loghman A., Daneshi H. Investigating elastic stability of cylindrical shell with an elastic core under axial compression by energy method // J. Mech. Sci. and Technol. – 2007. – 21, No. 7. – P. 983–996.

#### **КОНТАКТНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ПРОРЕЗНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ И ДЕФОРМИРУЕМОГО ЗАПОЛНИТЕЛЯ С УЧЕТОМ СУХОГО ТРЕНИЯ**

*Сформулирована постановка смешанной задачи фрикционного взаимодействия деформируемого заполнителя с прорезной цилиндрической оболочкой. С использованием одномерных моделей оболочки и заполнителя получено интегральное уравнение для нахождения контактных напряжений. На основе численного решения исследовано влияние геометрических размеров, количества разрезов в оболочке и физических свойств взаимодействующих тел на жесткость и прочность системы.*

#### **CONTACT INTERACTION OF A SLOTTED CYLINDRICAL SHELL WITH A DEFORMABLE FILLER ALLOWING FOR DRY FRICTION**

*The statement of the mixed problem on frictional interaction in the system which consists of cylindrical slit shells, divided by a deformable filler, is realized. Using one-dimensional shell and filler models, the integral equation for finding the contact is constructed. On the basis of numerical solutions the effect of mechanical, geometric and tribologic parameters of contacting pairs on nature of distribution of contact pressure, rigidity and strength of the system is investigated.*

Ін-т прикл. проблем механіки і математики  
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано  
03.11.07