

### ДИНАМІЧНА ВЗАЄМОДІЯ ПРУЖНОГО СЕРЕДОВИЩА З ТОНКОСТІННИМ КРИВОЛІНІЙНИМ П'ЕЗОЕЛЕКТРИЧНИМ ВКЛЮЧЕННЯМ ПРИ ПОЗДОВЖНІХ КОЛИВАННЯХ КОМПОЗИТА

*З використанням методу зрощування асимптотичних розкладів отримано моделі динамічної взаємодії тонкостінного криволінійного п'єзоелектричного включення змінної товщини з пружною ізотропною матрицею при усталених коливаннях композита. Пружна система перебуває в умовах поздовжнього зсуву. Розглянуто різні випадки електричних граничних умов на поверхні неоднорідності. Запропоновано алгоритм побудови примезовошарових поправок для уточнення поведінки зміщень і напружень в околі краю включення при різних його формах.*

Взаємодія тонкостінних пружних включень з оточуючим середовищем вивчалася у багатьох публікаціях [1, 6–8, 10, 12, 14], зокрема, п'єзоелектричні властивості тонких неоднорідностей враховувались у роботах [2, 13, 16, 17] та працях інших авторів.

У цій роботі за допомогою методів теорії сингулярних збурень отримано асимптотично точні ефективні умови динамічної взаємодії тонкого криволінійного п'єзоелектричного включення змінної товщини з пружною матрицею за умов поздовжнього зсуву та усталених коливань композита. Випадок тонкого прямолінійного п'єзоелектричного включення розглянуто у статті [13].

Нехай у пружному ізотропному середовищі в умовах ідеального механічного контакту розміщене тонке криволінійне п'єзоелектричне включення змінної товщини, що займає область  $W_\varepsilon = \{(\alpha_1, \alpha_2) : \alpha_1 \in W_0, 2|\alpha_2| \leq h(\alpha_1)\}$ . Тут  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$  – ортогональна система координат, яка зв'язана із серединною лінією включення  $W_0 = [\alpha_-, \alpha_+]$  за допомогою рівності  $\mathbf{x} = \mathbf{r}(\alpha_1) + \alpha_2 \mathbf{n}(\alpha_1)$ ;  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$  – декартові координати;  $\mathbf{r}(\alpha_1)$  – радіус-вектор серединної лінії;  $\mathbf{n}(\alpha_1)$  – нормаль до  $W_0$ ;  $h(\alpha_1)$  – товщина неоднорідності. Матеріал включення належить до кристаліграфічного класу  $6mm$ , а вісь симетрії шостого порядку перпендикулярна до площини  $Ox_1x_2$ . Відносна товщина включення мала:  $\varepsilon = a^{-1} \max_{\alpha_1 \in W_0} h(\alpha_1) \ll 1$  ( $a$  – характерний розмір  $W_0$ ). Припускаємо також, що довжини поздовжніх хвиль складових композита набагато більші від товщини включення.

За поздовжнього зсуву при усталених коливаннях зміщення в композиті та електричний потенціал у включенні задовольняють рівняння [3, 5, 17]

$$\Delta u(\mathbf{x}) + k^2 u(\mathbf{x}) = 0, \quad u(\mathbf{x}) = u^s(\mathbf{x}) + u^{\text{in}}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus W_\varepsilon, \quad (1)$$

$$\Delta u^0(\mathbf{x}) + k_0^2 u^0(\mathbf{x}) = 0, \quad \Delta u^0(\mathbf{x}) - \Delta \varphi_p^0(\mathbf{x}) = 0,$$

$$\varphi_p^0(\mathbf{x}) = \frac{\varepsilon_{11}^0}{e_{15}^0} \varphi^0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in W_\varepsilon, \quad (2)$$

$$k_0 = \frac{k c}{c_0}, \quad c = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}, \quad c_0 = \sqrt{c_{44}^0 (1 + \eta^2) \frac{1}{\rho_0}}, \quad \eta = e_{15}^0 \frac{1}{\sqrt{c_{44}^0 \varepsilon_{11}^0}}.$$

Тут  $u(\mathbf{x})$  та  $u^s(\mathbf{x})$  – повне та розсіяне поля зміщень у матриці;  $u^{\text{in}}(\mathbf{x})$  – зміщення, що характеризує задане навантаження;  $u^0(\mathbf{x})$  та  $\varphi^0(\mathbf{x})$  – змі-

щення та електричний потенціал в неоднорідності;  $k, c, \rho$  та  $k_0, c_0, \rho_0$  – хвильові числа, швидкості, густини у матриці та у включенні відповідно;  $c_{44}^0, e_{15}^0$  та  $\varepsilon_{11}^0$  – пружна стала, п'єзоелектрична стала та діелектрична проникність матеріалу неоднорідності;  $\mu$  – модуль зсуву матриці;  $\eta$  – коефіцієнт електромеханічного зв'язку.

Компоненти тензорів напружень  $\sigma_{i3}(\mathbf{x})$  і  $\sigma_{i3}^0(\mathbf{x})$  та вектора електричної індукції  $D_i^0(\mathbf{x})$  визначаються співвідношеннями [3, 5]

$$\begin{aligned}\sigma_{i3}(\mathbf{x}) &= \frac{\mu}{H_i} \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial \alpha_i}, \quad i = 1, 2, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus W_\varepsilon, \\ \sigma_{i3}^0(\mathbf{x}) &= \frac{c_{44}^0}{H_i} \frac{\partial}{\partial \alpha_i} (u^0(\mathbf{x}) + \eta^2 \varphi_P^0(\mathbf{x})), \\ D_i^0(\mathbf{x}) &= \frac{e_{15}^0}{H_i} \frac{\partial}{\partial \alpha_i} (u^0(\mathbf{x}) - \varphi_P^0(\mathbf{x})), \quad i = 1, 2, \quad \mathbf{x} \in W_\varepsilon, \\ H_1 &= A(\alpha_1)(1 + \alpha_2 k^*(\alpha_1)), \quad H_2 = 1, \quad A(\alpha_1) = \left| \frac{\partial \mathbf{r}(\alpha_1)}{\partial \alpha_1} \right|\end{aligned}\quad (3)$$

( $k^*(\alpha_1)$  – кривина серединної лінії  $W_0$ ). Крім цього, виконується умова Зоммерфельда

$$u^s(\mathbf{x}) \approx \frac{i}{4} \sqrt{\frac{2}{\pi k R}} \exp\left(ikR - i\frac{\pi}{4}\right) f(\mathbf{v}^s), \quad \mathbf{v}^s = \frac{\mathbf{x}}{R}, \quad R = |\mathbf{x}| \rightarrow \infty, \quad (4)$$

де  $f(\mathbf{v}^s)$  – комплексна амплітуда розсіяння.

На межі поділу середовищ виконуються умови ідеального механічного контакту

$$u(\mathbf{x}) = u^0(\mathbf{x}), \quad \sigma_{3i}(\mathbf{x})n_i^0 = \sigma_{3i}^0(\mathbf{x})n_i^0, \quad i = 1, 2, \quad \mathbf{x} \in \partial W_\varepsilon, \quad (5)$$

де  $\mathbf{n}^0 = (n_1^0, n_2^0)$  – зовнішня нормаль до  $\partial W_\varepsilon$ .

Розглянемо два випадки граничних електричних умов:

$$\varphi^0(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial W_\varepsilon, \quad (6)$$

$$D_i^0(\mathbf{x})n_i^0 = 0, \quad i = 1, 2, \quad \mathbf{x} \in \partial W_\varepsilon. \quad (7)$$

Для отримання ефективних граничних умов на серединній лінії включення, які асимптотично точно моделюють взаємодію складових композита за умов (6) або (7), використаємо метод зрощування асимптотичних розкладів [4, 6, 8, 14]. Невідомі функції подамо у вигляді асимптотичних розкладів за степенями  $\varepsilon$ :

$$\begin{aligned}u^s(\mathbf{x}) &= \sum_{j=0}^{\infty} u_j^s(\alpha_1, \alpha_2) \varepsilon^j, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus W_\varepsilon, \\ u^0(\mathbf{x}) &= \sum_{j=0}^{\infty} u_j^0(\alpha_1, \bar{\alpha}_2) \varepsilon^j, \quad \varphi_P^0(\mathbf{x}) = \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_{Pj}^0(\alpha_1, \bar{\alpha}_2) \varepsilon^j, \quad \mathbf{x} \in W_\varepsilon, \\ \bar{\alpha}_2 &= \alpha_2/\varepsilon.\end{aligned}\quad (8)$$

Виділимо три різні діапазони [6] зміни величини  $\gamma = c_{44}^0/\mu$ :

$$\mathbf{1}^\circ) \sqrt{\varepsilon} \leq \gamma \leq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}; \quad \mathbf{2}^\circ) 0 \leq \gamma \leq \sqrt{\varepsilon}; \quad \mathbf{3}^\circ) \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \leq \gamma < \infty. \quad (9)$$

Діапазон 1° відповідає неоднорідності слабкої контрастності, а діапазони 2° і 3° описують випадки включень малої і великої жорсткостей відповідно.

Підставляючи розклади (8) у співвідношення (1)–(6) або (1)–(5), (7) та прирівнюючи вирази при однакових степенях  $\varepsilon$ , у кожному з діапазонів (9) з точністю до головних членів отримаємо (значення індексу  $\ell = 1$  або  $\ell = 2$  відповідають граничним умовам (6) або (7))

діапазон 1°:

$$\begin{aligned} [u]_{-}^{+} &\approx \frac{1 - \gamma_{\ell}}{\gamma_{\ell}} h(\alpha_1) \frac{\partial u^{\text{in}}(\mathbf{x})}{\partial \alpha_2}, \\ \left[ \frac{\partial u}{\partial \alpha_2} \right]_{-}^{+} &\approx \frac{1 - \gamma_{\ell}}{A(\alpha_1)} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \frac{h(\alpha_1)}{A(\alpha_1)} \frac{\partial u^{\text{in}}(\mathbf{x})}{\partial \alpha_1} + (k^2 - \gamma_* k_0^2) h(\alpha_1) u^{\text{in}}(\mathbf{x}), \\ &\alpha_1 \in W_0, \quad \alpha_2 = 0, \quad \ell = 1, 2, \\ u^0(\mathbf{x}) &\approx \varphi_P^0(\mathbf{x}) \approx u^{\text{in}}(\alpha_1, 0) + \frac{\varepsilon}{2} (u_1^s(\alpha_1, +0) + u_1^s(\alpha_1, -0)) + \gamma_{\ell}^{-1} \alpha_2 \frac{\partial u^{\text{in}}(\alpha_1, 0)}{\partial \alpha_2}, \\ &\mathbf{x} \in W_{\varepsilon}; \end{aligned} \quad (10)$$

діапазон 2°:

$$\begin{aligned} [u]_{-}^{+} &\approx \frac{h(\alpha_1)}{\gamma_{\ell}} \left( \frac{\partial u_0^s(\mathbf{x})}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial u^{\text{in}}(\mathbf{x})}{\partial \alpha_2} \right), \quad \left[ \frac{\partial u}{\partial \alpha_2} \right]_{-}^{+} \approx 0, \quad \alpha_1 \in W_0, \quad \alpha_2 = 0, \quad \ell = 1, 2, \\ u^0(\mathbf{x}) &\approx \varphi_P^0(\mathbf{x}) \approx \frac{1}{2} (u(\alpha_1, +0) + u(\alpha_1, -0)) + \gamma_{\ell}^{-1} x_2 \frac{\partial u(\alpha_1, 0)}{\partial \alpha_2}, \quad \mathbf{x} \in W_{\varepsilon}; \end{aligned} \quad (11)$$

діапазон 3°:

$$\begin{aligned} [u]_{-}^{+} &\approx 0, \quad \left[ \frac{\partial u}{\partial \alpha_2} \right]_{-}^{+} \approx - \left( \frac{\gamma_{\ell}}{A(\alpha_1)} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \frac{h(\alpha_1)}{A(\alpha_1)} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} + \gamma_* h(\alpha_1) k_0^2 \right) (u_0^s(\mathbf{x}) + u^{\text{in}}(\mathbf{x})), \\ &\alpha_1 \in W_0, \quad \alpha_2 = 0, \quad \ell = 1, 2, \\ u^0(\mathbf{x}) &\approx \varphi_P^0(\mathbf{x}) \approx u_0^s(\alpha_1, 0) + u^{\text{in}}(\alpha_1, 0), \quad \mathbf{x} \in W_{\varepsilon}. \end{aligned} \quad (12)$$

Тут і надалі  $\gamma_1 = \gamma$ ,  $\gamma_2 = \gamma_*$ ,  $\gamma_* = \gamma(1 + \eta^2)$ ;  $[\zeta]_{-}^{+} = \zeta(\alpha_1, +0) - \zeta(\alpha_1, -0)$ ,  $(\zeta)_{-}^{+} = \zeta(\alpha_1, +0) + \zeta(\alpha_1, -0)$ .

Зазначимо, що у випадку затуплених кінців включення ( $h(\alpha_1) \rightarrow h_0$ ,  $\alpha_1 \rightarrow \alpha_{\pm}$ ,  $h_0 = \text{const} \neq 0$ ) у діапазоні 3° до умов (12) додається крайова умова [6]

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha_1} = 0, \quad \alpha_1 = \alpha_{\pm}. \quad (13)$$

Співвідношення (10)–(13) з точністю до головних членів розкладів (8) визначають розв'язки розглянутих задач всюди, за винятком малих околіїв кінців включення, де виникають примежові шари. У цих околах розв'язки шукаємо у вигляді внутрішніх асимптотичних розкладів [6, 8, 14]. Алгоритм побудови примежовошарових поправок проілюструємо на прикладі включення малої жорсткості (діапазон 2°:  $0 \leq \gamma \leq \sqrt{\varepsilon}$ ). Введемо полярну систему координат  $\tau_1 = r \cos \theta$ ,  $\tau_2 = r \sin \theta$ ,  $-\pi < \theta < \pi$ . У системі  $(\tau_1, \tau_2)$  асимптотика товщини включення  $h(\alpha_1)$  при  $\alpha_1 \rightarrow \alpha_{\pm}$  має вигляд  $h(\tau_1) \sim \varepsilon g_0 |\tau_1|^{\delta} + \dots$ ,  $\tau_1 \rightarrow 0$ ,  $g_0 = \text{const} \neq 0$ ,  $\delta \geq 0$ . Тоді із рівностей (2), (11) знаходимо [8, 14]

$$u^s(r, \theta) \sim a_0 + b_1 \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2}, \quad r \rightarrow 0, \quad 0 \leq \delta < 1,$$

де  $a_0, b_1$  – відомі коефіцієнти, що визначаються через прикладене навантаження.

Введемо внутрішні змінні

$$\tau_i = a\varepsilon^x \bar{\tau}_i, \quad i = 1, 2, \quad r = a\varepsilon^x \bar{r}, \quad a = (g_0/2)^x, \quad x = 1/(1 - \delta). \quad (14)$$

У змінних  $\bar{\tau}_1$  та  $\bar{\tau}_2$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$  кінець неоднорідності трансформується в область  $P = \{(\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2) : \bar{\tau}_1 < 0, |\bar{\tau}_2| < |\bar{\tau}_1|^\delta\}$ , яка обмежена параболою  $\partial P$ . Визначивши асимптотику полів  $u^s(\mathbf{x})$  та  $u^{\text{in}}(\mathbf{x})$  при  $r \rightarrow 0$  і використавши принцип Френкеля узгодження асимптотичних розкладів [15], знаходимо, що внутрішні асимптотики (при  $\varepsilon \rightarrow 0$ ) необхідно шукати у вигляді

$$\begin{aligned} u(\bar{r}, \theta) &\sim v_0(\bar{r}, \theta) + \varepsilon^{x/2} v_1(\bar{r}, \theta), & (\bar{r}, \theta) \in \mathbb{R}^2 \setminus P, \\ u^0(\bar{r}, \theta) &\sim v_0^0(\bar{r}, \theta) + \varepsilon^{x/2} v_1^0(\bar{r}, \theta), & (\bar{r}, \theta) \in P, \\ \varphi_P^0(\bar{r}, \theta) &\sim \psi_0^0(\bar{r}, \theta) + \varepsilon^{x/2} \psi_1^0(\bar{r}, \theta), & (\bar{r}, \theta) \in P. \end{aligned} \quad (15)$$

При цьому члени розкладів (15) задовольняють умови

$$\begin{aligned} v_0 &= v_0^0 = \psi_0^0 = a_0^{\text{in}} + a_0, & v_1(\bar{r}, \theta) &= \sqrt{a} b_1 \sqrt{\bar{r}} \sin \frac{\theta}{2}, \\ \psi_1^0(\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2) &= v_1^0(\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2) = \sqrt{a} b_1 \tau_2 \bar{r}^{-\delta+1/2}, & \bar{r} &\rightarrow \infty, \end{aligned}$$

де  $a_0^{\text{in}}$  – коефіцієнт в асимптотичному поданні

$$u^{\text{in}}(r, \theta) \approx a_0^{\text{in}} + r(a_1^{\text{in}} \cos \theta + b_1^{\text{in}} \sin \theta), \quad r \rightarrow 0.$$

Підставляючи асимптотики (15) у рівняння (1), (2) та умови контакту (5)–(7) (попередньо записавши їх у змінних  $\bar{\tau}_1$ ,  $\bar{\tau}_2$ ) та прирівнявши величини при однакових степенях  $\varepsilon$ , отримаємо

$$\begin{aligned} \Delta v_1(\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2) &= 0, & (\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus P, \\ \Delta v_1^0(\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2) &= 0, & \Delta \psi_1^0(\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2) - \Delta \psi_1^0(\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2) = 0, & (\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2) \in P, \\ v_1 &= v_1^0, & \frac{\partial v_1}{\partial n} &= 0, & (\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2) \in \partial P, \\ \psi_1^0 &= 0, & (\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2) \in \partial P & \quad (\text{для умови (6)}), \\ \frac{\partial v_1^0}{\partial n} - \frac{\partial \psi_1^0}{\partial n} &= 0, & (\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2) \in \partial P & \quad (\text{для умови (7)}). \end{aligned} \quad (16)$$

Примежовошарові поправки (15), (16) описують напружено-деформований стан композита в околі краю включення при  $0 \leq \delta < 1$ . У випадку  $\delta \geq 1$  примежових шарів не виникає [6].

Застосовуючи метод складених асимптотичних розкладів [9, 15] до ефективних крайових умов (10)–(13), отримаємо модель динамічної взаємодії матриці з тонким криволінійним п'єзоелектричним включенням змінної товщини та довільної жорсткості у випадку умови (6) ( $\ell = 1$ ) або умови (7) ( $\ell = 2$ ):

$$\begin{aligned} [u]_-^+ &\approx \frac{h(\alpha_1)}{2\gamma_\ell} \left( \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (u - \gamma_\ell u^{\text{in}}) \right)_-^+, \\ \left[ \frac{\partial u}{\partial \alpha_2} \right]_-^+ &\approx -\frac{1}{2} \left( \frac{\gamma_\ell}{A(\alpha_1)} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \frac{h(\alpha_1)}{A(\alpha_1)} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} + \gamma_* k_0^2 h(\alpha_1) \right) (u)_-^+ + \\ &\quad + \left( \frac{1}{A(\alpha_1)} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \frac{h(\alpha_1)}{A(\alpha_1)} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} + k^2 h(\alpha_1) \right) u^{\text{in}}(\alpha_1, 0), \\ \alpha_1 &\in W_0, \quad \alpha_2 = 0, \quad \ell = 1, 2, \\ u^0(\mathbf{x}) &\approx \varphi_P^0(\mathbf{x}) \approx \frac{1}{2} (u(\alpha_1, +0) + u(\alpha_1, -0)) + \gamma_\ell^{-1} \alpha_2 \frac{\partial u(\alpha_1, 0)}{\partial \alpha_2}, \quad \mathbf{x} \in W_\varepsilon. \end{aligned} \quad (17)$$

У випадку затуплених кінців включення до умов (16) слід додати рівність (13).

Ефективність отриманих асимптотично наближених умов проілюструємо на прикладі задачі випромінювання, коли джерело SH-хвиль знаходиться в центрі тонкої циліндричної п'єзоелектричної оболонки. В полярній системі координат  $(R, \theta)$  оболонка (включення) займає область  $W_\varepsilon = \{(R, \theta) : R_0 - h/2 \leq R \leq R_0 + h/2, \theta \in [0, 2\pi]\}$ , а  $u^{\text{in}}(R) = u_0 H_0^{(1)}(kR)$ , де  $H_0^{(1)}$  – функція Ганкеля 1-го роду. Числові розрахунки проведено при  $\rho_0 = \rho \gamma_*^{1-2\alpha}$ ,  $\varepsilon = h/R_0$ ,  $k_0 h = kh \gamma_*^{-\alpha}$ ,  $\alpha = 0.25$  і  $\eta = 0.5$ .

На рис. 1 і рис. 2 наведено залежності модуля нормованої амплітуди випромінювання  $f_* = 4|1 + f(\mathbf{v}^s)|/u_0$  від параметра  $\gamma$  відповідно для  $\varepsilon = 0.01$  і  $\varepsilon = 0.1$  при хвильових розмірах оболонки  $kR_0 = 0.1$  та  $kR_0 = 1$ . Суцільні лінії відповідають наближеній моделі для включень довільної жорсткості (17) при  $\ell = 2$ , а лінії, марковані трикутниками або колами, – точним значенням, отриманим при умовах (5), (6) або (5), (7). Наведені результати отримано методом відокремлення змінних [11].

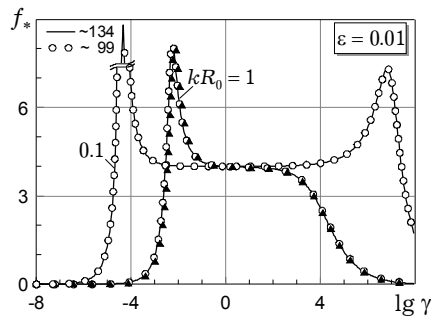


Рис. 1

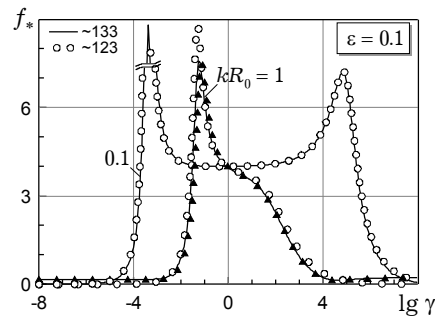


Рис. 2

З аналізу наведених графіків випливає, що при різних відносних товщинах і хвильових розмірах оболонки  $\varepsilon$  та  $kR_0$  помітне добре співпадіння результатів, отриманих при точному розв'язанні задачі, та розв'язків цієї задачі, одержаних з використанням встановлених у роботі ефективних умов спряження (17). В області включень малої жорсткості розв'язки задачі мають резонансний характер за рахунок власних коливань заповнювача оболонки. Видно також, що значення амплітуд випромінювання  $f_*$  несуттєво відрізняються (окрім резонансних частот) при зміні граничних електричних умов (6) на (7).

1. Александров В. М., Мхитарян С. М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. – Москва: Наука, 1983. – 488 с.
2. Бабаев А. Э., Кубенко В. Д. Нестационарная аэрогидроупругость слоистых оболочек // Динамика элементов конструкций. – Киев: «А.С.К.», 1999. – С. 247–261. – (Механика композитов: В 12 т. – Т. 9).
3. Балакирев М. К., Гилинский И. А. Волны в пьезокристаллах. – Новосибирск: Наука, 1982. – 239 с.
4. Ван-Дайк М. Д. Методы возмущений в механике жидкости. – Москва: Мир, 1967. – 310 с.
5. Викторов И. А. Звуковые поверхностные волны в твердых телах. – Москва: Наука, 1981. – 288 с.
6. Кіт Г. С., Ємець В. Ф., Кунець Я. І. Модель пружно-динамічної взаємодії тонкостінного включення з матрицею в умовах антиплоского зсуву // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1998. – 41, № 1. – С. 54–61.

7. Литвин О. В., Попов В. Г. Взаємодія плоских пружних гармонічних хвиль з пружним включенням за повного зчеплення // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2007. – **43**, № 3. – С. 58–64.
8. Мовчан А. Б., Назаров С. А. Напряженно-деформированное состояние плоской области с тонким упругим включением конечных размеров // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1987. – № 1. – С. 75–83.
9. Найфе А. Введение в методы возмущений. – Москва: Мир, 1984. – 535 с.
10. Підстригач Я. С. Умови стрибка напружень і переміщень на тонкостінному пружному включенні в суцільному середовищі // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1982. – № 12. – С. 29–31.
11. Подстригач Я. С., Поддубняк А. П. Рассеяние звуковых пучков на упругих телах сферической и цилиндрической формы. – Киев: Наук. думка, 1986. – 264 с.
12. Сулим Г. Т. Основи математичної теорії термопружності рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями. – Львів: Досл.-вид. центр НТШ, 2007. – 716 с.
13. Сулим Г. Т., Кунець Я. І., Рабош Р. В. Асимптотичний аналіз динамічної взаємодії тонкого прямолінійного п'єзоелектричного включення з пружним середовищем за позовжнього зсуву // Вісн. Дон. ун-ту. – 2008. – № 1. – С. 137–141.
14. Emets V. F., Kunets Ya. I., Matus V. V. Scattering of SH waves by an elastic thin-walled rigidly supported inclusion // Arch. Appl. Mech. – 2004. – **73**. – P. 769–780.
15. Fraenkel L. E. On the method of matched asymptotic expansions. Part I. A matching principle // Proc. Cambridge Phil. Soc. – 1969. – **65**. – P. 209–231.
16. Johansson G., Niklasson A. J. Approximate dynamic boundary conditions for a thin piezoelectric layer // Int. J. Solids Struct. – 2003. – **40**. – P. 3477–3492.
17. Zhang B., Bostrom A., Niklasson A. J. Antiplane shear waves from a piezoelectric strip actuator: exact versus effective boundary condition solutions // Smart Mater. Struct. – 2004. – **13**. – P. 161–168.

**ДИНАМИЧЕСКОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ УПРУГОЙ СРЕДЫ  
С ТОНКОСТЕННЫМ КРИВОЛИНЕЙНЫМ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИМ ВКЛЮЧЕНИЕМ  
ПРИ ПРОДОЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЯХ КОМПОЗИТА**

*С использованием метода сращивания асимптотических разложений получены модели динамического взаимодействия тонкостенного криволинейного пьезоэлектрического включения сменной толщины с упругой изотропной средой при стационарных колебаниях композита. Упругая система находится в условиях продольного сдвига. Рассмотрены различные случаи электрических граничных условий на поверхности неоднородности. Предложен алгоритм построения пограничных поправок для уточнения поведения смещений и напряжений около края включения при разных его формах.*

**DYNAMIC INTERACTION BETWEEN ELASTIC MEDIUM AND THIN CURVILINEAR  
PIEZOELECTRIC INCLUSION UNDER LONGITUDINAL VIBRATION OF COMPOSITE**

*Models of antiplane dynamic interaction between a thin curvilinear piezoelectric inclusion of variable thickness and elastic isotropic medium under stationary vibration of composite were obtained using the method of matched asymptotic expansions. The problem was considered for different kinds of electrical boundary conditions. Algorithm of construction of boundary layer corrections was proposed to refine stress and displacement fields behavior near the tip of inclusion for its different shapes.*

Ін-т прикл. проблем механіки і математики  
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано  
28.10.08