УДК 539.3: 534.6

Т. Л. Ефимова

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ О СВОБОДНЫХ КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЯХ ТОЛСТОСТЕННЫХ ОРТОТРОПНЫХ НЕОДНОРОДНЫХ ЦИЛИНДРОВ

С использованием трехмерной теории упругости исследуется задача о свободных крутильных колебаниях анизотропного полого цилиндра при различных граничных условиях на торцах. Предложен численно-аналитический подход для решения сформулированной задачи. Исходные уравнения теории упругости в частных производных при помощи сплайн-аппроксимации и коллокации сводятся к задаче на собственные значения для системы обыкновенных дифференциальных уравнений высокого порядка по радиальной координате, которая решается устойчивым численным методом дискретной ортогонализации совместно с методом пошагового поиска. Приведены результаты расчетов в случае ортотропного и неоднородного материала цилиндра для некоторых видов граничных условий.

Введение. Цилиндрические конструктивные элементы находят широкое применение в машиностроении, судостроении, авиационной, газовой, нефтяной и многих других отраслях промышленности и областях современной техники. Для толстостенных элементов конструкций возникает необходимость проводить расчет динамических характеристик, используя трехмерную теорию упругости. Если цилиндр является анизотропным и неоднородным, то решение подобной задачи сопряжено со значительными трудностями, обусловленными сложностью системы исходных дифференциальных уравнений в частных производных и необходимостью удовлетворения краевым условиям на ограничивающих упругое тело поверхностях.

В научной литературе имеются только отдельные работы о колебаниях цилиндров конечной длины с различными граничными условиями на торцах, выполненные в рамках трехмерной теории упругости. Свободные колебания цилиндра исследовались в работах [1, 2, 4, 6, 7–11], при этом использовались методы однородных решений, конечных элементов, прямых и др.

В данном сообщении предлагается эффективная численная методика исследования собственных частот и форм осесимметричных крутильных колебаний полых ортотропных цилиндров конечной длины при различных граничных условиях на торцах цилиндра, которая базируется на применении сплайн-аппроксимации в одном из координатных направлений и последующем решении краевой задачи на собственные значения для систем обыкновенных дифференциальных уравнений высокого порядка в общем случае с переменными коэффициентами устойчивым численным методом дискретной ортогонализации в сочетании с методом пошагового поиска. Предложенная методика позволяет проводить исследования свободных колебаний цилиндров конечной длины в случае неоднородного материала. Ранее метод сплайн-аппроксимации применялся для исследования механического поведения пластин и оболочек различной структуры [3, 5, 8].

1. Основные соотношения. Рассмотрим в цилиндрической системе координат r, θ, z полый цилиндр постоянной толщины (рис. 1) с внутренним радиусом $R - H$ и внешним радиусом $R + H$ (R – радиус срединной поверхности, $2H$ – толщина цилиндра) длины L, изготовленный из ортотропного материала.

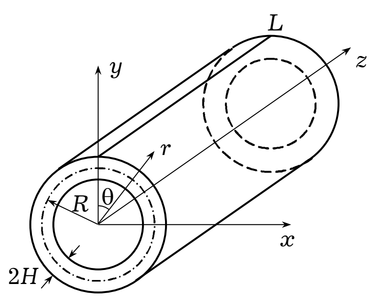

Рис. 1

Исходные уравнения теории упругости для задачи о свободных колебаниях такого цилиндра имеют вид:

ISSN 0130–9420. Мат. методи та фіз.-мех. поля. 2009. – 52, № 1. – С. 92-100.

– *уравнения движения*

$$\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial\theta}+\frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial z}+\frac{\sigma_r-\sigma_\theta}{r}=\rho\frac{\partial^2u_r}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{\theta z}}{\partial\theta}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}+\frac{\sigma_{rz}}{r}=\rho\frac{\partial^2u_z}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial\sigma_{\theta z}}{\partial z}+\frac{2\sigma_{r\theta}}{r}=\rho\frac{\partial^2u_\theta}{\partial t^2}; \tag{1}$$

– *соотношения Коши*

$$e_r=\frac{\partial u_r}{\partial r},\qquad e_\theta=\frac{1}{r}\left(u_r+\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}\right),$$

$$e_z=\frac{\partial u_z}{\partial z},\qquad 2e_{\theta z}=\frac{\partial u_\theta}{\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial\theta},$$

$$2e_{rz}=\frac{\partial u_r}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial r},\qquad 2e_{r\theta}=\frac{\partial u_\theta}{\partial r}-\frac{1}{r}u_\theta+\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}; \tag{2}$$

– *обобщенный закон Гука для ортотропного упругого тела*

$$\sigma_r=\lambda_{11}e_r+\lambda_{12}e_\theta+\lambda_{13}e_z,$$

$$\sigma_\theta=\lambda_{12}e_r+\lambda_{22}e_\theta+\lambda_{23}e_z,$$

$$\sigma_z=\lambda_{13}e_r+\lambda_{23}e_\theta+\lambda_{33}e_z,$$

$$\sigma_{\theta z}=2\lambda_{44}e_{\theta z},\qquad \sigma_{rz}=2\lambda_{55}e_{rz},\qquad \sigma_{r\theta}=2\lambda_{66}e_{r\theta}, \tag{3}$$

где элементы матрицы жесткости $\lambda_{ij}=\lambda_{ij}(r,z)$, а также плотность материала цилиндра $\rho(r,z)$ являются непрерывными и дифференцируемыми функциями координат r и z. Здесь t – временная координата; $u_r(r,\theta,z,t)$, $u_\theta(r,\theta,z,t)$, $u_z(r,\theta,z,t)$ – проекции вектора полного перемещения точек цилиндра в направлениях, касательных соответственно к координатным линиям r,θ,z; $e_r(r,\theta,z,t)$, $e_\theta(r,\theta,z,t)$, $e_z(r,\theta,z,t)$ – относительные линейные деформации в направлении координатных линий; $e_{\theta z}(r,\theta,z,t)$, $e_{rz}(r,\theta,z,t)$, $e_{r\theta}(r,\theta,z,t)$ – деформации сдвига; $\sigma_r(r,\theta,z,t)$, $\sigma_\theta(r,\theta,z,t)$, $\sigma_z(r,\theta,z,t)$ – нормальные напряжения; $\sigma_{\theta z}(r,\theta,z,t)$, $\sigma_{rz}(r,\theta,z,t)$, $\sigma_{r\theta}(r,\theta,z,t)$ – касательные напряжения.

Элементы λ_{ij} матрицы жесткости могут быть вычислены через элементы c_{ij} матрицы податливости по формулам

$$\lambda_{11}=(c_{22}c_{33}-c_{23}^2)\frac{1}{\Delta},\qquad \lambda_{12}=(c_{13}c_{23}-c_{12}c_{33})\frac{1}{\Delta},$$

$$\lambda_{13}=(c_{12}c_{23}-c_{13}c_{22})\frac{1}{\Delta},\qquad \lambda_{22}=(c_{11}c_{33}-c_{13}^2)\frac{1}{\Delta},$$

$$\lambda_{23}=(c_{12}c_{13}-c_{11}c_{23})\frac{1}{\Delta},\qquad \lambda_{33}=(c_{11}c_{22}-c_{12}^2)\frac{1}{\Delta},$$

$$\lambda_{44}=\frac{1}{c_{44}},\qquad \lambda_{55}=\frac{1}{c_{55}},\qquad \lambda_{55}=\frac{1}{c_{55}},$$

$$\Delta=c_{11}(c_{22}c_{33}-c_{23}^2)-c_{12}(c_{12}c_{33}-c_{13}c_{23})+c_{13}(c_{12}c_{23}-c_{13}c_{22}). \tag{4}$$

В свою очередь, элементы матрицы податливости могут быть выражены через технические постоянные:

$$c_{11}=\frac{1}{E_r},\quad c_{12}=-\frac{\nu_{r\theta}}{E_\theta},\quad c_{13}=-\frac{\nu_{rz}}{E_z},\quad c_{22}=\frac{1}{E_\theta},\quad c_{23}=-\frac{\nu_{\theta z}}{E_z},$$

$$c_{33}=\frac{1}{E_z},\quad c_{44}=-\frac{1}{G_{\theta z}},\quad c_{55}=-\frac{1}{G_{rz}},\quad c_{66}=-\frac{1}{G_{r\theta}}, \tag{5}$$

где E_r, E_θ, E_z – модули упругости в направлениях r, θ, z соответственно; $G_{r\theta}, G_{rz}, G_{\theta z}$ – модули сдвига; $\nu_{r\theta}, \nu_{rz}, \nu_{\theta z}$ – коэффициенты Пуассона.

В случае осесимметричных колебаний компоненты вектора перемещений, тензоров напряжений и деформаций не зависят от окружной координаты θ. При этом возможны два типа движения:

– радиально-продольные колебания с компонентами вектора перемещений

$$u_r \neq 0, \qquad u_z \neq 0, \qquad u_\theta = 0;$$

– крутильные колебания с компонентами вектора перемещений

$$u_r = 0, \qquad u_z = 0, \qquad u_\theta \neq 0.$$

В данном сообщении рассматриваются крутильные осесимметричные колебания цилиндров конечной длины. При этом из уравнений движения (1) (с учетом того, что $u_r = 0$, $u_z = 0$, $u_\theta \neq 0$ и $\dfrac{\partial u_r}{\partial \theta} = \dfrac{\partial u_\theta}{\partial \theta} = 0$ для всех входящих функций) остается уравнение

$$\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2\sigma_{r\theta}}{r} = \rho \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2}. \tag{6}$$

Необходимые соотношения обобщенного закона Гука и соотношения Коши при этом упрощаются:

$$\sigma_{\theta z} = 2\lambda_{44} e_{\theta z}, \qquad \sigma_{r\theta} = 2\lambda_{66} e_{r\theta}, \tag{7}$$

$$2e_{\theta z} = \frac{\partial u_\theta}{\partial z}, \qquad 2e_{r\theta} = \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r} u_\theta. \tag{8}$$

Внутренняя и внешняя боковые поверхности цилиндра ($r = R - H$ и $r = R + H$) свободны от напряжений, и соответствующие граничные условия принимают следующий вид:

$$\sigma_{r\theta}(R \pm H, z, t) = 0. \tag{9}$$

На торцах цилиндра при $z = 0$ и $z = L$ возможны условия шарнирного опирания $\dfrac{\partial u_\theta}{\partial z} = 0$, и жесткого защемления $u_\theta = 0$.

Предполагаем, что все точки цилиндра совершают гармонические колебания с частотой ω, т. е. $u_\theta(r,z,t) = \tilde{u}_\theta(r,z)e^{i\omega t}$ (далее знак «~» опускаем).

Запишем разрешающее уравнение в перемещениях в виде

$$\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} - \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{\lambda_{66}}\frac{\partial \lambda_{66}}{\partial r}\right)\frac{u_\theta}{r} + \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{\lambda_{66}}\frac{\partial \lambda_{66}}{\partial r}\right)\frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{\lambda_{66}}\frac{\partial \lambda_{44}}{\partial z}\frac{\partial u_\theta}{\partial z} +$$

$$+ \frac{\lambda_{44}}{\lambda_{66}}\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} + \frac{1}{\lambda_{66}}\rho\omega^2 u_\theta = 0. \tag{10}$$

Преобразуем уравнение (10):

$$\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} = a_1 u_\theta + a_2 \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + a_3 \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} + a_4 \frac{\partial u_\theta}{\partial r}, \tag{11}$$

где коэффициенты $a_i = a_i(r,z)$, $i = 2,3,4$, и $a_1 = a_1(r,z,\omega)$ определяются таким образом:

$$a_1 = \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{\lambda_{66}}\frac{\partial \lambda_{66}}{\partial r}\right)\frac{1}{r} - \frac{1}{\lambda_{66}}\rho\omega^2, \qquad a_2 = -\frac{1}{\lambda_{66}}\frac{\partial \lambda_{44}}{\partial z},$$

$$a_3 = -\frac{\lambda_{44}}{\lambda_{66}}, \qquad a_4 = -\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{\lambda_{66}}\frac{\partial \lambda_{66}}{\partial r}\right). \tag{12}$$

При этом граничные условия (9) на внутренней и внешней поверхностях принимают следующий вид:

$$\lambda_{66}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r}-\frac{u_\theta}{r}\right)=0\,. \tag{13}$$

2. Метод решения. Задачу (11) с соответствующими граничными условиями (13) можно решить совместным использованием метода сплайн-коллокации, метода дискретной ортогонализации и метода пошагового поиска. Для решения задачи (11) методом сплайн-коллокации разрешающую функцию $u_\theta(r,z)$ представим в виде

$$u_\theta=\sum_{i=0}^{N}u_{\theta i}(r)\varphi_i(z)\,, \tag{14}$$

где $u_{\theta i}(r)$ – искомые функции переменной r, $\varphi_i(z)$, $i=0,1,\ldots,N$, – линейные комбинации B-сплайнов на равномерной сетке Δ: $0=z_0<z_1<\ldots<z_N=$ $=L$ с учетом граничных условий при $z=0$ и $z=L$. В уравнение (11) входят производные не выше второго порядка от разрешающей функции $u_\theta(r,z)$ по координате z, и можно ограничиться аппроксимацией сплайн-функциями третьей степени

$$B_3^i(z)=\frac{1}{6}\begin{cases}0, & -\infty<z<z_{i-2},\\ y^3, & z_{i-2}\le z<z_{i-1},\\ -3y^2+3y^2+3y+1, & z_{i-1}\le z<z_i,\\ 3y^3-6y^2+4, & z_i\le z<z_{i+1},\\ (1-y)^3, & z_{i+1}\le z<z_{i+2},\\ 0, & z_{i+2}\le z<\infty,\end{cases} \tag{15}$$

где $y=(z-z_k)/h_z$ на интервале $[z_k,z_{k+1}]$, $k=i-2,\ldots,i+1$, $i=-1,\ldots,N+1$, $h_z=z_{k+1}-z_k=\mathrm{const}$.

При этом функции $\varphi_i(z)$ формируются таким образом:

1°. Если разрешающая функция $u_\theta=0$ при $z=0$ и $z=L$, то

$$\varphi_0(z)=-4B_3^{-1}(z)+B_3^0(z),\qquad \varphi_1(z)=B_3^{-1}(z)-\frac{1}{2}B_3^0(z)+B_3^1(z)\,,$$

$$\varphi_i(z)=B_3^i(z),\qquad i=2,3,\ldots,N-2\,,$$

$$\varphi_{N-1}(z)=B_3^{N-1}(z)-\frac{1}{2}B_3^N(z)+B_3^{N+1}(z)\,,$$

$$\varphi_N(z)=-4B_3^{N+1}(z)+B_3^N(z)\,. \tag{16}$$

2°. Если $\dfrac{\partial u_\theta}{\partial z}=0$ при $z=0$ и $z=L$, то

$$\varphi_0(z)=B_3^0(z),\qquad \varphi_1(z)=B_3^{-1}(z)-\frac{1}{2}B_3^0(z)+B_3^1(z)\,,$$

$$\varphi_i(z)=B_3^i(z),\qquad i=2,3,\ldots,N-2\,,$$

$$\varphi_{N-1}(z)=B_3^{N-1}(z)-\frac{1}{2}B_3^N(z)+B_3^{N+1}(z),\qquad \varphi_N(z)=B_3^N(z)\,. \tag{17}$$

3°. Если $u_\theta=0$ при $z=0$, а $\dfrac{\partial u_\theta}{\partial z}=0$ при $z=L$, то

$$\varphi_0(z)=-4B_3^{-1}(z)+B_3^0(z),\qquad \varphi_1(z)=B_3^{-1}(z)-\frac{1}{2}B_3^0(z)+B_3^1(z)\,,$$

$$\varphi_i(z) = B_3^i(z), \qquad i = 2,3,\ldots,N-2,$$

$$\varphi_{N-1}(z) = B_3^{N-1}(z) - \frac{1}{2}B_3^N(z) + B_3^{N+1}(z), \qquad \varphi_N(z) = B_3^N(z). \tag{18}$$

Подставляя представление (14) в уравнение (11), требуем его удовлетворения в заданных точках коллокации $\xi_k \in [0,L]$, $k = \overline{0,N}$. Рассмотрим случай, когда число узлов сетки (с учетом z_0) четное, т.е. $N = 2n+1$, $n \ge 3$. Выбор точек коллокации $\xi_{2i} \in [z_{2i}, z_{2i+1}]$, $\xi_{2i+1} \in [z_{2i}, z_{2i+1}]$ в виде $\xi_{2i} = z_{2i} + s_1 h_z$, $\xi_{2i+1} = z_{2i} + s_2 h_z$, $i = 0,1,2,\ldots,n$, где s_1 и s_2 – корни полинома Лежандра второго порядка на отрезке $[0,1]$, которые равны $s_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}$, $s_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}$, является оптимальным и существенно увеличивает порядок точности аппроксимации. Число точек коллокации при этом $\bar{N} = N+1$. В результате получаем систему $2(N+1)$ линейных дифференциальных уравнений относительно функций $u_{\theta i}, \tilde{u}_{\theta i}$, $i = 0,\ldots,N$, где $u'_{\theta i} = \tilde{u}_{\theta i}$. Если ввести обозначения

$$\Phi_1 = [\varphi_i(\xi_k)], \qquad k,i = 0,\ldots,N,$$

$$\bar{u}_\theta = \{u_{\theta 0}, u_{\theta 1},\ldots,u_{\theta N}\}^\top, \qquad \bar{\tilde{u}}_\theta = \{\tilde{u}_{\theta 0}, \tilde{u}_{\theta 1},\ldots,\tilde{u}_{\theta N}\}^\top,$$

$$\bar{a}_i^\top = \{a_i(r,\xi_0), a_i(r,\xi_1),\ldots,a_i(r,\xi_N)\}, \qquad i = 2,3,4,$$

$$\bar{a}_1^\top = \{a_1(r,\xi_0,\omega), a_1(r,\xi_1,\omega),\ldots,a_1(r,\xi_N,\omega)\}, \tag{19}$$

а также для матрицы $A = [a_{ij}]$, $i,j = 0,\ldots,N$, и вектора $\bar{c} = \{c_0, c_1,\ldots,c_N\}^\top$ обозначить через $\bar{c} * A$ матрицу $[c_i a_{ij}]$, то система обыкновенных дифференциальных уравнений относительно $u_{\theta i}, \tilde{u}_{\theta i}$ примет вид

$$\frac{d\bar{u}_\theta}{dr} = \bar{\tilde{u}}_\theta,$$

$$\frac{d\bar{\tilde{u}}_\theta}{dr} = \Phi_1^{-1}(\bar{a}_1 * \Phi_1 + \bar{a}_2 * \Phi'_1 + \bar{a}_3 * \Phi''_1)\bar{u}_\theta + \Phi_1^{-1}(\bar{a}_4 * \Phi_1)\bar{\tilde{u}}_\theta, \tag{20}$$

которую можно представить в виде

$$\frac{d\bar{Y}}{dr} = A(r,\omega)\bar{Y}, \qquad R-H \le r \le R+H, \tag{21}$$

где $\bar{Y} = \{u_{\theta 0},\ldots,u_{\theta N}, \tilde{u}_{\theta 0},\ldots,\tilde{u}_{\theta N}\}^\top$ – вектор-функция, зависящая от r; $A(r,\omega)$ – квадратная матрица порядка $2\bar{N} \times 2\bar{N}$.

Граничные условия (13) для этой системы обыкновенных дифференциальных уравнений можно записать так:

$$\Phi_1 \bar{\tilde{u}}_\theta - \Phi_1 \frac{1}{r}\bar{u}_\theta = 0 \tag{22}$$

или

$$B_1\bar{Y}(R-H) = \bar{0}, \qquad B_2\bar{Y}(R+H) = \bar{0}, \tag{23}$$

где B_1 и B_2 – прямоугольные матрицы порядка $\bar{N} \times 2\bar{N}$.

Краевую задачу (21), (23) на собственные значения можно решить, используя метод дискретной ортогонализации совместно с методом пошагового поиска [4].

3. Анализ результатов. Для оценки точности предложенной методики приводилось (табл. 1) сравнение обезразмеренных частот $\bar{\omega} = \omega H\sqrt{\rho / G}$ колебаний изотропного полого цилиндра с $\nu = 0.34$, $\rho = 1$, $H/R = 0.25$, $H/L = 0.1$ и с шарнирно опертыми краями, полученных с использованием предложенного подхода при различном числе $\bar{N}$ точек коллокации и возможного в данном случае представления перемещений в виде

$$u_\theta = \bar{u}_\theta(r)\sin\frac{m\pi z}{L} \tag{24}$$

с последующим применением метода дискретной ортогонализации.

Таблица 1

$\bar{\omega}_i$	Число m полуволн по длине цилиндра	Метод сплайн-коллокации					Использование представления (24)
		Количество точек коллокации $\bar{N}$					
		12	16	20	24	28	
ω_1	1	0.3141	0.3141	0.3141	0.3141	0.3141	0.3141
$\bar{\omega}_2$	2	0.6285	0.6283	0.6283	0.6283	0.6283	0.6283
$\bar{\omega}_3$	3	0.9438	0.9429	0.9426	0.9425	0.9425	0.9424
$\bar{\omega}_4$	4	1.2603	1.2585	1.2575	1.2570	1.2568	1.2566
$\bar{\omega}_5$	5	1.5646	1.5756	1.5732	1.5720	1.5715	1.5707
$\bar{\omega}_6$	0	1.6454	1.6454	1.6454	1.6454	1.6454	1.6454
$\bar{\omega}_7$	1	1.6751	1.6751	1.6751	1.6751	1.6751	1.6751
$\bar{\omega}_8$	2	1.7613	1.7613	1.7613	1.7613	1.7613	1.7613
$\bar{\omega}_9$	6	1.8969	1.8925	1.8903	1.8879	1.8866	1.8866
$\bar{\omega}_{10}$	3	1.9924	1.8964	1.8963	1.8962	1.8962	1.8962
$\bar{\omega}_{11}$	4	2.0726	2.0715	2.0709	2.0706	2.0705	2.0705

Из анализа табл. 1 видно, что для получения частот колебаний, которые соответствуют большому числу m полуволн в продольном направлении при использовании предложенной методики необходимо брать больше точек коллокации. Первые частоты для одной полуволны в продольном направлении ($m = 1$) и частоты крутильных колебаний, постоянных в продольном направлении ($m = 0$), с достаточной точностью могут быть получены при минимальном числе точек коллокации $\bar{N}$. Можно отметить, что первые частоты для последовательных значений m могут быть получены путем умножения m на множитель 0.1π. Частота $\bar{\omega} = m\pi / L$ при шарнирном опирании торцов конечного цилиндра соответствует бездисперсионной ветви $\beta = 0$ известного дисперсионного уравнения для крутильных волн в сплошных бесконечных цилиндрах [7]

$$\beta J_0(\beta) - 2J_1(\beta) = 0, \qquad \beta = (\bar{\omega}^2 - \gamma^2)^{1/2},$$

$J_i(\beta)$ – функции Бесселя, волновое число $\bar{\gamma} = m\pi / L$. Сравнение приведенных в таблице результатов дает возможность оценить точность аппроксимации перемещений линейными комбинациями B-сплайнов в продольном направлении.

Проводилось сравнение спектров собственных частот крутильных колебаний для цилиндров с различными граничными условиями на торцах (табл. 2). Для цилиндра с жестко защемленными торцами частотный спектр совпадает с аналогичным для цилиндра с шарнирно опертыми торцами, за исключением частот крутильных колебаний, постоянных в продольном направлении ($m = 0$), которые в случае жесткой заделки пропадают (за счет условия $u_\theta = 0$). При одном жестко защемленном и одном шарнирно опертом торце спектр существенно меняется.

Таблица 2

$\bar{\omega}_i$	Шарнирное опирание двух торцов цилиндра	Жесткое защемление двух торцов цилиндра	Один шарнирно опертый и один жестко защемленный торец
$\bar{\omega}_1$	0.3141	0.3141	0.1570
$\bar{\omega}_2$	0.6283	0.6283	0.4712
$\bar{\omega}_3$	0.9425	0.9425	0.7855
$\bar{\omega}_4$	1.2568	1.2568	1.1000
$\bar{\omega}_5$	1.5715	1.5715	1.4154
$\bar{\omega}_6$	1.6454	–	1.6529
$\bar{\omega}_7$	1.6751	1.6751	1.7115
$\bar{\omega}_8$	1.7613	1.7613	1.7324
$\bar{\omega}_9$	1.8866	1.8866	1.8233
$\bar{\omega}_{10}$	1.8962	1.8962	1.9793
$\bar{\omega}_{11}$	2.0705	2.0705	2.0517

В табл. 3 представлены результаты расчета безразмерных частот $\bar{\omega} = \omega H\sqrt{\rho/G_0}$, $G_0 = 10^4$ МПа, ортотропного цилиндра из стеклопластика АСТТ(б)–C_2O и полиэфирной смолы ПН–3 со следующими механическими параметрами:

$E_r = 0.42 \cdot 10^4$ Мпа, $E_\theta = 1.31 \cdot 10^4$ Мпа, $E_z = 1.79 \cdot 10^4$ Мпа,

$\nu_{z\theta} = 0.15$, $\nu_{r\theta} = 0.31$, $\nu_{rz} = 0.08$, $G_{\theta z} = 0.28 \cdot 10^4$ Мпа, $G_{r\theta} = G_{zr} = 0.24 \cdot 10^4$ МПа при $H/R = 0.25$, $H/L = 0.1$, $H = 1$ методом сплайн коллокации (28 точек коллокации по длине цилиндра) для случаев жестко защемленных торцов, одного шарнирно опертого и второго жестко защемленного торца, а также для шарнирно опертых торцов, в последнем случае с использованием предложенной методики и возможного представления решения (24).

Очевидно, что для ортотропного материала с равными модулями сдвига $G_{\theta z}$ и $G_{r\theta}$ частоты свободных крутильных колебаний будут отличаться от случая изотропного цилиндра на множитель, определяющийся отношением модуля сдвига орторопного материала $G_{r\theta}$ и модуля сдвига G изотропного материала.

Таблица 3

$\bar{\omega}_i$	Шарнирное опирание двух торцов		Жесткое защемление двух торцов	Один шарнирно опертый и один жестко защемленный торец
	Использование представления (24)	Метод сплайн-коллокации		
$\bar{\omega}_1$	0.5937 ($m = 1$)	0.5937	0.5937	0.2968
$\bar{\omega}_2$	1.1874 ($m = 2$)	1.1874	1.1874	0.8905
$\bar{\omega}_3$	1.7810 ($m = 3$)	1.7815	1.7815	1.4843
$\bar{\omega}_4$	2.3748 ($m = 4$)	2.3752	2.3753	2.0782
$\bar{\omega}_5$	2.9684 ($m = 5$)	2.9698	2.9701	2.6725
$\bar{\omega}_6$	3.3587 ($m = 0$)	3.3587	–	3.2677
$\bar{\omega}_7$	3.4109 ($m = 1$)	3.4108	3.4108	3.3718
$\bar{\omega}_8$	3.5621 ($m = 6$)	3.5654	3.5661	3.4747

Исследовались собственные частоты изотропного неоднородного цилиндра с изменяющимся по длине модулем Юнга по различным законам:

$$E(z) = \left[\alpha \left(6 \frac{z^2}{L^2} - 6 \frac{z}{L} + 1 \right) + 1 \right] E_0 \tag{25}$$

– симметричное поведение модуля Юнга относительно плоскости $z = L/2$;

$$E(z) = \left[\alpha \sin\left(\frac{2\pi z}{L} \right) + 1 \right] E_0 \tag{26}$$

– антисимметричное поведение модуля Юнга относительно плоскости $z = L/2$.

При этом усредненный по длине модуль Юнга оставался равным E_0 при различных значениях параметра α. В табл. 4 представлены обезразмеренные частоты $\bar{\omega} = \omega H \sqrt{\rho / G_0}$ свободных колебаний полого изотропного $(\nu = 0.34)$ цилиндра при различных условиях на торцах:

а) оба торца шарнирно оперты (Ш–Ш);

б) оба торца жестко защемлены (Ж–Ж);

в) два торца свободны от напряжений (С–С).

Плотность материала считается постоянной. Расчеты выполнены для толщины цилиндра $2H$ при $H/R = 0.25$, $L = 10$, $\alpha = 0 \div 0.5$. (Случай $\alpha = 0$ соответствует однородному изотропному цилиндру.) Количество точек коллокации выбиралось равное 40.

Таблица 4

Закон изменения модуля Юнга	Граничные условия	$\alpha = 0$	$\alpha = 0.1$	$\alpha = 0.2$	$\alpha = 0.3$	$\alpha = 0.4$	$\alpha = 0.5$
Формула (25)	С–С (Ш–Ш)	0.3141	0.3092	0.3040	0.2986	0.2928	0.2867
	Ж–Ж	0.3141	0.3186	0.3225	0.3258	0.3287	0.3311
Формула (26)	С–С (Ш–Ш)	0.3141	0.3131	0.3099	0.3045	0.2967	0.2859
	Ж–Ж	0.3141	0.3139	0.3131	0.3118	0.3099	0.3073

С ростом параметра α увеличивается (до 13%) расхождение между соответствующими частотами для различных граничных условий. При изменении по длине модуля Юнга большее влияние (до 9%) оказывается на частоты жестко защемленного по торцам цилиндра; для цилиндра со свободными от напряжений торцами (либо цилиндра, шарнирно опертого по торцам) частоты изменяются незначительно (2%-5%).

1. *Григоренко А. Я.* Численное решение задачи о свободных осесимметричных колебаниях полого ортотропного цилиндра при различном закреплении торцов // Прикл. механика. – 1997. – **33**, № 5. – С. 49–54.
2. *Григоренко А. Я., Дыяк И. И., Макар В. М.* Влияние анизотропии на динамические характеристики свободных колебаний конечных цилиндров // Прикл. механика. – 2001. – **37**, № 5. – С. 44–51.
3. *Григоренко О. Я., Єфімова Т. Л., Пузирьов С. В.* Дослідження вільних коливань прямокутних ортотропних пластин лінійно змінної товщини // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2006. – **49,** № 3. – С. 153–161.
4. *Григоренко Я. М., Беспалова Е. И., Китайгородский А. Б., Шинкарь А. И.* Свободные колебания элементов оболочечных конструкций. – Киев: Наук. думка, 1986. – 171 с.
5. *Григоренко Я. М., Григоренко О. Я., Захарійченко Л. І.* Розв'язування задач і дослідження напруженого стану циліндричних оболонок змінної товщини з некруговим поперечним перерізом на основі сплайн-апроксимації // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2006. – **49,** № 1. – С. 7–19.
6. *Гринченко В. Т.* Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров. – Киев: Наук. думка, 1978. – 264 с.

7. *Гринченко В. Т., Мелешко В. В.* Гармонические колебания и волны в упругих телах. – Киев: Наук. думка, 1981. – 284 с.
8. *Grigorenko A. Ya., Efimova T. L.* Application of spline-approximation for solving the problems on natural vibration of rectangular plates of variable thickness // Int. Appl. Mech. – 2005. – **41**, No. 10. – P. 1161–1169.
9. *Grigorenko A. Ya., Vlaikov G. G.* Numerical analysis of anisotropic circular and non-circular cylinders // CMM-2003-Computer Methods in Mechanics (June 3-6, 2003, Gliwice, Poland): Abstracts. – P. 141–142.
10. *Loy C. T., Lam K. Y.* Vibration of thick cylindrical shells on the basis of three-dimensional theory of elasticity // J. Sound and Vibr. – 1999. – **226,** No. 4. – P. 719–737.
11. *Hutchinson S. R., El-Arhari S. A.* Vibration of free hollow circular cylinder // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1986. – **53**. – P. 641–646.

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ПРО ВІЛЬНІ КРУТИЛЬНІ КОЛИВАННЯ ТОВСТОСТІННИХ ОРТОТРОПНИХ НЕОДНОРІДНИХ ЦИЛІНДРІВ

На основі тривимірної теорії пружності розглядається задача про вільні крутильні коливання анізотропного порожнистого циліндра при різних граничних умовах на його торцях. Запропоновано чисельно-аналітичний підхід для розв'язку сформульованої задачі. Вихідні рівняння теорії пружності з частинними похідними за допомогою сплайн-апрокисмації і колокації зводяться до задачі на власні значення для систем звичайних диференціальних рівнянь високого порядку за радіальною координатою, яка розв'язується стійким чисельним методом дискретної ортогоналізації сумісно з методом покрокового пошуку. Наведено результати розрахунку у випадках ортотропного та неоднорідного матеріалу циліндра для деяких типів граничних умов на його торцях.

SOLUTION OF THE PROBLEMS ON FREE TORSIONAL VIBRATIONS OF THICK-WALLED ORTHOTROPIC INHOMOGENEOUS CYLINDERS

A problem on natural torsional vibrations of anisotropic hollow cylinder under various boundary conditions on its end-faces is considered on the basis of 3D elasticity theory. A numerical-analytical approach to study the formulated problem has been proposed. The original partial equations of elasticity theory, using the spline-approximation and collocation are reduced to the problem on eigen values for the high order systems of ordinary differential equations on the radial coordinate. The problem is solved by steady-state numerical method of discrete orthogonalization with incremental search. The calculation results are presented for the case of orthotropic cylinder and inhomogeneous cylinder for different kinds of boundary conditions on its end-faces.

Ин-т механики им. С. П. Тимошенко
НАН Украины, Киев

Получено
11.07.08