УДК 513.83

Н. М. Пирч

ВІЛЬНІ ОДНОРІДНІ ПРОСТОРИ ТА ЇХНІ ПІДПРОСТОРИ

Встановлено топологічні властивості вільних однорідних просторів, а також досліджено дію функтора вільного однорідного простору на пари топологічних просторів.

1. У роботі [1] В. К. Бєльнов увів категорію однорідних просторів.

Означення 1. Трійку (Y, G, h), де Y − топологічний простір, G − топологічна група, яка ефективно і транзитивно діє на просторі Y за допомогою неперервного відображення $h : G \times Y \to Y$, називають *однорідним простором. Морфізмом* $p : (Y_1, G_1, h_1) \to (Y_2, G_2, h_2)$ однорідних просторів називають таку пару $p = (f, \psi)$, де $f : Y_1 \to Y_2$ − неперервне відображення, $\psi : G_1 \to G_2$ − неперервний гомоморфізм, що діаграма

$$\begin{array}{ccc} G_1 \times Y_1 & \xrightarrow{h_1} & Y_1 \\ \psi \times f \downarrow & & \downarrow f \\ G_2 \times Y_2 & \xrightarrow{h_2} & Y_2 \end{array}$$

є комутативною.

Морфізм p називають ізоморфізмом, якщо існує такий морфізм $p_1 : (Y_2, G_2, h_2) \to (Y_1, G_1, h_1)$, що морфізми $p \circ p_1$ і $p_1 \circ p$ є тотожними.

Нехай (Y, G, h) − однорідний простір. Підмножина $Y_0 \subseteq Y$ породжує (Y, G, h), якщо кожен морфізм $p = (f, \psi) : (Y, G, h) \to (Y, G, h)$, для якого $f(Y_0) = Y_0$ та індуковане відображення $f_0 : Y_0 \to f(Y_0) = Y_0$ є тотожним, є тотожним морфізмом.

Однорідний простір (Y_1, G_1, h_1) називають однорідним підпростором простору (Y, G, h), якщо Y_1 − підпростір в Y, G_1 − підгрупа в G, $h_1 = h|_{Y_1}$.

Означення 2. Однорідний простір (Y, G, h) називають *вільним однорідним простором* свого підпростору $X \subseteq Y$, якщо виконуються такі умови:

1°) X породжує (Y, G, h);

2°) нехай (Y_1, G_1, h_1) − довільний однорідний простір і $f_0 : X \to Y_1$ − довільне неперервне відображення. Тоді існує такий морфізм $p = (f, \psi) : (Y, G, h) \to$ $\to (Y_1, G_1, h_1)$, що $f|_X = f_0$.

Як встановлено в [1, 2], для кожного топологічного простору X існує і є єдиним з точністю до тотожного на X ізоморфізму вільний однорідний простір $H(X)$. Іноді через $H(X)$ будемо позначати також носій цього однорідного простору. Зауважимо, що природне відображення X в $H(X)$ є топологічним вкладенням [1].

Нехай $F(X)$ − абстрактна вільна група з множиною твірних X, $G(X)$ − підгрупа групи $F(X)$, породжена множиною $\{xy^{-1} \in F(X) \mid x, y \in X\}$, і $H(X) = \{gx \in F(X) \mid g \in G(X),\ x \in X\}$. Нехай X − топологічний простір. Покладаючи простір $G(X)$ дискретним, розглянемо факторвідображення $f : G(X) \times X \to H(X)$, означене як $f((g, x)) = gx$. Наділимо множину $H(X)$ фактортопологією, що індукується відображенням f. Група $G(X)$ неперервно діє на просторі $H(X)$ за допомогою відображення $h : G(X) \times H(X) \to \to H(X)$, де $h(g; a) = g \cdot a$, $g \in G(X)$, $a \in H(X)$. Трійка $(H(X), G(X), h)$ є вільним однорідним простором топологічного простору X (див. [1]).

Для спрощення позначень, множину $\{g\} \times X$ будемо позначати як $g \times X$. У роботі [2] М. Г. Мегрелішвілі встановив, що існують негомеоморфні топологічні простори з ізоморфними вільними однорідними просторами. Топологічні простори X і Y називають B-еквівалентними, якщо вільні однорідні простори $H(X)$ і $H(Y)$ є ізоморфними. У роботі [3] Н. Г. Окромешко встановлено, що кожен топологічний простір є образом носія свого вільного однорідного простору при відкритій ретракції.

Для неперервного відображення $f : X \to Y$ через $\overline{f} : H(X) \to H(Y)$ будемо позначати продовження відображення f до морфізму вільних однорідних просторів. Нагадаємо, що морфізм $\overline{f}$ – це є пара (f^*, ψ), де

$$f^*(x_1 x_2^{-1} \ldots x_{2n}^{-1} x_{2n+1}) = f(x_1) f(x_2)^{-1} \ldots f(x_{2n})^{-1} f(x_{2n+1}),$$

$$\psi(x_1 x_2^{-1} \ldots x_{2n}^{-1}) = f(x_1) f(x_2)^{-1} \ldots f(x_{2n})^{-1}$$

для всіх $x_1, x_2, \ldots, x_{2n}, x_{2n+1} \in X$.

Для топологічного простору X і його підпростору Y через $H(X;Y)$ будемо позначати однорідний підпростір у (носії) $H(X)$, «породжений» множиною Y, тобто $H(X;Y) = \{gy \in F(X) \mid g \in G(Y),\ y \in Y\}$.

2. Топологічні властивості вільних однорідних просторів. З огляду на те, що множина $H(X)$ є підмножиною вільної групи $F(X)$, то для кожного елемента $v \in H(X)$ можемо визначити довжину цього елемента $\ell(v)$. Для натурального числа n позначимо $H(X)_n = \{v \in H(X) : \ell(v) \le n\}$. Оскільки $\ell(v)$ набуває лише непарних значень, то $H(X)_{2n} = H(X)_{2n+1}$ для всіх натуральних чисел n. Аналогічно можемо визначити довжину $\ell(g)$ для кожного елемента $g \in G(X)$.

Теорема 1. *Нехай X – топологічний простір. Тоді $H(X) = \underline{\lim}\, H(X)_n$.*

Д о в е д е н н я. Розглянемо факторне відображення $f : G(X) \times X \to \to H(X)$. Нехай множина $A \subset H(X)$ така, що множина $A_n = A \bigcap H(X)_n$ замкнена в $H(X)_n$ для всіх натуральних n. Виберемо довільний елемент $g \in G(X)$. Нехай $\ell(g) = n - 1$ і $(g, h) \in f^{-1}(A)$. Тоді $\ell(g \cdot h) \le n - 1 + 1 = n$, тому $g \cdot h \in H_n \bigcap A = A_n$. Таким чином, $(g, h) \in f^{-1}(g \cdot h) \subseteq f^{-1}(A_n)$. Позначимо через f_n звуження відображення f на підмножину $f^{-1}(H(X)_n)$. Оскільки $A_n \subseteq H(X)_n$, то $f_n^{-1}(A_n) \bigcap (g \times X) = f^{-1}(A_n) \bigcap (g \times X)$. Отже, $f^{-1}(A_n) \bigcap (g \times X) = = f^{-1}(A) \bigcap (g \times X)$. За неперервністю відображення f_n маємо, що підмножина $f_n^{-1}(A_n) \bigcap (g \times X) = f^{-1}(A_n) \bigcap (g \times X) = f^{-1}(A) \bigcap (g \times X)$ є замкненою в $g \times X$. За факторністю відображення f множина A є замкненою у $H(X)$. ◊

Теорема 2. *Нехай X – T_1-простір, Y – замкнений підпростір в X. Тоді підпростір $H(X;Y)$ природно ізоморфний $H(Y)$.*

Д о в е д е н н я. Як множини простори $H(X;Y)$ і $H(Y)$ співпадають. Окрім того, вкладення $i : Y \to X$ продовжується до неперервного морфізму $\overline{i} : H(Y) \to H(X)$ однорідних просторів, при цьому $i^*(H(Y)) = H(X;Y)$. Залишається показати, що топологія простору $H(X;Y)$ є не слабшою, ніж топологія простору $H(Y)$. Нехай A − замкнена підмножина в $H(X;Y)$. Покажемо, що A є замкненою підмножиною в $H(Y)$. Позначимо через $f_X : G(X)\times \times X \to H(X)$, $f_Y : G(Y)\times Y \to H(Y)$ факторні відображення. Підмножина A буде замкненою в $H(X)$, якщо множина $f_X^{-1}(A)\bigcap(g\times X)$ буде замкненою в $g\times X$ для кожного $g\in G(X)$. Якщо $g = y_1 y_2^{-1}\dots y_{2n-1}y_{2n}^{-1}$, де $y_i\in Y$, то $f_X^{-1}(A)\bigcap(g\times X) = f_Y^{-1}(A)\bigcap(g\times Y)$. За неперервністю відображення f_Y множина $f_Y^{-1}(A)\bigcap(g\times Y)$ є замкненою у просторі $g\times Y$. Оскільки підпростір Y замкнений у просторі X, то підпростір $g\times Y$ замкнений у просторі $g\times X$. Отже, підмножина $f_X^{-1}(A)\bigcap(g\times X)$ є замкненою в $g\times X$. Якщо $g = = y_1 y_2^{-1}\dots y_{2n-1}z^{-1}$, де $y_i\in Y, z\in X\backslash Y, y_1y_2^{-1}\dots y_{2n-1}\in A$, то $f_X^{-1}(A)\bigcap(g\times X) = = g\times\{z\}$. За умовою теореми X є T_1-простором, тому кожна одноточкова множина $\{z\}$ є замкненою у X, отже, підпростір $g\times\{z\}$ замкнений у просторі $g\times X$. Для всіх решти g маємо, що $f_X^{-1}(A)\bigcap(g\times X)=\varnothing$. ◊

Твердження 1. *Нехай X − топологічний простір, Y − ретракт простору X. Тоді підпростір $H(X;Y)$ природно ізоморфний $H(Y)$.*

Д о в е д е н н я. Нехай $r : X\to Y$ − ретракція, $i : Y\to X$ − відповідне вкладення. Тоді $r\circ i = 1|_Y$, а тому $r^*\circ i^* = (1|_Y)^* = 1|_{H(Y)}$. Отже, морфізм $i^* : H(Y)\to H(X)$ є вкладенням. ◊

3. Підпростори вільних однорідних просторів.

Твердження 2. *Нехай Y є підпростором топологічного простору X. Тоді підпростір Y є ретрактом простору X тоді й тільки тоді, коли підпростір $H(X;Y)$ є ретрактом вільного однорідного простору $H(X)$.*

Д о в е д е н н я. Достатність. Нехай $r : X\to Y$ − ретракція топологічних просторів. Згідно з твердженням 1 підпростір $H(X;Y)$ природно ізоморфний $H(Y)$, отже, продовження відображення r до морфізму вільних однорідних просторів $r^* : H(X)\to H(Y)$ можемо розглядати як ретракцію $r^* : H(X)\to H(X;Y)$.

Необхідність. Нехай $\rho : H(X)\to H(X;Y)$ − ретракція однорідних просторів, $h : H(X)\to X$ − ретракція, побудована у [3]. Як випливає з конструкції ретракції h, її звуження на підпростір $H(X;Y)$ буде ретракцією $h_1 : H(X;Y)\to Y$. Композиція $h_1\circ h$ буде ретракцією з $H(X)$ на Y. Отже, звуження цієї композиції на X буде ретракцією з X на Y. ◊

Твердження 3. *Нехай Y є підпростором T_1-простору X. Тоді підпростір Y замкнений у просторі X тоді й тільки тоді, коли підпростір $H(X;Y)$ замкнений у носії вільного однорідного простору $H(X)$.*

Д о в е д е н н я. Достатність. Розглянемо факторвідображення $f : G(X)\times X\to H(X)$. Підмножина $H(X;Y)$ буде замкненою в $H(X)$, якщо множина $f^{-1}(H(X;Y))\bigcap(g\times X)$ буде замкненою в $\{g\}\times X$ для кожного $g\in \in G(X)$. Якщо $g = y_1y_2^{-1}\dots y_{2n-1}y_{2n}^{-1}$, де $y_i\in Y$, то $f^{-1}(H(X;Y))\bigcap(g\times X) = g\times Y$. Оскільки підпростір Y замкнений у просторі X, то підпростір $g\times Y$ замкнений у просторі $g\times X$. Якщо $g = y_1y_2^{-1}\dots y_{2n-1}z^{-1}$, де $y_i\in Y$, $z\in X\backslash Y$, то

$f^{-1}(H(X;Y)) \bigcap (g \times X) = g \times \{z\}$. За умовою X є T_1-простором, тому кожна одноточкова множина $\{z\}$ є замкненою в X, отже, підпростір $g \times \{z\}$ замкнений у просторі $g \times X$. Для всіх решти g маємо, що $f^{-1}(H(X;Y)) \bigcap (g \times X) = \varnothing$.

Необхідність. Оскільки $Y = H(X;Y) \bigcap X$, а $H(X;Y)$ є замкненою множиною $H(X)$, то Y є замкненою множиною в X. ◊

Твердження 4. *Нехай Y є підпростором T_1-простору X. Підпростір Y є множиною типу F_σ у просторі X тоді й тільки тоді, коли підпростір $H(X;Y)$ є множиною типу F_σ у вільному однорідному просторі $H(X)$.*

Д о в е д е н н я. *Достатність.* Нехай $Y = \bigcup_{i=1}^{\infty} V_i$, де V_i − замкнена підмножина в X. Позначимо $B_n = \bigcup_{i=1}^{n} V_i$. Тоді кожна підмножина B_n є замкненою в X і $Y = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$. Оскільки $H(X;Y) = \bigcup_{i=1}^{\infty} H(X;B_i)$ і кожна підмножина $H(X;B_i)$ замкнена в $H(X)$, то $H(X;Y)$ є множиною типу F_σ у $H(X)$.

Необхідність. Оскільки $Y = H(X;Y) \bigcap X$, а $H(X;Y)$ є множиною типу F_σ у $H(X)$, то Y є F_σ-множиною в X. ◊

Для підмножини A топологічного простору X позначимо $cl_\omega(A) = \bigcup\{\overline{B} : B \subseteq A,\ |B| \le \omega\}$. Говоримо, що підмножина A є ω-замкненою в X, якщо $c\ell_\omega(A) = A$.

Доведення наступного твердження є аналогічним до доведення подібного твердження для вільних топологічних груп, запропонованого в роботі [4].

Твердження 5. *Нехай Y є підпростором T_1-простору X. Підпростір Y є ω-замкненим у просторі X тоді й тільки тоді, коли підпростір $H(X;Y)$ є ω-замкненим у вільному однорідному просторі $H(X)$.*

Д о в е д е н н я. *Достатність.* Нехай C − зліченна підмножина простору $H(X;Y)$. Тоді множина D всіх букв, що зустрічаються у елементах множини C є зліченною підмножиною в Y. Із ω-замкненості підмножини Y у просторі X випливає, що множина K, яка є замиканням множини D у просторі X є також підмножиною Y. За твердженням 2 однорідний підпростір $H(X;K)$ є замкненим у $H(X)$. Зауважимо, що $C \subseteq H(X;K)$, отже, замикання множини C у просторі $H(X)$ міститься в $H(X;K) \subseteq H(X;Y)$.

Необхідність. Оскільки $Y = H(X;Y) \bigcap X$, а $H(X;Y)$ є ω-замкненою множиною в $H(X)$, то Y є ω-замкненою множиною в X. ◊

Під парою топологічних просторів (X,Y) будемо розуміти топологічний простір X і його підпростір Y.

Означення 3. Говоримо, що пара топологічних просторів (X,A) є B-*еквівалентною* парі топологічних просторів (Y,B), якщо існує ізоморфізм $p : H(X) \to H(Y)$ такий, що $p(H(X;A)) = H(Y;B)$.

Наслідок 1. *Властивості бути замкненою множиною, множиною типу F_σ, ω-замкненою множиною, властивість бути ретрактом зберігаються* B-*еквівалентністю пар у класі T_1-просторів.*

Твердження 6. *Нехай* X – *топологічний простір,* $a, b \in X$. *Тоді пара топологічних просторів* $(X, \{a\})$ *є В-еквівалентною парі топологічних просторів* $(X, \{b\})$.

Д о в е д е н н я. Зауважимо, що $(X, \{a\}) = \{a\}$ і $(X, \{b\}) = \{b\}$. Розглянемо неперервні відображення $f, h : H(X) \to H(X)$, означені як $f(g) = ba^{-1}g$, $h(g) = ab^{-1}g$. Нехай $\psi = 1_{G(X)}$ – тотожний ізоморфізм групи $G(X)$. Морфізми $p = (f, \psi)$ і $p_1 = (h, \psi)$ є взаємно оберненими. Тобто p є автоморфізмом однорідного простору $H(X)$ таким, що $p(a) = b$. ◊

Приклад 1. Нехай X – тихоновський куб ваги континуум $a \in X$, $b \notin X$ і $Y = X + \{b\}$. Тоді пари $(Y, \{a\})$ і $(Y, \{b\})$ є В-еквівалентними.

Наслідок 2. *Властивості бути відкритою, відкрито-замкненою, ніде не щільною, функціонально відкритою, функціонально замкненою,* G_δ-*множиною не зберігаються В-еквівалентністю пар у класі* T_1-*просторів.*

1. *Бельнов В. К.* Размерность топологически однородных пространств и свободные однородные пространства // Докл. АН СССР. – 1978. – **238**, № 4. – С. 781–784.
2. *Мегрелишвили М. Г.* Топологические пространства с изоморфными свободными однородными пространствами // Сообщ. АН Груз. ССР. – 1981. – **103**, № 3. – С. 549–552.
3. *Окромешко Н. Г.* О ретракциях однородных пространств // Докл. АН СССР. – 1983. – **268**, № 3. – С. 547–551.
4. *Dikranjan D., Tkachenko M.* Weakly complete free topological groups // Topol. Appl. – 2001. – **112**. – P. 259–287.

СВОБОДНЫЕ ОДНОРОДНЫЕ ПРОСТРАНСТВА И ИХ ПОДПРОСТРАНСТВА

Установлены топологические свойства свободных однородных пространств, а также исследовано действие функтора свободного однородного пространства на пары топологических пространств.

FREE HOMOGENEOUS SPACES AND THEIR SUBSPACES

In the paper the topological properties of free homogeneous spaces are considered and action of the functor of free homogeneous space on the pairs of topological spaces is investigated.

Укр. акад. друкарства, Львів

Одержано
21.04.07