УДК 519.6

С. М. Шахно

ПРО ДВОКРОКОВИЙ ІТЕРАЦІЙНИЙ ПРОЦЕС В УЗАГАЛЬНЕНИХ УМОВАХ ЛІПШИЦЯ ДЛЯ ПОДІЛЕНИХ РІЗНИЦЬ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

Проведено дослідження двокрокового ітераційного методу ньютонівського типу, який використовує апроксимацію похідної Фреше нелінійного оператора поділеними різницями. Вивчено локальну збіжність методу в умовах, коли перші поділені різниці задовольняють узагальнені умови Ліпшиця. Встановлено умови та швидкість збіжності цього методу, знайдено область єдиності розв'язку рівняння.

1. Вступ. Нехай F – нелінійний оператор, визначений на опуклій множині D банахового простору X зі значеннями в банаховому просторі Y. Для розв'язування рівняння

$$F(x) = 0 \tag{1}$$

широко використовують ітераційно-різницеві методи. Перевагою цих методів є те, що вони використовують у своїх ітераційних формулах тільки значення нелінійного оператора і не вимагають аналітично заданих похідних. Найпростішим методом такого типу є метод хорд [3–6]

$$x_{n+1} = x_n - [F(x_n, x_{n-1})]^{-1} F(x_n), \qquad n = 0, 1, \ldots, \tag{2}$$

де $F(u, v)$ – поділена різниця оператора F за точками u та v [6]; x_0, x_{-1} – початкові значення. Однак метод хорд збігається до розв'язку зі швидкістю з порядком $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$.

У працях [1, 7, 9] досліджено ітераційний різницевий метод з порядком збіжності $1+\sqrt{2}$:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - [F(x_n, y_n)]^{-1} F(x_n), \\ y_{n+1} &= x_{n+1} - [F(x_n, y_n)]^{-1} F(x_{n+1}), \qquad n = 0, 1, \ldots, \end{aligned} \tag{3}$$

де x_0 і y_0 – задані початкові значення. Його природно вважати двокроковою модифікацією саме методу хорд (2), а не методу Ньютона [2, 3], у якій замість значення x_{n-1} з попередньої ітерації беруть допоміжну точку y_n, обчислену подібним чином. Зауважимо, що методи (2) і (3) вимагають двох різних початкових наближень.

У статті [1] при дослідженні методу (3) автори вимагали існування і обмеженості поділених різниць другого порядку, а в [9] – виконання умови Ліпшиця для других похідних від нелінійного оператора. У праці [7] досліджено метод (3) за слабших вимог до оператора, а саме: за умови, що поділені різниці першого порядку оператора F задовольняють умову Гельдера зі сталою Гельдера.

У праці [8] для дослідження методу Ньютона введено узагальнені умови Ліпшиця для оператора похідної, в яких замість сталої Ліпшиця використано деяку додатну інтегровну функцію.

У цій праці введено аналогічні узагальнені умови Ліпшиця для оператора поділеної різниці першого порядку і при цих умовах досліджено збіжність методу (3). Зазначимо, що умова Ліпшиця з константою Ліпшиця є частковим випадком відповідної узагальненої умови Ліпшиця, а з отриманих нижче результатів випливають вже відомі теоретичні твердження.

2. Звичайні та узагальнені умови Ліпшиця для поділених різниць. Наведемо означення поділених різниць першого порядку від оператора F та умов Ліпшиця для поділених різниць першого порядку.

Нехай F – нелінійний оператор, визначений на підмножині D лінійного простору X зі значеннями в лінійному просторі Y, і x, y – дві фіксовані точки з D. Обмежений лінійний оператор $F(x,y)$ називається поділеною різницею від F за точками x і y, якщо він задовольняє умову

$$F(x,y)(x-y) = F(x) - F(y). \tag{4}$$

У випадку $x = y$ будемо вважати $F(x,x) = F'(x)$, де F' – похідна Фреше нелінійного оператора F.

Умову на оператор поділеної різниці $F(x,y)$

$$\|F(x,y) - F(u,v)\| \le L(\|x-u\| + \|y-v\|) \qquad \forall x,y,u,v \in D \tag{5}$$

називають умовою Ліпшиця в області D зі сталою Ліпшиця L.

Позначимо через $B(x_0,r) = \{x : \|x - x_0\| < r\}$ кулю радіуса r з центром в точці x_0.

Якщо виконується умова

$$\|F(x,y) - F'(x_0)\| \le L(\|x - x_0\| + \|y - x_0\|) \qquad \forall x,y \in B(x_0,r), \tag{6}$$

то її називаємо центральною умовою Ліпшиця в кулі $B(x_0,r)$ зі сталою L.

Якщо виконується умова

$$\left\|F'(x_0)^{-1}F(x,x_0) - I\right\| \le L\|x - x_0\| \qquad \forall x \in B(x_0,r), \tag{7}$$

то її називаємо радіальною умовою Ліпшиця в кулі $B(x_0,r)$ зі сталою L.

Умови (5)–(7) називатимемо звичайними умовами Ліпшиця.

Однак L в умовах Ліпшиця не обов'язково має бути сталою, а може бути додатною інтегровною функцією. У цьому разі умови (5)–(7) замінюються відповідно на

$$\|F(x,y) - F(u,v)\| \le \int_0^{\|x-u\|+\|y-v\|} L(z)\,dz \qquad \forall x,y,u,v \in D, \tag{8}$$

$$\|F(x,y) - F'(x_0)\| \le \int_0^{\|x-x_0\|+\|y-x_0\|} L(z)\,dz \qquad \forall x,y \in B(x_0,r), \tag{9}$$

та

$$\left\|F'(x_0)^{-1}F(x,x_0) - I\right\| \le \int_0^{\|x-x_0\|} L(z)\,dz \qquad \forall x \in B(x_0,r). \tag{10}$$

Одночасно умови (8)–(10) називаємо відповідними узагальненими умовами Ліпшиця або умовами Ліпшиця з L в середньому.

Використовуючи теорему Банаха про обернений оператор, можемо отримати безпосередньо наступний результат.

Лема 1. *Нехай існує* $F'(x^*)^{-1}$, F *має поділені різниці* $F(x,y)$ *в кулі* $B(x^*,r)$, *які задовольняють центральну умову Ліпшиця з* L *у середньому*

$$\left\|F'(x^*)^{-1}F(x,y) - I\right\| \le \int_0^{\rho(x)+\rho(y)} L(u)\,du \qquad \forall x,y \in B(x^*,r),$$

де $\rho(x) = \left\|x - x^*\right\|$ *і* L *– додатна інтегровна функція. Нехай* r *задовольняє нерівність*

$$\int_0^{2r} L(u)\,du \le 1.$$

Тоді поділена різниця $F(x,y)$ оборотна в цій кулі і

$$\left\|F(x,y)^{-1}F'(x^*)\right\| \le \left(1-\int_0^{\rho(x)+\rho(y)} L(u)\,du\right)^{-1}.$$

Д о в е д е н н я. Справді,

$$\left\|F(x,y)^{-1}F'(x^*)\right\| = \left\|\left\{I-\left(I-F'(x^*)^{-1}F(x,y)\right)\right\}^{-1}\right\| \le$$

$$\le \left(1-\int_0^{\rho(x)+\rho(y)} L(u)\,du\right)^{-1}. \qquad \Diamond$$

3. Локальна збіжність методу (3). Результати дослідження умов і швидкості збіжності методу наведено в такій теоремі.

Теорема 1. *Нехай F − нелінійний оператор, визначений на відкритій опуклій множині D банахового простору X зі значеннями у банаховому просторі Y. Припустимо, що*:

(***i***) *рівняння $F(x)=0$ має розв'язок $x^* \in B(x^*,r) \subset D$, існує похідна Фреше $F'(x^*)$ і вона є оборотною;*

(***ii***) *F має поділені різниці $F(x,y)$ в $B(x^*,r)$, які задовольняють центральну умову Ліпшиця з L в середньому*

$$\left\|F'(x^*)^{-1}\left(F(x^*,x^*)-F(x,y)\right)\right\| \le \int_0^{\rho(x)+\rho(y)} L(u)\,du, \tag{11}$$

де $x,y \in B(x^*,r)$, $\rho(x)=\left\|x-x^*\right\|$ і L − неспадна функція;

(***iii***) *r задовольняє нерівність*

$$\frac{\int_0^{3r} L(u)\,du}{1-\int_0^{2r} L(u)\,du} \le 1. \tag{12}$$

Тоді метод (3) *збігається для всіх $x_0, y_0 \in B(x^*,r)$ таких, що $\rho(y_0) <$ $< \rho(x_0)$, і для $n=0,1,\ldots$*

$$\left\|x_{n+1}-x^*\right\| \le \frac{\int_0^{\rho(y_n)} L(u)\,du\,\rho(x_n)}{1-\int_0^{\rho(x_n)+\rho(y_n)} L(u)\,du} \le \frac{q_1}{\rho(x_0)}\rho(x_n)\rho(y_n), \tag{13}$$

$$\left\|y_{n+1}-x^*\right\| \le \frac{\int_0^{\|x_{n+1}-x_n\|+\rho(y_n)} L(u)\,du\,\rho(x_{n+1})}{1-\int_0^{\rho(x_n)+\rho(y_n)} L(u)\,du} \le \frac{q_2}{\rho(x_1)}\rho(x_{n+1})\rho(x_n), \tag{14}$$

де величини

$$q_1 = \frac{\int_0^{\rho(x_0)} L(u)\,du}{1-\int_0^{\rho(x_0)+\rho(y_0)} L(u)\,du}, \qquad q_2 = \frac{\int_0^{\rho(x_1)+\rho(x_0)+\rho(y_0)} L(u)\,du}{1-\int_0^{\rho(x_0)+\rho(y_0)} L(u)\,du} \tag{15}$$

менші від 1.

Д о в е д е н н я. Виберемо довільно $x_0, y_0 \in B(x^*, r)$, де r задовольняє нерівність (12). Тоді q_1 і q_2, визначені за (15), менші від 1. Справді, за монотонності L отримаємо

$$\left(\frac{1}{t_2}\int_0^{t_2} - \frac{1}{t_1}\int_0^{t_1}\right) L(u)\,du = \left(\frac{1}{t_2}\int_{t_1}^{t_2} + \left(\frac{1}{t_2} - \frac{1}{t_1}\right)\int_0^{t_1}\right) L(u)\,du \ge$$

$$\ge L(t_1)\left(\frac{1}{t_2}\int_{t_1}^{t_2} + \left(\frac{1}{t_2} - \frac{1}{t_1}\right)\int_0^{t_1}\right) du = L(t_1)\left(\frac{t_2 - t_1}{t_2} + t_1\left(\frac{1}{t_2} - \frac{1}{t_1}\right)\right) = 0$$

для $0 < t_1 < t_2$. Отже, функція $\frac{1}{t}\int_0^t L(u)\,du$ є неспадною відносно t.

Тепер маємо

$$q_1 = \frac{\int_0^{\rho(y_0)} L(u)\,du}{\rho(y_0)\left(1 - \int_0^{\rho(x_0)+\rho(y_0)} L(u)\,du\right)}\rho(y_0) \le \frac{\int_0^{r} L(u)\,du}{r\left(1 - \int_0^{2r} L(u)\,du\right)}\rho(y_0) \le$$

$$\le \frac{\left\| y_0 - x^* \right\|}{r} < 1,$$

$$q_2 = \frac{\int_0^{\rho(x_0)+\rho(x_1)+\rho(y_0)} L(u)\,du}{\left(\rho(x_0) + \rho(x_1) + \rho(y_0)\right)\left(1 - \int_0^{\rho(x_0)+\rho(y_0)} L(u)\,du\right)}\left(\rho(x_0) + \rho(x_1) + \rho(y_0)\right) \le$$

$$\le \frac{\int_0^{3r} L(u)\,du}{3r\left(1 - \int_0^{2r} L(u)\,du\right)}\left(\rho(x_0) + \rho(x_1) + \rho(y_0)\right) \le$$

$$\le \frac{\rho(x_0) + \rho(x_1) + \rho(y_0)}{3r} < 1.$$

Уведемо позначення $A_n = F(x_n, y_n)$. Очевидно, якщо $x_n, y_n \in B(x^*, r)$, то оператор A_n є оборотним і виконується нерівність

$$\left\| A_n^{-1} F'(x_*) \right\| \le \frac{1}{1 - \int_0^{\rho(x_n)+\rho(y_n)} L(u)\,du}. \tag{16}$$

Дійсно, з використанням формули (11) отримаємо

$$\left\| I - F'(x^*)^{-1} A_n \right\| = \left\| F'(x^*)^{-1}\left(F(x^*, x^*) - F(x_n, y_n)\right) \right\| \le \int_0^{\rho(x_n)+\rho(y_n)} L(u)\,du. \tag{17}$$

Враховуючи тотожність

$$\left\| \left[I - \left(I - F'(x^*)^{-1} A_n\right) \right]^{-1} \right\| = \left\| A_n^{-1} F'(x^*) \right\|$$

і нерівність (17), за теоремою Банаха отримаємо (16).

Тепер з (3) можна записати

$$\left\|x_{n+1}-x^*\right\| = \left\|x_n - x^* - A_n^{-1}\left(F(x_n)-F(x^*)\right)\right\| =$$
$$= \left\|- A_n^{-1}\left(F(x_n,x^*)-A_n\right)(x_n-x^*)\right\| \le$$
$$\le \left\|A_n^{-1}F'(x^*)\right\|\left\|F'(x^*)^{-1}\left(F(x_n,x^*)-A_n\right)\right\|\left\|x_n-x^*\right\|. \qquad (18)$$

Згідно з умовами теореми маємо

$$\left\|F'(x^*)^{-1}\left(F(x_n,x^*)-A_n\right)\right\| = \left\|F'(x^*)^{-1}\left(F(x_n,x^*)-F(x_n,y_n)\right)\right\| \le$$
$$\le \int_0^{\rho(y_n)} L(u)\,du .$$

З (18), враховуючи (16), (17), отримуємо першу нерівність з (13).

Аналогічно з рівності

$$y_{n+1}-x^* = x_{n+1}-x^* - A_n^{-1}\left(F(x_{n+1})-F(x^*)\right) =$$
$$= - A_n^{-1}\left(F(x_{n+1},x^*)-A_n\right)(x_{n+1}-x^*) =$$
$$= - A_n^{-1}F'(x^*)\left[F'(x^*)^{-1}\left(F(x_{n+1},x^*)-F(x_n,y_n)\right)\right](x_{n+1}-x^*)$$

отримуємо першу нерівність з (14).

Взявши $n=0$ в (13), (14), отримуємо

$$\left\|x_1-x^*\right\| \le q_1\left\|y_0-x^*\right\| < \left\|y_0-x^*\right\| < \left\|x_0-x^*\right\| < r ,$$
$$\left\|y_1-x^*\right\| \le q_2\left\|x_1-x^*\right\| < \left\|x_1-x^*\right\| < r .$$

Отже, $x_1,\, y_1 \in B(x^*,r)$. Це показує, що (3) можна продовжити нескінченну кількість разів. За математичною індукцією, всі $\{x_n\}_{n\ge0}$ і $\{y_n\}_{n\ge0}$ належать $B(x^*,r)$ і $\rho(x_n)$, $\rho(y_n)$ монотонно спадають. Тому для всіх $n=0,1,\ldots$ маємо

$$\left\|x_{n+1}-x^*\right\| \le \frac{\int_0^{\rho(y_n)} L(u)\,du}{\rho(y_n)\left(1-\int_0^{\rho(x_0)+\rho(y_0)} L(u)\,du\right)}\rho(y_n)\rho(x_n) \le$$
$$\le \frac{\int_0^{\rho(y_0)} L(u)\,du}{\rho(y_0)\left(1-\int_0^{2r} L(u)\,du\right)}\rho(y_n)\rho(x_n) = \frac{q_1}{\rho(y_0)}\rho(y_n)\rho(x_n) ,$$

$$\left\|y_{n+1}-x^*\right\| \le \frac{\int_0^{\rho(x_{n+1})+\rho(x_n)+\rho(y_n)} L(u)\,du}{\left(\rho(x_{n+1})+\rho(x_n)+\rho(y_n)\right)\left(1-\int_0^{\rho(x_n)+\rho(y_n)} L(u)\,du\right)}\times$$
$$\times\rho(x_{n+1})\left(\rho(x_{n+1})+\rho(x_n)+\rho(y_n)\right) \le$$
$$\le \frac{\int_0^{\rho(x_1)+\rho(x_0)+\rho(y_0)} L(u)\,du}{\left(\rho(x_1)+\rho(x_0)+\rho(y_0)\right)\left(1-\int_0^{\rho(x_0)+\rho(y_0)} L(u)\,du\right)}\times$$
$$\times\rho(x_{n+1})\left(\rho(x_{n+1})+\rho(x_n)+\rho(y_n)\right) \le \frac{q_2}{\rho(x_1)}\rho(x_{n+1})\rho(x_n) .$$

Отже, справджуються праві частини нерівностей (13) і (14).

Теорему доведено. ◊

Наслідок 1. *Ітераційний процес* (3) *збігається до нуля функції* F *принаймні з порядком* $1+\sqrt{2}$.

Д о в е д е н н я. Позначимо тепер

$$a_n = \left\| x_n - x^* \right\|, \quad b_n = \left\| y_n - x^* \right\|, \quad n = 0,1,2,\ldots, \quad C = \frac{q_1 q_2}{\rho(x_0)\rho(x_1)}.$$

З оцінок (13), (14) для $n = 0,1,2,\ldots$ отримуємо

$$a_{n+1} \le \frac{q_1}{\rho(x_0)} a_n b_n, \qquad b_{n+1} \le \frac{q_2}{\rho(x_1)} a_{n+1} a_n. \tag{19}$$

Із (19) випливає, що для $n = 1,2,\ldots$ справджуються нерівності

$$a_{n+1} \le \frac{q_1}{\rho(x_0)} a_n \frac{q_2}{\rho(x_1)} a_n a_{n-1} = \frac{q_1 q_2}{\rho(x_0)\rho(x_1)} a_n^2 a_{n-1} = C a_n^2 a_{n-1}, \tag{20}$$

тобто

$$\left\| x_{n+1} - x^* \right\| \le C \left\| x_n - x^* \right\|^2 \left\| x_{n-1} - x^* \right\|.$$

Із цієї нерівності отримуємо рівняння для визначення порядку збіжності методу (3):

$$t^2 - 2t - 1 = 0.$$

Єдиний додатний корінь цього рівняння $t^* = 1+\sqrt{2}$ і є порядком збіжності методу. ◊

4. Область єдиності розв'язку.

Теорема 2. *Нехай* $F(x^*) = 0$, *існує* $F'(x^*)^{-1}$, F *має поділені різниці* $F(x, x^*)$ *в* $B(x^*, r)$, *які задовольняють радіальну умову Ліпшиця з* L *в середньому*

$$\left\| F'(x^*)^{-1} F(x, x^*) - I \right\| \le \int_0^{\rho(x)} L(u)\, du \qquad \forall x \in B(x^*, r), \tag{21}$$

де $\rho(x) = \left\| x - x^* \right\|$ *і* L *– додатна інтегровна функція. Нехай* r *задовольняє нерівність*

$$\int_0^r L(u)\, du \le 1.$$

Тоді рівняння (1) *має єдиний розв'язок* x^* *в* $B(x^*, r)$.

Д о в е д е н н я. Припустимо, що $x_0 \in B(x^*, r)$, $x_0 \ne x^*$, – також розв'язок рівняння (1). Тоді маємо $F'(x^*)^{-1} F(x_0) = 0$. Отже,

$$\begin{aligned} x_0 - x^* &= x_0 - x^* - F'(x^*)^{-1} F(x_0) = \\ &= F'(x^*)^{-1} \left[F'(x^*)(x_0 - x^*) - F(x_0) + F(x^*) \right] = \\ &= F'(x^*)^{-1} \left[F'(x^*) - F(x_0, x^*) \right](x_0 - x^*) = \\ &= \left[I - F'(x^*)^{-1} F(x_0, x^*) \right](x_0 - x^*). \end{aligned}$$

З радіальної умови Ліпшиця в середньому для поділених різниць (21) отримаємо

$$\left\|x_0 - x^*\right\| \le \left\|I - F'(x^*)^{-1} F(x_0, x^*)\right\| \left\|x_0 - x^*\right\| \le$$

$$\le \int\limits_0^{\rho(x_0)} L(u)\, du \left\|x_0 - x^*\right\| < \int\limits_0^{r} L(u)\, du \left\|x_0 - x^*\right\| \le \left\|x_0 - x^*\right\|.$$

Це суперечить нашому припущенню. Таким чином, звідси випливає, що $x_0 = x^*$. Теорему доведено. ◊

Поклавши, що L є константою, з теорем 1 і 2 отримуємо безпосередньо такі наслідки.

Наслідок 2. *Припустимо, що* x^* *задовольняє* (1), *існує похідна Фреше* $F'(x^*)$, *яка є оборотною, і нехай* F *має поділені різниці* $F(x, y)$ *в* $B(x^*, r)$, *які задовольняють центральну умову Ліпшиця*

$$\left\|F'(x^*)^{-1}\big(F(x^*, x^*) - F(x, y)\big)\right\| \le L\big(\left\|x - x^*\right\| + \left\|y - x^*\right\|\big)$$

для всіх $x, y \in B(x^*, r)$, L *– додатне число і* $r = \dfrac{1}{5L}$.

Тоді метод (3) *збігається для всіх* $x_0, y_0 \in B(x^*, r)$ *таких, що* $\rho(y_0) < \rho(x_0)$, *і*

$$\left\|x_{n+1} - x^*\right\| \le \frac{q_1}{\rho(x_0)} \rho(x_n)\rho(y_n), \qquad \left\|y_{n+1} - x^*\right\| \le \frac{q_2}{\rho(x_1)} \rho(x_{n+1})\rho(x_n),$$

де величини

$$q_1 = \frac{L\rho(x_0)}{1 - L\big(\rho(x_0) + \rho(y_0)\big)}, \qquad q_2 = \frac{L\big(\rho(x_1) + \rho(x_0) + \rho(y_0)\big)}{1 - L\big(\rho(x_0) + \rho(y_0)\big)}$$

менші від 1, $\rho(x) = \left\|x - x^*\right\|$, $n = 0, 1, \ldots$.

Наслідок 3. *Припустимо, що* x^* *задовольняє* (1), $F(x^*) = 0$, *існує похідна Фреше* $F'(x^*)$, *яка є оборотною, і нехай* F *має поділені різниці* $F(x, x^*)$ *в* $B(x^*, r)$, *які задовольняють радіальну умову Ліпшиця*

$$\left\|F'(x^*)^{-1}\big(F(x, x^*) - F(x^*, x^*)\big)\right\| \le L\left\|x - x^*\right\|$$

для всіх $x \in B(x^*, r)$, L *– додатне число та* $r = \dfrac{1}{L}$.

Тоді рівняння (1) *має єдиний розв'язок у відкритій кулі* $B(x^*, r)$. *Більше того, радіус кулі* r *залежить тільки від* L.

5. Висновки. Отже, в цій праці введено узагальнені умови Ліпшиця для поділених різниць першого порядку від нелінійного оператора. При цих умовах вивчено збіжність двокрокового ітераційного методу розв'язування нелінійних операторних рівнянь, отримано умови та оцінки збіжності ітераційного процесу. Знайдено область єдиності розв'язку нелінійного рівняння. Як часткові випадки отримано результати для випадку звичайних умов Ліпшиця.

1. *Бартіш М. Я., Щербина Ю. М.* Про один різницевий метод розв'язування нелінійних операторних рівнянь // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1972. – № 7. – С. 579–582.
2. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. – Москва: Наука, 1984. – 752 с.
3. *Ортега Дж., Рейнболдт В.* Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. – Москва: Мир, 1975. – 558 с.

4. *Шахно С. М.* Застосування нелінійних мажорант для дослідження методу хорд розв'язування нелінійних рівнянь // Мат. студії. – 2004. – **22**. – С. 79–86.
5. *Шахно С., Макух О.* Локальна збіжність ітераційно-різницевих методів розв'язування нелінійних операторних рівнянь // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. Прикл. математика та інформатика. – 2003. – Вип. 7. – С. 124–131.
6. *Argyros I. K.* On an iterative algorithm for solving nonlinear operator equations // Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen. – 1991. – **10**, No. 1. – P. 83–92.
7. *Shakhno S. M.* Method of order $1+\sqrt{2}$ for the solution of nonlinear equations with Hölder continuous divided differences // Proc. Appl. Math. Mech. – 2005. – **5**. – P. 779–780.
8. *Wang X.* Convergence of Newton's mehod and uniquiness of the solution of equations in Banach space // IMA. J. Numer. Anal. – 2000. – **20**. – P. 123–134.
9. *Werner W.* Über ein Verfahren der Ordnung $1+\sqrt{2}$ zur Nullstellenbestimmung // Numer. Math. – 1979. – **32**. – S. 333–342.

О ДВУХШАГОВОМ ИТЕРАЦИОННОМ ПРОЦЕССЕ В ОБОБЩЕННЫХ УСЛОВИЯХ ЛИПШИЦА ДЛЯ РАЗДЕЛЕННЫХ РАЗНОСТЕЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Исследован двухшаговый итерационный метод ньютоновского типа для решения нелинейных операторных уравнений, использующий аппроксимацию производной Фреше оператора нелинейного уравнения разделенными разностями. Изучена локальная сходимость метода в условиях, когда первые разделенные разности удовлетворяют обобщенным условиям Липшица. Определены условия и скорость сходимости этого метода, найдена область единственности решения уравнения.

ON TWO-STEP ITERATIVE PROCESS UNDER GENERALIZED LIPSCHITZ CONDITIONS FOR THE FIRST ORDER DIVIDED DIFFERENCES

A two-step iterative method of the Newton type for solving the nonlinear operator equations using approximation of the Frechet derivative of nonlinear operator by divided differences is investigated. Local convergence of the method under conditions that the first order divided differences satisfy the generalized Lipschitz conditions is studied. The conditions and speed of convergence of this method are determined, the domain of uniqueness of equation's solution is found.

Львів. нац. ун-т ім. Івана Франка, Львів

Одержано
23.07.07