УДК 517.9: 537.8

Д. Б. Куриляк

РОЗВ'ЯЗОК ОДНОГО КЛАСУ СИСТЕМ ПАРНИХ СУМАТОРНИХ РІВНЯНЬ ДЛЯ ПРИЄДНАНИХ ФУНКЦІЙ ЛЕЖАНДРА

Отримано в аналітичному вигляді розв'язки одного класу систем парних суматорних рівнянь для приєднаних функцій Лежандра з дробовими індексами. Такі рівняння виникають при вивченні взаємодії векторних електромагнітних полів з круговим краєм провідного відкритого конуса у низькочастотній області. Виведено формули перерозкладу функцій Лежандра, які застосовано для переходу від суматорних рівнянь до нескінченних систем лінійних алгебраїчних рівнянь, що містять матричні оператори типу згортки. Обернені до них оператори використано для знаходження розв'язку у необхідному класі послідовностей. Наведено приклад визначення ефекту взаємодії ТМ- і ТЕ-хвиль з краєм скінченного конуса.

Для розв'язання змішаних крайових задач скалярних теорій потенціалу і дифракції за наявності фрагментів канонічних поверхонь часто застосовують метод парних суматорних рівнянь, який ґрунтується на поданні розв'язків рядами власних функцій виділених підобластей і використанні властивості їх ортогональності [1, 3, 4, 6–9]. Застосування цього підходу до розв'язання систем парних суматорних рівнянь векторних задач теорії дифракції зіштовхується із проблемою врахування взаємовпливу потенціалів [10]. У цій праці виділено клас взаємозв'язаних рівнянь для приєднаних функцій Лежандра з дробовими нижніми індексами та побудовано їх розв'язки в аналітичному вигляді. У часткових випадках ці рівняння описують дифракцію векторних електромагнітних полів на фрагментах металевих конічних поверхонь у низькочастотному діапазоні.

Запишемо найпростішу систему суматорних рівнянь такого типу у вигляді

$$
\underset{0\le\theta\le\pi}{\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N} x_n P^m_{z_n-1/2}(\cos\theta) + b_j P^m_{z_j-1/2}(\cos\theta)} =
$$

$$
= \begin{cases} x_0^{(1)}\operatorname{tg}^m\left(\dfrac{\theta}{2}\right) + \lim\limits_{P\to\infty}\sum\limits_{p=1}^{P} y_p^{(1)} P^m_{\nu_p-1/2}(\cos\theta), & \theta\in[0,\gamma), \\ x_0^{(2)}\operatorname{ctg}^m\left(\dfrac{\theta}{2}\right) + \lim\limits_{K\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{K} y_k^{(2)} P^m_{\mu_k-1/2}(-\cos\theta), & \theta\in(\gamma,\pi], \end{cases}
$$

$$
\underset{0\le\theta\le\pi}{\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N} x_n z_n P^m_{z_n-1/2}(\cos\theta) - b_j z_j P^m_{z_j-1/2}(\cos\theta)} =
$$

$$
= \begin{cases} X_0^{(1)}\operatorname{tg}^m\left(\dfrac{\theta}{2}\right) - \lim\limits_{P\to\infty}\sum\limits_{p=1}^{P} y_p^{(1)} \nu_p P^m_{\nu_p-1/2}(\cos\theta), & \theta\in[0,\gamma), \\ X_0^{(2)}\operatorname{ctg}^m\left(\dfrac{\theta}{2}\right) - \lim\limits_{K\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{K} y_k^{(2)} \mu_k P^m_{\mu_k-1/2}(-\cos\theta), & \theta\in(\gamma,\pi], \end{cases} \tag{1}
$$

$$
\underset{0\le\theta\le\pi}{\lim_{\tilde N\to\infty}\sum_{n=1}^{\tilde N} \tilde x_n P^m_{z_n-1/2}(\cos\theta) + \tilde b_j P^m_{z_j-1/2}(\cos\theta)} =
$$

$$
= \begin{cases} \tilde x_0^{(1)}\operatorname{tg}^m\left(\dfrac{\theta}{2}\right) + \lim\limits_{\tilde P\to\infty}\sum\limits_{p=1}^{\tilde P} \tilde y_p^{(1)} P^m_{\sigma_p-1/2}(\cos\theta), & \theta\in[0,\gamma), \\ \tilde x_0^{(2)}\operatorname{ctg}^m\left(\dfrac{\theta}{2}\right) + \lim\limits_{\tilde K\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{\tilde K} \tilde y_k^{(2)} P^m_{\lambda_k-1/2}(-\cos\theta), & \theta\in(\gamma,\pi], \end{cases}
$$

$$\lim_{\bar N\to\infty}\sum_{n=1}^{\bar N}\tilde x_n z_n P^m_{z_n-1/2}(\cos\theta)-\tilde b_j z_j P^m_{z_j-1/2}(\cos\theta)\underset{0\le\theta\le\pi}{=}$$

$$=\begin{cases}\tilde X_0^{(1)}\mathrm{tg}^m\left(\dfrac{\theta}{2}\right)-\lim\limits_{\bar P\to\infty}\sum\limits_{p=1}^{\bar P}\tilde y_p^{(1)}\sigma_p P^m_{\sigma_p-1/2}(\cos\theta), & \theta\in[0,\gamma),\\ \tilde X_0^{(2)}\mathrm{ctg}^m\left(\dfrac{\theta}{2}\right)-\lim\limits_{\bar K\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{\bar K}\tilde y_k^{(2)}\lambda_k P^m_{\lambda_k-1/2}(-\cos\theta), & \theta\in(\gamma,\pi].\end{cases}\qquad(2)$$

Тут $N=P+K-1$, $\bar N=\bar P+\bar K-1$ – параметри редукції; $\{x_n\}_{n=1}^N$, $\{y_p^{(1)}\}_{p=1}^P$, $\{y_k^{(2)}\}_{k=1}^K$, $\{\tilde x_n\}_{n=1}^{\bar N}$, $\{\tilde y_p^{(1)}\}_{p=1}^{\bar P}$, $\{\tilde y_k^{(2)}\}_{k=1}^{\bar K}$, $x_0^{(1)}$, $x_0^{(2)}$, $\tilde x_0^{(1)}$, $\tilde x_0^{(2)}$ – невідомі коефіцієнти; $X_0^{(\ell)}=X_0^{(\ell)}(x_0^{(\ell)},\tilde x_0^{(\ell)})$, $\tilde X_0^{(\ell)}=\tilde X_0^{(\ell)}(x_0^{(\ell)},\tilde x_0^{(\ell)})$ – лінійні форми відносно невідомих $x_0^{(\ell)}$, $\tilde x_0^{(\ell)}$, $\ell=1,2$; b_j, $\tilde b_j$ – відомі величини, $j>0$ – довільне ціле число; $P^m_{t-1/2}(\cdot)$ – приєднані функції Лежандра; індекси функцій Лежандра задаються так: $z_n=m+n-1/2$, $n=1,\ldots,N$ $(\bar N)$, $m>0$; $\{\nu_p\}_{p=1}^P$, $\{\mu_k\}_{k=1}^K$, $\{\sigma_p\}_{p=1}^{\bar P}$, $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\bar K}$ – залежні від кута γ розхилу конуса, $0<\gamma<\pi$, $\gamma\ne\pi/2$, зростаючі послідовності дійсних додатних коренів трансцендентних рівнянь

$$P^m_{\nu-1/2}(\cos\gamma)=0,\qquad P^m_{\mu-1/2}(-\cos\gamma)=0,\qquad(3')$$

$$\frac{\partial}{\partial\gamma}P^m_{\sigma-1/2}(\cos\gamma)=0,\qquad \frac{\partial}{\partial\gamma}P^m_{\lambda-1/2}(-\cos\gamma)=0.\qquad(3'')$$

Нехай зв'язок між суматорними рівняннями (1), (2) задається співвідношеннями

$$\begin{pmatrix}X_0^{(1)}\\ \tilde X_0^{(1)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}g_{11} & g_{12}\\ g_{21} & g_{22}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_0^{(1)}\\ \tilde x_0^{(1)}\end{pmatrix},\qquad \begin{pmatrix}X_0^{(2)}\\ \tilde X_0^{(2)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}g_{11} & -g_{12}\\ -g_{21} & g_{22}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_0^{(2)}\\ \tilde x_0^{(2)}\end{pmatrix},\qquad(4)$$

де $g_{j\ell}$ – відомі сталі, $j,\ell=1,2$.

Уведемо простір послідовностей [5]

$$b(\sigma):\{\|X\|=\sup_n\left|x_n n^\sigma\right|,\ \lim_{n\to\infty}\left|x_n n^\sigma\right|=0\}.\qquad(5)$$

Необхідно знайти розв'язки рівнянь (1), (2) у класі послідовностей (5):

$$x_\lambda,\ \tilde x_\lambda,\ y_\lambda^{(\ell)},\ \tilde y_\lambda^{(\ell)}\in b(\sigma=m+2),\qquad(6)$$

де $\ell=1,2$, $\lambda\equiv\{\nu_p,\mu_k,\sigma_p,\lambda_k\}$.

Оскільки $P^m_{\lambda-1/2}(\cos\theta)=O(\lambda^{m-1/2})$, коли $\lambda\to\infty$ $(\mathrm{Im}\,\lambda=0)$ [2], то умова (6) забезпечує абсолютну й рівномірну за параметром θ збіжність рядів (1), (2) і виконання умови на краю конічної поверхні

$$\lim_{\rho\to\rho_1}\sum_{n=1}^{\infty}u_n n^2 n^{m-1/2}\left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)^n=O((\rho-\rho_1)^{-1/2}),\qquad u_n\equiv\{x_n,\tilde x_n,y_n^{(\ell)},\tilde y_n^{(\ell)}\},\ (7)$$

де $\ell=1,2$; ρ – відстань до краю ρ_1 конічної області.

Покладемо $\theta=\gamma$ у першому з рівнянь (1), а перше з рівнянь (2) продиференціюємо почленно за змінною θ і також покладемо $\theta=\gamma$. Враховуючи граничні умови (3), отримуємо рівняння, які зв'язують невідомі $x_0^{(1)}$, $x_0^{(2)}$ та $\tilde x_0^{(1)}$, $\tilde x_0^{(2)}$:

$$x_0^{(1)}\mathrm{tg}^m\,\frac{\gamma}{2} = x_0^{(2)}\mathrm{ctg}^m\,\frac{\gamma}{2}, \qquad \tilde{x}_0^{(1)}\mathrm{tg}^m\,\frac{\gamma}{2} = -\tilde{x}_0^{(2)}\mathrm{ctg}^m\,\frac{\gamma}{2}. \tag{8$'$}$$

Аналогічно зі співвідношень (8′) і (4) знаходимо

$$X_0^{(1)}\mathrm{tg}^m\,\frac{\gamma}{2} = X_0^{(2)}\mathrm{ctg}^m\,\frac{\gamma}{2}, \qquad \tilde{X}_0^{(1)}\mathrm{tg}^m\,\frac{\gamma}{2} = -\tilde{X}_0^{(2)}\mathrm{ctg}^m\,\frac{\gamma}{2}. \tag{8$''$}$$

Наступні результати стосовно апроксимаційних подань приєднаних функцій Лежандра на часткових інтервалах перебігу кутового параметра θ сформулюємо у вигляді лем.

Лема 1. *Для приєднаних функцій Лежандра* $P^m_{z_n-1/2}(\cos\theta)$ *в областях* $0 \le \theta < \gamma$ і $\gamma < \theta \le \pi$ *справджується подання*

$$\underset{\theta\,\in\gamma^{\pm}}{P^m_{z_n-1/2}(\cos\theta)} = \frac{\bar{q}_m(z_n,\gamma)}{2(1/4 - z_n^2)}\,\frac{\mathrm{tg}^{\pm m}(\theta/2)}{\mathrm{tg}^{\pm m}(\gamma/2)} +$$

$$+\,\bar{q}_m(z_n,\gamma)\lim_{P(K)\to\infty}\sum_{k=1}^{P(K)}\frac{\eta_k\bar{\alpha}_m^{\pm}(\eta_k,\gamma)}{\eta_k^2 - z_n^2}P^m_{\eta_k-1/2}(\pm\cos\theta)\,, \tag{9}$$

де $n = 1,\ldots,N$; $\gamma^+ : \theta \in [0,\gamma)$, $\gamma^- : \theta\in(\gamma,\pi]$; $\eta_k = \nu_k$ *та верхній знак беремо, коли* $\theta\in\gamma^+$ *і* $\eta_k = \mu_k$, *та нижній знак, коли* $\theta\in\gamma^-$,

$$\bar{q}_m(z_n,\gamma) = -2\left(z_n^2 - \frac{1}{4}\right)P^m_{z_n-1/2}(\cos\gamma)\,,$$

$$\bar{\alpha}_m^{\pm}(\eta_k,\gamma) = \left\{\left(\eta_k^2 - \frac{1}{4}\right)\frac{\partial}{\partial t}\left[P^m_{t-1/2}(\pm\cos\gamma)\right]_{t=\eta_k}\right\}^{-1}. \tag{10}$$

Ряд (9) *збігається до своєї функції у кожній з кутових областей, включаючи їх межі.*

Д о в е д е н н я. Розглянемо такий інтеграл уздовж кругового контуру:

$$J^{\pm}_{z_n}(\theta) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_R}\frac{tP^m_{t-1/2}(\pm\cos\theta)}{(t^2-1/4)(t^2-z_n^2)P^m_{t-1/2}(\pm\cos\gamma)}\,dt\,. \tag{11}$$

Тут C_R – коло радіуса R, знак «$+$» беремо в кутовій області $0<\theta<\gamma$, а «$-$» – в області $\gamma<\theta<\pi$. Підінтегральна функція в (11) є непарною, має прості полюси на дійсній осі в точках $t=\pm 1/2$, $t=\pm z_n$ і $t=\pm\eta_k$, $k = 1,\ldots,P(K)$, де $\eta_k=\pm\nu_k$, коли $0<\theta<\gamma$, і $\eta_k=\pm\mu_k$, коли $\gamma<\theta<\pi$. За умови, що $|t|\to\infty$ ($-\pi<\arg t<\pi$), ця функція прямує до нуля не повільніше, як $O\left(t^{-3}e^{-|\mathrm{Im}\,t|\cdot|\theta-\gamma|}\right)$.

Нехай $R\to\infty$ і контур C_R прямує до кола нескінченного радіуса за системою правильних контурів. Тоді, враховуючи поведінку підінтегральної функції на контурі C_R, знаходимо, що $J^{\pm}_{z_n}(\theta)\to 0$, коли $P, K\to\infty$. Якщо тепер замінимо інтеграл (11) рядом лишків і зважаючи на те, що

$$\lim_{t\to 1/2}\frac{\partial}{\partial t}\left[P^m_{t-1/2}(\pm\cos\gamma)\right] = -\varepsilon_m\mathrm{tg}^{\pm m}\left(\frac{\gamma}{2}\right),$$

де $m = 1,2,3,\ldots$, $\varepsilon_1=\varepsilon_2=1$, $\varepsilon_3=2$, $\varepsilon_4=6$, $\ldots$, отримаємо рівність (9).

Для коренів трансцендентних рівнянь (3′) справджуються асимптотичні формули, коли $k\to\infty$:

$$\nu_k = \pi\left(k-\frac{1}{4}+\frac{m}{2}\right)\frac{1}{\gamma}+O(1/k), \quad \mu_k = \pi\left(k-\frac{1}{4}+\frac{m}{2}\right)\frac{1}{\pi-\gamma}+O(1/k)\,, \tag{12}$$

а $\frac{\partial}{\partial t}[P_{t-1/2}^{m}(\pm\cos\gamma)]_{t=\eta_k} = O(k^{m-1/2})$. Отже, елементи ряду (9) за фіксованих значень z_n прямують до нуля, як $O(k^{-3})$, в областях перебігу параметра θ, а цей ряд є абсолютно й рівномірно збіжним у кожній з кутових областей. На межах кутових областей, коли $\theta = \gamma$, формула (9) перетворюється у тотожність, що випливає із виразів (3′) і (10). Лему 1 доведено. ◊

Уведемо до розгляду функції

$$\Psi_{\tilde{\eta}_p}^{m}(\theta) = \begin{cases} P_{\tilde{\eta}_p-1/2}^{m}(\pm\cos\theta), & \theta \in \gamma^{\pm}, \\ 0, & \theta \in \gamma^{\mp}. \end{cases} \tag{13}$$

Тут для $\tilde{\eta}_p \in \{\sigma_p\}_{p=1}^{\bar{P}}$ береться верхній знак, а для $\tilde{\eta}_p \in \{\lambda_p\}_{p=1}^{\bar{K}}$ – нижній.

Лема 2. *Для функцій* (13) *в областях* $0 \le \theta < \gamma$ *і* $\gamma < \theta \le \pi$ *справджується подання*

$$\Psi_{\tilde{\eta}_p}^{m}(\theta) = \left\{ \begin{matrix} \dfrac{m\tilde{\tilde{q}}_m^{\pm}(\tilde{\eta}_p,\gamma)}{2\beta_m \sin\gamma\left(\tilde{\eta}_p^2 - \dfrac{1}{4}\right)} \dfrac{\mathrm{tg}^{\pm m}(\theta/2)}{\dfrac{d}{d\gamma}\mathrm{tg}^{\pm m}\left(\dfrac{\gamma}{2}\right)}, & \theta \in \gamma^{\pm} \\ \dfrac{m\tilde{\tilde{q}}_m^{\pm}(\tilde{\eta}_p,\gamma)}{2\beta_m \sin\gamma\left(\tilde{\eta}_p^2 - \dfrac{1}{4}\right)} \dfrac{\mathrm{tg}^{\mp m}(\theta/2)}{\dfrac{d}{d\gamma}\mathrm{tg}^{\mp m}\left(\dfrac{\gamma}{2}\right)}, & \theta \in \gamma^{\mp} \end{matrix} \right\} +$$

$$+ \tilde{\tilde{q}}_m^{\pm}(\tilde{\eta}_p,\gamma) \lim_{\bar{N}\to\infty} \sum_{k=1}^{\bar{N}} \frac{z_k \tilde{\tilde{\alpha}}_m(z_k,\gamma)}{\tilde{\eta}_p^2 - z_k^2} P_{z_k-1/2}^{m}(\cos\theta), \tag{14}$$

де $\beta_m = \sin\gamma\left[\Gamma(m)\frac{1}{\varepsilon_m}\right]^2$, $\Gamma(\cdot)$ *– гамма функція,*

$$\tilde{\tilde{q}}_m^{\pm}(\tilde{\eta}_p,\gamma) = \pm\sin\gamma\left(\tilde{\eta}_p^2 - \frac{1}{4}\right) P_{\tilde{\eta}_p-1/2}^{m}(\pm\cos\gamma),$$

$$\tilde{\tilde{\alpha}}_m(z_k,\gamma) = \frac{\Gamma\left(z_k - m + \frac{1}{2}\right)\frac{d}{d\gamma}P_{z_k-1/2}^{m}(\cos\gamma)}{\left(z_k^2 - \frac{1}{4}\right)\Gamma\left(z_k + m + \frac{1}{2}\right)}. \tag{15}$$

Ряд (14) *збігається до своєї функції у кожній з кутових областей.*

Д о в е д е н н я. Розглянемо інтеграл уздовж кругового контуру

$$J_{\tilde{\eta}_n}^{\pm}(\theta) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{t\Gamma\left(t - m + \frac{1}{2}\right)\frac{d}{d\gamma}P_{t-1/2}^{m}(\mp\cos\gamma)}{\left(t^2 - \frac{1}{4}\right)(t^2 - \tilde{\eta}_n^2)\Gamma\left(t + m + \frac{1}{2}\right)\cos(\pi t)} P_{t-1/2}^{m}(\pm\cos\theta)\, dt. \tag{16}$$

Тут знак «+» береться в кутовій області $0 < \theta < \gamma$, а «–» – в області $\gamma < \theta < \pi$. Підінтегральна функція в (16) має прості полюси на дійсній осі в точках $t = \pm 1/2$, $t = \pm\tilde{\eta}_n$ і $t = \pm z_k$, $z_k = m + k - 1/2$, $k = 1, \ldots, \bar{N}$. Якщо $|t| \to \infty$, $-\pi < \arg t < \pi$, то

$$\Gamma\left(t - m + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\Gamma\left(t + m + \frac{1}{2}\right)\right)^{-1} = O(t^{-2m})$$

і

$$\frac{d}{d\gamma}[P_{t-1/2}^{m}(\mp\cos\gamma)] P_{t-1/2}^{m}(\pm\cos\theta) \frac{1}{\cos(\pi t)} = O(t^{2m} e^{-|\mathrm{Im}\, t|\cdot|\theta-\gamma|}).$$

Отже, підінтегральна функція (16) за фіксованих $\tilde{\eta}_n$ прямує до нуля не повільніше, як t^{-3}, й інтеграл (16) прямує до нуля, коли $R \to \infty$.

Далі, поступаючи аналогічно, як при доведенні леми 1, і враховуючи, що для коренів трансцендентних рівнянь (3″), коли $k \to \infty$, справджуються асимптотичні формули

$$\sigma_k = \pi\left(k - \frac{3}{4} + \frac{m}{2}\right)\frac{1}{\gamma} + O(1/k), \qquad \lambda_k = \pi\left(k - \frac{3}{4} + \frac{m}{2}\right)\frac{1}{\pi - \gamma} + O(1/k), \tag{17}$$

отримуємо доведення леми 2. ◊

Зауважимо, що леми 1, 2 залишаються правильними і за умов, коли параметри z_n і $\tilde{\eta}_p$ прямують до нескінченності.

Підставимо формули (9) і (14) відповідно у ліву частину рівняння (1) та праву частину рівняння (2) і обмежимося в отриманих рядах скінченною кількістю доданків. З огляду на лінійну незалежність функцій Лежандра та відповідних тригонометричних функцій перейдемо від суматорних рівнянь до еквівалентних скінченних систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Для цього прирівнюємо до нуля коефіцієнти біля однакових функцій Лежандра. Виключивши з отриманих рівнянь $y_p^{(1)}$, $y_k^{(2)}$, $\tilde{x}_n$, $p = 1, \ldots, P$, $k = 1, \ldots, K$, $n = 1, \ldots, \bar{N}$, отримаємо системи рівнянь відносно невідомих $\{x_n\}$ і $\{\tilde{y}_p^{(1)}\}, \{\tilde{y}_k^{(2)}\}$, $n = 1, \ldots, N$, $p = 1, \ldots, \bar{P}$, $k = 1, \ldots, \bar{K}$. Далі прирівнюємо до нуля коефіцієнти біля тригонометричних функцій, що дає ще вісім лінійних алгебраїчних рівнянь відносно $\{x_n\}$, $\{\tilde{y}_p^{(1)}\}$, $\{\tilde{y}_k^{(2)}\}$ і $\{x_0^{(\ell)}\}, \{\tilde{x}_0^{(\ell)}\}$, $\ell = 1, 2$. Враховуючи співвідношення (4), (8), виключаємо з них $x_0^{(\ell)}$, $\tilde{x}_0^{(\ell)}$ і формуємо рівняння, які зв'язують невідомі $\{x_n\}$ і $\{\tilde{y}_p^{(1)}\}, \{\tilde{y}_k^{(2)}\}$. Отримані рівняння групуємо у дві зв'язані скінченні системи лінійних алгебраїчних рівнянь порядку $N \times N$ і $\bar{N} \times \bar{N}$, які запишемо так:

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{\hat{x}_n}{\xi_k - z_n} - \frac{1 + 2g_{11}}{2} \sum_{n=1}^{N} \frac{\hat{x}_n}{\xi_k^2 - z_n^2} - \frac{g_{12}}{\beta_m} \sum_{n=1}^{\bar{N}} \frac{\hat{\tilde{y}}_n}{\tilde{\xi}_k^2 - \tilde{z}_n^2} = \hat{b}_j \, \frac{z_j + g_{11}}{\xi_k^2 - z_j^2}, \quad k = 1,$$

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{\hat{x}_n}{\xi_k - z_n} = -\frac{\hat{b}_j}{\xi_k + z_j}, \qquad k = 2, \ldots, N, \tag{18}$$

$$\sum_{p=1}^{\bar{N}} \frac{\hat{\tilde{y}}_p}{\tilde{\xi}_k - \tilde{z}_p} - \frac{1 - 2g_{22}}{2} \sum_{p=1}^{\bar{N}} \frac{\hat{\tilde{y}}_p}{\tilde{\xi}_k^2 - \tilde{z}_p^2} + \beta_m g_{21} \sum_{p=1}^{N} \frac{\hat{x}_p}{\xi_k^2 - z_p^2} = -\frac{2\beta_m g_{21} \hat{b}_j}{\xi_k^2 - z_j^2}, \quad k = 1,$$

$$\sum_{p=1}^{\bar{N}} \frac{\hat{\tilde{y}}_p}{\tilde{\xi}_k - \tilde{z}_p} = -2\delta_{k,j+1} \hat{\tilde{b}}_j, \qquad k = 2, \ldots, \bar{N}. \tag{19}$$

Тут $\beta_m = \sin\gamma\left[\Gamma(m)\frac{1}{\varepsilon_m}\right]^2$; δ_{jn} – символ Кронекера; $\{\xi_n\}$, $\{z_n\}$, $\{\tilde{\xi}_k\}$, $\{\tilde{z}_p\}$ – зростаючі послідовності:

$$\xi_k \in \left\{\xi_1 = \frac{1}{2}\right\} \cup \{\nu_p\}_{p=1}^{P} \cup \{\mu_k\}_{k=1}^{K}, \qquad z_n \in \left\{n + m - \frac{1}{2}\right\}_{n=1}^{N}, \tag{20′}$$

$$\tilde{\xi}_k \in \left\{\tilde{\xi}_1 = \frac{1}{2}\right\} \cup \left\{k + m - \frac{3}{2}\right\}_{k=2}^{\bar{N}}, \qquad \tilde{z}_p \in \{\sigma_p\}_{p=1}^{\bar{P}} \cup \{\lambda_k\}_{k=1}^{\bar{K}}, \tag{20″}$$

$$\widehat{x}_n = \overline{q}_m(z_n,\gamma)\, x_n , \tag{21}$$

$$\widehat{\tilde{y}}_p = \begin{cases} \widehat{\tilde{y}}_p^{(1)}, & \tilde{z}_p \in \{\sigma_p\}_{p=1}^{\overline{P}}, \\ \widehat{\tilde{y}}_p^{(2)}, & \tilde{z}_p \in \{\lambda_k\}_{k=1}^{\overline{K}}, \end{cases} \qquad \widehat{\tilde{y}}_p^{(1)} = \tilde{\overline{q}}_m^{\,+}(\sigma_p,\gamma)\, \tilde{y}_p^{(1)}, \quad \widehat{\tilde{y}}_k^{(2)} = \tilde{\overline{q}}_m^{\,-}(\lambda_k,\gamma)\, \tilde{y}_k^{(2)}, \tag{22}$$

$$\widehat{b}_j = \overline{q}_m(z_n,\gamma)\, b_j, \qquad \widehat{\tilde{b}}_j = \frac{\tilde{b}_j}{\tilde{\overline{\alpha}}(z_j,\gamma)}. \tag{23}$$

Уведемо до розгляду дві граничні нескінченні системи лінійних алгебраїчних рівнянь (НСЛАР), які утворимо з (18), (19), коли ξ_k, z_n, $\tilde{\xi}_k$, $\tilde{z}_p \to \infty$. Запишемо їх так:

$$\begin{gathered} A\widehat{X} + A_1\widehat{X} + D\widehat{\tilde{Y}} = \widehat{F}_1 , \\ C\widehat{\tilde{Y}} + C_1\widehat{\tilde{Y}} + B\widehat{X} = \widehat{\tilde{F}}_2 , \end{gathered} \tag{24}$$

де $\widehat{X} = \{\widehat{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\widehat{\tilde{Y}} = \{\widehat{\tilde{y}}_n\}_{n=1}^{\infty}$; $A : \{a_{kn}\}$, $A_1 : \{a_{kn}^{(1)}\}$, $D : \{d_{kn}\}$, $C : \{c_{kp}\}$, C_1: $: \{c_{kp}^{(1)}\}$, $B : \{b_{kp}\}$, $k, n, p = 1,\dots,\infty$, – нескінченні матриці, які мають такі елементи:

$$a_{kn} = \frac{1}{\xi_k - z_n}, \qquad c_{kp} = \frac{1}{\tilde{\xi}_k - \tilde{z}_p}, \tag{25}$$

$$a_{kn}^{(1)} = \begin{cases} -\left(\dfrac{1}{2} + g_{11}\right)\dfrac{1}{\xi_k^2 - z_n^2}, & k = 1,\ n \ge 1, \\ 0, & k > 1,\ n \ge 1, \end{cases}$$

$$d_{kn} = \begin{cases} -g_{12}\,\dfrac{1}{[\beta_m(\tilde{\xi}_k^2 - \tilde{z}_n^2)]}, & k = 1,\ n \ge 1, \\ 0, & k > 1,\ n \ge 1, \end{cases} \tag{26}$$

$$c_{kp}^{(1)} = \begin{cases} -\left(\dfrac{1}{2} - g_{22}\right)\dfrac{1}{\tilde{\xi}_k^2 - \tilde{z}_p^2}, & k = 1,\ p \ge 1, \\ 0, & k > 1,\ p \ge 1, \end{cases}$$

$$b_{kp} = \begin{cases} \beta_m g_{21}\,\dfrac{1}{\xi_k^2 - z_p^2}, & k = 1,\ p \ge 1, \\ 0, & k > 1,\ p \ge 1, \end{cases} \tag{27}$$

$\widehat{F}_1 = \{\widehat{f}_{kj}^{(1)}\}_{k=1}^{\infty}$, $\widehat{F}_2 = \{\widehat{f}_{kj}^{(2)}\}_{k=1}^{\infty}$ – відомі вектори:

$$\widehat{f}_{kj}^{(1)} = \begin{cases} \widehat{b}_j(z_j + g_{11})\dfrac{1}{\xi_k^2 - z_j^2}, & k = 1, \\ -\widehat{b}_j\,\dfrac{1}{\xi_k + z_j}, & k > 1, \end{cases} \qquad \widehat{f}_{kj}^{(2)} = \begin{cases} -2\beta_m g_{21}\widehat{b}_j\,\dfrac{1}{\xi_k^2 - z_j^2}, & k = 1, \\ -2\delta_{k,j+1}\widehat{\tilde{b}}_j, & k > 1. \end{cases} \tag{28}$$

Розглянемо парні мероморфні функції

$$T_1(\nu,m) = \frac{\Gamma\left(\nu + m + \dfrac{1}{2}\right)\cos[\pi(\nu + m)]}{\left(\nu^2 - \dfrac{1}{4}\right)\Gamma\left(\nu - m + \dfrac{1}{2}\right)P_{\nu-1/2}^m(\cos\gamma)P_{\nu-1/2}^m(-\cos\gamma)}, \tag{29$'$}$$

$$T_2(\nu,m) = \frac{\Gamma\left(\nu - m + \dfrac{1}{2}\right)\dfrac{d}{d\gamma}P_{\nu-1/2}^m(\cos\gamma)\,\dfrac{d}{d\gamma}P_{\nu-1/2}^m(-\cos\gamma)}{\left(\nu^2 - \dfrac{1}{4}\right)\Gamma\left(\nu + m + \dfrac{1}{2}\right)\cos[\pi(\nu + m)]}, \tag{29$''$}$$

які є регулярними у смузі $\Pi : \{|\operatorname{Re}\nu| < 1/2\}$. За межами цієї смуги вони мають прості дійсні нулі й полюси, які для функції (29′) розміщуються відповідно в точках $\nu = \pm z_n$, $\nu = \pm \xi_k$ (див. формулу (20′) для $P, K, N \to \infty$), а для функції (29″) збігаються з точками $\nu = \pm \tilde{z}_n$, $\nu = \pm \tilde{\xi}_k$, $k, n = 1, \ldots, \infty$ (див. формулу (20″) для $\bar{P}, \bar{K}, \bar{N} \to \infty$). Функції $T_1(\nu, m)$, $T_2(\nu, m)$ допускають канонічну факторизацію відносно уявної осі методом нескінченних добутків:

$$T_\ell(\nu, m) = T_\ell^+(\nu, m) T_\ell^-(\nu, m), \tag{30}$$

де $T_\ell^+(\nu, m)$, $T_\ell^-(\nu, m)$, $\ell = 1, 2$, − функції, регулярні відповідно у півплощинах $\operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2}$, $\operatorname{Re}\nu < \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} T_1^+(\nu, m) = {} & 2^m \pi^{1/2} i \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2m-1)} \times \\ & \times \frac{1}{\left[P_{-1/2}^m(\cos\gamma) P_{-1/2}^m(-\cos\gamma)\right]^{1/2}} \left\{ \left(1 + \frac{\nu}{1/2}\right)^2 \ldots \left(1 + \frac{\nu}{m - 1/2}\right) \times \right. \\ & \left. \times \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right) e^{\nu \chi_m} \prod_{n=2}^{\infty} \left(1 + \frac{\nu}{\xi_n}\right) e^{-\nu/\xi_n} \right\}^{-1}, \end{aligned} \tag{31′}$$

$$\begin{aligned} T_2^+(\nu, m) = {} & \frac{1}{2^m} \frac{1}{\pi^{1/2}} i \left[1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2m-1)\right] \times \\ & \times \left\{ \frac{d}{d\gamma} \left[P_{-1/2}^m(\cos\gamma)\right] \frac{d}{d\gamma} \left[P_{-1/2}^m(-\cos\gamma)\right] \right\}^{1/2} \left\{ \left(1 + \frac{\nu}{3/2}\right) \times \right. \\ & \left. \times \ldots \times \left(1 + \frac{\nu}{m - 1/2}\right) \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right) e^{\nu \tilde{\chi}_m} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\nu}{\tilde{z}_n}\right) e^{-\nu/\tilde{z}_n} \right\}, \end{aligned} \tag{31″}$$

де
$$\chi_0(\gamma) = \frac{\gamma}{\pi} \ln \frac{\gamma}{\pi} + \frac{\pi - \gamma}{\pi} \ln \frac{\pi - \gamma}{\pi},$$

$$\chi_m = \chi_0(\gamma) - \psi\left(\frac{3}{4} + \frac{m}{2}\right) - S_m(\gamma) - S_m(\pi - \gamma),$$

$$S_m(\gamma) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \gamma \left[\pi\left(n + \frac{m}{2} - \frac{1}{4}\right)\right]^{-1} - \frac{1}{\nu_n} \right\},$$

$$\tilde{\chi}_m = \chi_0(\gamma) - \psi\left(\frac{1}{4} + \frac{m}{2}\right) - \tilde{S}_m(\gamma) - \tilde{S}_m(\pi - \gamma),$$

$$\tilde{S}_m(\gamma) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \gamma \left[\pi\left(n + \frac{m}{2} - \frac{3}{4}\right)\right]^{-1} - \frac{1}{\sigma_n} \right\},$$

$\psi(\cdot)$ − логарифмічна похідна гамма функції; $T_\ell^-(\nu, m) = T_\ell^+(-\nu, m)$; $T_\ell^\pm(\nu, m) = O(\nu^{-1/2})$, коли $|\nu| \to \infty$ в областях регулярності.

Теорема 1. *Для матричних операторів* $A : \{a_{kn}\}$, $C : \{c_{kn}\}$ *з елементами* (25) *існують ліво- та правосторонні обернені оператори, які є комутативними*:

$$A^{-1} A = A A^{-1} = I,$$

$$C^{-1} C = C C^{-1} = I. \tag{32}$$

Матричні елементи обернених операторів виражаються через функції (31) *у вигляді*

$$A^{-1}:\left\{\tau_{pk}^{(1)}=\left\langle\{[T_1^-(\xi_k,m)]^{-1}\}'[T_1^-(z_p,m)]'(z_p-\xi_k)\right\rangle^{-1}\right\}, \tag{33}$$

$$C^{-1}:\left\{\tau_{pk}^{(2)}=\left\langle\{[T_2^-(\tilde{\xi}_k,m)]^{-1}\}'[T_2^-(\tilde{z}_p,m)]'(\tilde{z}_p-\tilde{\xi}_k)\right\rangle^{-1}\right\}, \tag{34}$$

де I *– одиничний оператор*, $[T_\ell^-(u_p,m)]'=\dfrac{d}{du}T_\ell^-(u,m)\Big|_{u=u_p}$.

Д о в е д е н н я теореми 1 базується на підсумовуванні в аналітичному вигляді рядів, які відповідають добутку нескінченних матриць (32) [4, 9]. ◊

Теорема 2. *Розв'язок системи рівнянь* (24) *існує у просторі послідовностей* (5) *з* $0<\sigma<1/2$.

Д о в е д е н н я. Враховуючи співвідношення (32), запишемо систему рівнянь (24) так:

$$\widehat{X}=A^{-1}\widehat{F}_1-A^{-1}A_1\widehat{X}-A^{-1}D\widehat{\widehat{Y}},$$

$$\widehat{\widehat{Y}}=C^{-1}\widehat{\widehat{F}}_2-C^{-1}C_1\widehat{\widehat{Y}}-C^{-1}B\widehat{X}, \tag{35}$$

і, зважаючи на формули (26)–(28) і (33), (34), остаточно отримаємо такі рівняння:

$$\widehat{x}_n=\upsilon_1\tau_{n1}^{(1)}+\varphi_{nj}^{(1)},$$

$$\widehat{\widehat{y}}_n=\upsilon_2\tau_{n1}^{(2)}+\varphi_{nj}^{(2)},\qquad n=1,\ldots,\infty. \tag{36}$$

Тут

$$\upsilon_1=\frac{1+2g_{11}}{2}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\widehat{x}_p}{\xi_1^2-z_p^2}+\frac{g_{12}}{\beta_m}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\widehat{\widehat{y}}_p}{\tilde{\xi}_1^2-\tilde{z}_p^2},$$

$$\upsilon_2=-\beta_m g_{21}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\widehat{x}_p}{\xi_1^2-z_p^2}+\frac{1-2g_{22}}{2}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\widehat{\widehat{y}}_p}{\tilde{\xi}_1^2-\tilde{z}_p^2}, \tag{37}$$

$$\varphi_{nj}^{(1)}=\frac{\tau_{n1}^{(1)}\widehat{b}_j(z_j+g_{11})}{\xi_1^2-z_j^2}-\widehat{b}_j\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\tau_{nk}^{(1)}}{\xi_k+z_j},$$

$$\varphi_{nj}^{(2)}=-\frac{2\beta_m g_{21}\widehat{b}_j\tau_{n1}^{(2)}}{\xi_1^2-z_j^2}-2\tau_{nj}^{(2)}\widehat{\widehat{b}}_j. \tag{38}$$

Для підсумовування ряду у першій із формул (38) розглянемо у комплексній площині такий інтеграл уздовж кругового контуру:

$$I_{nj}=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_R}\frac{T_1^-(t,m)}{(t-z_n)(t+z_j)}\,dt. \tag{39}$$

Підінтегральна функція в (39) прямує до нуля, як $t^{-5/2}$, коли $t\to\infty$, за винятком дискретної множини точок, де ця функція має прості полюси $t=-z_j$ і $t=\xi_k$, $k=1,\ldots,\infty$. (Зауважимо, що очевидний нуль знаменника цієї функції в точці $t=z_n$ компенсується нулем функції $T_1^-(t,m)$ у цій точці.) Спрямовуючи радіус кругового контуру інтегрування C_R до нескінченності і застосовуючи теорему про лишки з урахуванням формули (33), отримаємо

$$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\tau_{nk}^{(1)}}{\xi_k+z_j}=-\frac{T_1^+(z_j,m)}{(z_n+z_j)\left[T_1^-(z_n,m)\right]'}-\frac{\tau_{n1}^{(1)}}{\xi_1+z_j}. \tag{40}$$

Запишемо тепер асимптотичні оцінки похідних функцій (31) у точках ξ_k, z_p ($\tilde{\xi}_k$, $\tilde{z}_p$) для випадку, коли $p,k\to\infty$:

$$\frac{d}{dt}[T_\ell^-(t,m)]\Big|_{t=\zeta} = O(\zeta^{-1/2}), \qquad \zeta = \begin{cases}(\xi_k, z_p), & \ell = 1,\\ (\tilde{\xi}_k, \tilde{z}_p), & \ell = 2.\end{cases} \tag{41}$$

Використовуючи співвідношення (41), знаходимо, що

$$\tau_{pk}^{(\ell)} = O\left(\frac{u_p^{1/2}}{\eta_k^{1/2}(u_p - \eta_k)}\right), \qquad \ell = 1, 2. \tag{42}$$

Тут $\eta_k = \xi_k$ і $u_p = z_p$, коли $\ell = 1$, та $\eta_k = \tilde{\xi}_k$ і $u_p = \tilde{z}_p$, коли $\ell = 2$.

Для виразів (37) очевидною є така оцінка:

$$\upsilon_\ell \le c_\ell^{(1)} \left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{-1/2}}{\xi_1^2 - z_n^2}\right| + c_\ell^{(2)} \left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{-1/2}}{\tilde{\xi}_1^2 - \tilde{z}_n^2}\right| \le \tilde{c}_\ell, \tag{43}$$

де $c_\ell^{(1)}$, $c_\ell^{(2)}$, $\tilde{c}_\ell$, $\ell = 1, 2$, – сталі величини.

Використовуючи формули (41)–(43), знаходимо асимптотичну поведінку виразів (36), (38) і (40), з яких випливає, що $\hat{x}_n$, $\hat{\tilde{y}}_n \in b(\sigma)$, де $0 < \sigma < 1/2$. Теорему 2 доведено. ◊

Теорема 3. *Невідомі коефіцієнти* υ_1, υ_2 (37) *у зображенні* (36) *є розв'язками системи лінійних алгебраїчних рівнянь другого порядку*

$$s_{11}\upsilon_1 + s_{12}\upsilon_2 = h_1,$$

$$s_{21}\upsilon_1 + s_{22}\upsilon_2 = h_2, \tag{44}$$

де

$$s_{11} = 1 - \frac{1 + 2g_{11}}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau_{n1}^{(1)}}{\xi_1^2 - z_n^2}, \qquad s_{12} = -\frac{g_{12}}{\beta_m} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau_{n1}^{(2)}}{\tilde{\xi}_1^2 - \tilde{z}_n^2}, \tag{45′}$$

$$s_{22} = 1 - \frac{1 - 2g_{22}}{2} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\tau_{p1}^{(2)}}{\tilde{\xi}_1^2 - \tilde{z}_p^2}, \qquad s_{21} = \beta_m g_{21} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\tau_{p1}^{(1)}}{\xi_1^2 - z_p^2}, \tag{45″}$$

$$h_1 = \hat{b}_j \frac{z_j + g_{11}}{\xi_1^2 - z_j^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_{nj}^{(1)}}{\xi_1 - z_n} + \frac{1 + 2g_{11}}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_{nj}^{(1)}}{\xi_1^2 - z_n^2} + \frac{g_{12}}{\beta_m} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_{nj}^{(2)}}{\tilde{\xi}_1^2 - \tilde{z}_n^2}, \tag{46′}$$

$$h_2 = -\hat{b}_j \frac{2\beta_m g_{21}}{\xi_1^2 - z_j^2} - \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\varphi_{pj}^{(2)}}{\tilde{\xi}_1 - \tilde{z}_p} + \frac{1 - 2g_{22}}{2} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\varphi_{pj}^{(2)}}{\tilde{\xi}_1^2 - \tilde{z}_p^2} - \beta_m g_{21} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\varphi_{pj}^{(1)}}{\xi_1^2 - z_p^2}. \tag{46″}$$

Д о в е д е н н я. Підставимо формули (36) у НСЛАР (24). Оскільки виконуються співвідношення (32), то для будь якого цілого $k > 1$ усі k-ті рівняння кожної із систем (24) задовольняються тотожно. Далі, підставляючи вирази (36) у перші рівняння систем (24) ($k = 1$), отримуємо систему рівнянь (44). Цим теорему 3 доведено. ◊

Наслідок. *Нехай* $s_{11}s_{22} - s_{12}s_{21} \ne 0$. *Тоді розв'язок НСЛАР* (24) *отримуємо в аналітичному вигляді з розв'язку системи* (44) *і формул* (36).

Зауваження. Якщо $g_{11} = -1/2$, $g_{22} = 1/2$, $g_{12} = g_{21} = 0$, то НСЛАР (24) розпадається на дві незалежні нескінченні системи, розв'язки яких визначаються формулою (36), коли $\upsilon_1, \upsilon_2 = 0$.

Повернемось до скінченних систем рівнянь (18), (19) і сформулюємо теорему.

Теорема 4. *Коли* $P, K, \bar{P}, \bar{K} \to \infty$, *для відношення параметрів редукції систем* (18), (19) *виконуються оцінки*

$$\frac{P}{K} \to \frac{\gamma}{\pi - \gamma}, \qquad \frac{\bar{P}}{\bar{K}} \to \frac{\gamma}{\pi - \gamma}. \tag{47}$$

Д о в е д е н н я. Оскільки рівняння системи (18) і невідомі в системі (19) розташовані відповідно до зростаючих послідовностей

$$\xi_k \in \{\xi_1 = 1/2\} \cup \{\nu_p\}_{p=1}^{P} \cup \{\mu_k\}_{k=1}^{K}, \qquad \tilde{z}_p \in \{\sigma_p\}_{p=1}^{\bar{P}} \cup \{\lambda_k\}_{k=1}^{\bar{K}},$$

то відношення (47) безпосередньо випливає із лінійної залежності головних членів асимптотик (12), (17) нулів цілих функцій

$$P_{t-1/2}^{m}(\pm\cos\gamma), \qquad \frac{\partial}{\partial\gamma}[P_{t-1/2}^{m}(\cos\gamma)]$$

від параметра k, коли $k \to \infty$. ◊

Теорема 5. *Вираз* (36) *є границею послідовності розв'язків скінченних систем лінійних алгебраїчних рівнянь* (18), (19) *за умови, що* $P, K, \bar{P}, \bar{K} \to \to \infty$ *за правилом* (47).

Д о в е д е н н я базується на оцінці різниці за нормою (5) відповідних матричних операторів систем рівнянь (18), (19) і (24). ◊

Означення. Розв'язками суматорних рівнянь (1), (2) вважатимемо границю їх послідовності, коли параметри $P, K, \bar{P}, \bar{K}$ редукції рядів прямують до нескінченності ($P, K, \bar{P}, \bar{K} \to \infty$) за правилом (47).

Тоді такі розв'язки отримуємо за формулами (21), (22) і (36) і для них справджується

Теорема 6. *Розв'язки суматорних рівнянь* (1), (2) *належить до класу послідовностей* (6).

Д о в е д е н н я. За умови, що цілочислові параметри $n, p, k \to \infty$, справджуються такі асимптотичні співвідношення:

$$\bar{q}_m(z_n, \gamma) = O(n^{m+3/2}), \qquad \tilde{\bar{q}}_m^{\pm}(t, \gamma) = O(t^{m+3/2}), \qquad t \equiv \{p, k\}. \qquad (48)$$

Тоді, враховуючи формули (21), (22), (36) і (48), отримуємо твердження теореми 6. ◊

Приклад. Якщо $g_{11} = g_{22} = (2sc_1)^{-1} \equiv (2\rho_1)^{-1}$, $g_{12} = -Z$, $g_{21} = -Z^{-1}$, де $s = -i\omega\sqrt{\varepsilon\mu}$, $Z = \sqrt{\mu/\varepsilon}$, ω – кругова частота, ε, μ – відповідно діелектрична і магнітна проникності середовища з металевим конічним екраном скінченної довжини c_1, тоді суматорні рівняння (1), (2) з точністю до членів порядку $|\rho_1/2|^2 \ll 1$ описують розсіяння просторових мод стаціонарної електромагнітної хвилі на скінченному ідеально провідному конусі. З отриманого розв'язку випливає

Твердження. Нехай скінченний конус збуджується несиметричним полем ($m > 0$) довільної j-ї моди поперечної електричної (TE) хвилі ($b_j \equiv 0$, $\tilde{b}_j \neq 0$) або полем j-ї моди поперечної магнітної (TM) хвилі ($b_j \neq 0$, $\tilde{b}_j \equiv 0$), то у зв'язку з ефектом міжполяризаційної взаємодії на краю конуса, у дифрагованому полі завжди буде присутній повний спектр просторових мод TE- і TM-хвиль. ◃

Висновки. Виділено клас зв'язаних систем парних суматорних рівнянь для приєднаних функцій Лежандра з дробовими нижніми індексами та тригонометричних функцій і отримано їх розв'язки в аналітичному вигляді. Ці розв'язки подано як границі послідовності розв'язків еквівалентних скінченних систем лінійних алгебраїчних рівнянь, коли параметри редукції прямують до нескінченності за встановленим правилом. Граничні нескінченні системи лінійних алгебраїчних рівнянь містять матричні оператори згортки. Записано обернені до них оператори, які використано для формування розв'язків суматорних рівнянь у класі послідовностей, що забезпечують виконання умов на краю конічної області.

1. *Вирченко Н. А.* Парные (тройные) интегральные уравнения. – Киев: Вища шк., 1989. – 160 с.
2. *Гобсон Е.* Теория сферических и эллипсоидальных функций. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1952. – 370 с.
3. *Гринченко В. Т., Мацыпура В. Т.* Рассеяние звука на конечных клиновидных областях // Акуст. вісн. – 2003. – **6**, № 2. – С. 23–33.
4. *Куриляк Д. Б., Назарчук З. Т.* Аналітико-числові методи в теорії дифракції хвиль на конічних і клиноподібних поверхнях. – Київ: Наук. думка, 2006. – 280 с.
5. *Люстерник А. А., Соболев В. И.* Элементы функционального анализа. – Москва: Наука, 1965. – 519 с.
6. *Митра Р., Ли С.* Аналитические методы теории волноводов. – Москва: Мир, 1974. – 327 с.
7. *Улитко А. Ф.* Векторные разложения в пространственной теории упругости. – Киев: Академпериодика, 2002. – 341 с.
8. *Шестопалов В. П., Кириленко А. А., Масалов С. А.* Матричные уравнения типа свертки в задачах теории дифракции. – Киев: Наук. думка, 1984. – 292с.
9. *Kuryliak D. B., Nazarchuk Z. T.* Convolution type operators for wave diffraction by conical structures // Radio Science. – 2008. – **43**. – RS4S03, doi: 10.1029 /2007RS003792.
10. *Vinogradov S. S., Smith P. D., Vinogradova E. D.* Canonical problems in scattering and potential theory. Part II: Acoustic and electromagnetic diffraction by canonical structures. – Boca Raton (FL): Chapman & Hall/CRC, 2002. – 503 p.

РЕШЕНИЕ ОДНОГО КЛАССА СИСТЕМ ПАРНЫХ СУММАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ПРИСОЕДИНЕННЫХ ФУНКЦИЙ ЛЕЖАНДРА

Получены в аналитическом виде решения одного класса систем парных сумматорных уравнений для присоединенных функций Лежандра с дробными индексами. Такие уравнения возникают при изучении взаимодействия векторных электромагнитных полей с краем кругового открытого проводящего конуса в низкочастотной области. Выведены формулы переразложения функций Лежандра, которые использованы для перехода от сумматорных уравнений к бесконечным системам линейных алгебраических уравнений, содержащим матричные операторы типа свертки. Обратные к ним операторы использованы для получения решений в необходимом классе последовательностей. Приведен пример описания взаимодействия ТМ- и ТЕ-волн с краем конечного конуса.

SOLUTION OF ONE CLASS OF DUAL SERIES EQUATIONS FOR ASSOCIATE LEGENDRE FUNCTIONS

The rigorous solutions of one class of the systems of dual series equations for associate Legendre functions with fractional indexes are obtained. Such equations appear when the interaction of vector electromagnetic fields with a circular edge of the conductive open cone in the low-frequency region is analyzed. The approximate formulae for the Legendre functions representation are derived. These formulae are used for transition from serious equations to the infinite systems of linear algebraic equations, which contain matrix operators of the convolution type. The operators inverse to them are applied for finding the solution in the required class of sequences. The example of the interaction of TM- and TE-waves with the edge of finite cone is given.

Фіз.-мех. ін-т ім. Г. В. Карпенка
НАН України, Львів

Одержано
25.12.07