УДК 517.983.54

О. Д. Власій

ЗАДАЧА З НЕЛОКАЛЬНИМИ УМОВАМИ ДЛЯ РІВНЯНЬ ІЗ ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ ЗІ СТАЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

У циліндричній області, яка є добутком відрізка на тор, досліджено коректність задачі з нелокальними умовами для безтипних рівнянь із частинними похідними зі сталими коефіцієнтами. Для майже всіх значень (стосовно міри Лебеґа) двох вибраних параметрів встановлено умови коректності задачі.

1. Задачі з нелокальними крайовими умовами для рівнянь із частинними похідними є, взагалі кажучи, умовно коректними, а їх розв'язність часто пов'язана з проблемою малих знаменників. Такі задачі для гіперболічних, параболічних і безтипних рівнянь із частинними похідними вивчалися багатьма авторами (див., наприклад, [2–4, 6] та бібліографію в них).

У цій статті, яка є розвитком роботи [1], досліджено коректність задачі з нелокальними двоточковими умовами за виділеною змінною t та умовами періодичності за змінними $x_1,\ldots,x_p$ для лінійних безтипних рівнянь із частинними похідними зі сталими коефіцієнтами у циліндричній області, що є добутком відрізка на тор. Встановлено умови існування і єдиності розв'язку задачі для майже всіх значень двох вибраних параметрів цієї задачі за умов належності правих частин рівняння і нелокальних умов до просторів скінченно гладких функцій. Додаткових умов на коефіцієнти рівняння не накладається. Охоплено випадок кратних коренів характеристичних рівнянь, які виникають при побудові розв'язку задачі.

2. Надалі використовуватимемо такі позначення: Ω^p – p-вимірний тор $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^p$; $Q^p = [0,T]\times\Omega^p$; $D = \left(-\dfrac{i\partial}{\partial x_1},\ldots,-\dfrac{i\partial}{\partial x_p}\right)$; $k=(k_1,\ldots,k_p)\in\mathbb{Z}^p$, $|k| = |k_1|+\ldots+|k_p|$, $\|k\| = (k_1^2+\ldots+k_p^2)^{1/2}$, $(k,x) = k_1x_1+\ldots+k_px_p$; $\xi = (\xi_1,\ldots,\xi_p)\in\mathbb{R}^p$; $h=(h_1,\ldots,h_p)\in\mathbb{Z}_+^p$; $\xi^h = \xi_1^{h_1}\cdots\xi_p^{h_p}$; C_q, $q\in\mathbb{N}$, – додатні сталі, що не залежать від k; $\mathbf{E}_n$ – одинична матриця розміру n;

$H_\alpha(\Omega^p)$, $\alpha\in\mathbb{Z}_+$, – гільбертів простір 2π-періодичних комплекснозначних функцій $\varphi(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p}\varphi_k\exp(ik,x)$ зі скалярним добутком, що індукує норму

$$\|\varphi\|^2_{H_\alpha(\Omega^p)} = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p}\left(1+\|k\|^2\right)^\alpha|\varphi_k|^2;$$

$C^n([0,T],H_\alpha(\Omega^p))$ – простір функцій $u(t,x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p}u_k(t)\exp(ik,x)$ таких, що для кожного $t\in[0,T]$ похідні $\dfrac{\partial^j u(t,x)}{\partial t^j}$, $j=0,1,\ldots,n$, належать до простору $H_\alpha(\Omega^p)$ і як елементи цього простору є неперервними за $t\in[0,T]$. Норму в просторі $C^n([0,T],H_\alpha(\Omega^p))$ задаємо так:

$$\|u\|_{C^n([0,T],H_\alpha(\Omega^p))} = \sum_{j=0}^n\max_{t\in[0,T]}\left\|\frac{\partial^j u(t,x)}{\partial t^j}\right\|_{H_\alpha(\Omega^p)}.$$

 ISSN 0130–9420. Мат. методи та фіз.-мех. поля. 2009. – 52, № 1. – С. 34-42.

3. В області Q^p розглянемо задачу

$$L(D)[u(t,x)] \equiv \frac{\partial^n u}{\partial t^n} + \sum_{j=0}^{n-1} A_{n-j}(D) \frac{\partial^j u}{\partial t^j} = f(t,x), \tag{1}$$

$$M_q[u(t,x)] \equiv B_q(\sigma) \frac{\partial^{q-1} u}{\partial t^{q-1}}\bigg|_{t=0} - C_q(\sigma) \frac{\partial^{q-1} u}{\partial t^{q-1}}\bigg|_{t=T} = \varphi_q(x), \quad q = 1,\ldots,n, \tag{2}$$

де $A_j(\xi) = \sum_{|h| \le N_j} a_j^h \xi^h$, $j = 1,\ldots,n$, – многочлени з комплексними коефіцієнтами ($\deg A_j(\xi) = N_j \in \mathbb{Z}_+$); $B_q(\sigma) = B_q^0 + \sigma$, $C_q(\sigma) = C_q^0 - \sigma$; $B_q^0, C_q^0 \in \mathbb{C}$, $q = 1,\ldots,n$, $\sigma \in \mathbb{R}$. Вигляд області Q^p накладає умови 2π-періодичності за змінними $x_1,\ldots,x_p$ на функції $u(t,x)$, $f(t,x)$ та $\varphi_q(x)$, $q = 1,\ldots,n$.

Розв'язок задачі (1), (2) шукаємо у вигляді ряду

$$u(t,x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^p} u_k(t) \exp(ik,x).$$

Кожна з функцій $u_k(t)$, $k \in \mathbb{Z}^p$, є розв'язком такої крайової задачі:

$$L(k)[u_k(t)] \equiv u_k^{(n)}(t) + \sum_{j=0}^{n-1} A_{n-j}(k) u_k^{(j)}(t) = f_k(t), \tag{3}$$

$$M_q[u_k(t)] \equiv B_q(\sigma) u_k^{(q-1)}(0) - C_q(\sigma) u_k^{(q-1)}(T) = \varphi_{qk}, \quad q = 1,\ldots,n, \tag{4}$$

де $f_k(t)$, φ_{qk}, $k \in \mathbb{Z}^p$, – коефіцієнти Фур'є функцій $f(t,x)$ і $\varphi_q(x)$.

4. Корені характеристичного рівняння

$$\lambda^n + \sum_{j=0}^{n-1} A_{n-j}(k) \lambda^j = 0, \qquad k \in \mathbb{Z}^p,$$

позначимо через $\lambda_1(k),\ldots,\lambda_n(k)$. Занумеруємо їх так, щоби виконувались нерівності

$$\operatorname{Re}\lambda_1(k) \le \operatorname{Re}\lambda_2(k) \le \ldots \le \operatorname{Re}\lambda_n(k).$$

Запровадимо такі позначення (див. [9]):

$$v(\rho;t) = \exp(\rho t), \qquad F_1(\rho_1;t) = v(\rho_1;t),$$

$$F_2(\rho_1,\rho_2;t) = \int_0^1 \frac{\partial v(\rho;t)}{\partial \rho}\bigg|_{\rho=\rho_1+\xi_1(\rho_2-\rho_1)} d\xi_1,$$

$$F_r(\rho_1,\ldots,\rho_r;t) =$$

$$= \int_0^1 \int_0^{\xi_1} \ldots \int_0^{\xi_{r-2}} \frac{\partial^{r-1} v(\rho;t)}{\partial \rho^{r-1}}\bigg|_{\rho=\rho_1+\xi_1(\rho_2-\rho_1)+\ldots+\xi_{r-1}(\rho_r-\rho_{r-1})} d\xi_{r-1}\ldots d\xi_2\, d\xi_1,$$

$$r = 3,\ldots,n, \qquad \rho_1,\ldots,\rho_n \in \mathbb{C}.$$

Функції

$$u_{kj}(t) = F_j(\lambda_1(k),\ldots,\lambda_j(k);t), \qquad j = 1,\ldots,n,$$

утворюють фундаментальну систему розв'язків рівняння

$$L(k)[u_k(t)] = 0.$$

Вронскіан цієї системи в точці $t = 0$ дорівнює одиниці.

Зауважимо, що у випадку попарно різних значень $\rho_1,\dots,\rho_n$ функції $F_r(\rho_1,\dots,\rho_r;t)$ можна означити як розділені різниці:

$$F_1(\rho_1;t)=v(\rho_1;t)=\exp(\rho_1 t),$$

$$F_r(\rho_1,\dots,\rho_r;t)=\frac{F_{r-1}(\rho_1,\dots,\rho_{r-2},\rho_r;t)-F_{r-1}(\rho_1,\dots,\rho_{r-2},\rho_{r-1};t)}{\rho_r-\rho_{r-1}}=$$

$$=\frac{1}{\rho_r-\rho_{r-1}}\int\limits_{\rho_{r-1}}^{\rho_r}\frac{\partial F_{r-1}(\rho_1,\dots,\rho_{r-2},\xi;t)}{\partial\xi}d\xi,\qquad r=2,\dots,n.$$

Для скорочення записів позначатимемо також

$$\Phi_j^{j+r}(k;t)=F_{r+1}(\lambda_j(k),\lambda_{j+1}(k),\dots,\lambda_{j+r}(k);t).$$

Лема 1. *Для функцій* $F_j(\rho_1,\dots,\rho_j;t)$, $j=1,\dots,n$, *справджуються такі формули*:

$$\left.\frac{\partial^s F_j(\rho_1,\dots,\rho_j;t)}{\partial t^s}\right|_{t=a+b}=\sum_{r=1}^{j}\left.\frac{\partial^s F_r(\rho_1,\dots,\rho_r;t)}{\partial t^s}\right|_{t=a}F_{j-r+1}(\rho_r,\dots,\rho_j;b),\qquad(5)$$

де a, b *− довільні дійсні числа,* $s=0,1,\dots,n$.

Д о в е д е н н я. Доведемо, що для $j=1,\dots,n$ справджується рівність

$$F_j(\rho_1,\dots,\rho_j;a+b)=\sum_{r=1}^{j}F_r(\rho_1,\dots,\rho_r;a)F_{j-r+1}(\rho_r,\dots,\rho_j;b).\qquad(6)$$

Для $j=1$ рівність (6) є очевидною: $F_1(\rho_1;a+b)=F_1(\rho_1;a)F_1(\rho_1;b)$. Припустимо, що вона справджується для певного фіксованого значення $j=j_0<n$. Доведемо, що вона справджуватиметься і для $j=j_0+1$.

У випадку $\rho_{j_0+1}\neq\rho_{j_0}$ маємо

$$F_{j_0+1}(\rho_1,\dots,\rho_{j_0+1};a+b)=$$

$$=\frac{F_{j_0}(\rho_1,\dots,\rho_{j_0-1},\rho_{j_0+1};a+b)-F_{j_0}(\rho_1,\dots,\rho_{j_0-1},\rho_{j_0};a+b)}{\rho_{j_0+1}-\rho_{j_0}}=$$

$$=\sum_{r=1}^{j_0-1}F_r(\rho_1,\dots,\rho_r;a)\frac{F_{j_0-r+1}(\rho_r,\dots,\rho_{j_0-1},\rho_{j_0+1};b)-F_{j_0-r+1}(\rho_r,\dots,\rho_{j_0-1},\rho_{j_0};b)}{\rho_{j_0+1}-\rho_{j_0}}+$$

$$+\frac{F_{j_0}(\rho_1,\dots,\rho_{j_0-1},\rho_{j_0+1};a)F_1(\rho_{j_0+1};b)-F_{j_0}(\rho_1,\dots,\rho_{j_0-1},\rho_{j_0};a)F_1(\rho_{j_0};b)}{\rho_{j_0+1}-\rho_{j_0}}=$$

$$=\sum_{r=1}^{j_0-1}F_r(\rho_1,\dots,\rho_r;a)F_{j_0-r+2}(\rho_r,\dots,\rho_{j_0},\rho_{j_0+1};b)+$$

$$+F_{j_0+1}(\rho_1,\dots,\rho_{j_0},\rho_{j_0+1};a)F_1(\rho_{j_0+1};b)+F_{j_0}(\rho_1,\dots,\rho_{j_0-1},\rho_{j_0};a)F_2(\rho_{j_0},\rho_{j_0+1};b)=$$

$$=\sum_{r=1}^{j_0+1}F_r(\rho_1,\dots,\rho_r;a)F_{j_0-r+2}(\rho_r,\dots,\rho_{j_0},\rho_{j_0+1};b).$$

Для випадку $\rho_{j_0+1}\neq\rho_{j_0}$ рівність (6) доведено.

У випадку, коли $\rho_{j_0+1} = \rho_{j_0}$, справджується рівність

$$F_{j_0+1}(\rho_1,\dots,\rho_{j_0+1};t) = \frac{\partial F_{j_0}(\rho_1,\dots,\rho_{j_0};t)}{\partial \rho_{j_0}},$$

звідси отримуємо

$$F_{j_0+1}(\rho_1,\dots,\rho_{j_0+1};a+b) = \frac{\partial F_{j_0}(\rho_1,\dots,\rho_{j_0};a+b)}{\partial \rho_{j_0}} = \frac{\partial F_{j_0}(\rho_1,\dots,\rho_{j_0};a)}{\partial \rho_{j_0}} F_1(\rho_{j_0};b) +$$

$$+ \sum_{r=1}^{j_0} F_r(\rho_1,\dots,\rho_r;a) \frac{\partial F_{j_0+r-1}(\rho_r,\dots,\rho_{j_0};b)}{\partial \rho_{j_0}} =$$

$$= \sum_{r=1}^{j_0+1} F_r(\rho_1,\dots,\rho_r;a) F_{j_0-r+2}(\rho_r,\dots,\rho_{j_0},\rho_{j_0+1};b).$$

Для випадку $\rho_{j_0+1} = \rho_{j_0}$ рівність (6) доведено теж.

Продиференціювавши s разів рівність (6) за змінною a, отримуємо (5), що й треба було довести. ◊

Введемо позначення $\overline{\lambda(k)} = \max\limits_{j=1,\dots,n} \{1, |\lambda_j(k)|\}$.

Для довільних $t \ge 0$ справджуються оцінки

$$\left|u_{kj}^{(s)}(t)\right| \le C_1 \left(\overline{\lambda(k)}\right)^s \exp\left(\operatorname{Re}\lambda_j(k)t\right), \qquad j = 1,\dots,n. \tag{7}$$

5. Характеристичний визначник задачі (3), (4) має вигляд

$$\Delta(k) \equiv \det \left\| M_q[u_{kj}] \right\|_{q,j=1}^{n} = \det \left\| B_q(\sigma) u_{kj}^{(q-1)}(0) - C_q(\sigma) u_{kj}^{(q-1)}(T) \right\|_{q,j=1}^{n}.$$

Теорема 1. *Для єдиності розв'язку задачі* (1), (2) *в просторі* $C^n([0,T], H_\alpha(\Omega^p))$ *необхідно та достатньо, щоб виконувалась умова*

$$\forall k \in \mathbb{Z}^p \qquad \Delta(k) \ne 0. \tag{8}$$

Д о в е д е н н я аналогічне до доведення теореми 3.7.5 із [6].

Надалі вважатимемо, що умова (8) справджується. Тоді для кожного $k \in \mathbb{Z}^p$ існує єдиний розв'язок $u_k(t)$ задачі (3), (4), а формальний розв'язок задачі (1), (2) зображується рядом

$$u(t,x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} \left\{ U_k(t) + \int_0^T G_k(t,\tau) f_k(\tau)\, d\tau \right\} \exp(ik,x), \tag{9}$$

в якому $U_k(t) = \sum\limits_{q,j=1}^{n} \varphi_{qk} \dfrac{\Delta_{qj}(k)}{\Delta(k)} u_{kj}(t)$, $G_k(t,\tau)$ − функція Ґріна задачі (3), (4), яка зображується формулою

$$G_k(t,\tau) = g_k(t,\tau) + \sum_{q,j=1}^{n} M_q[g_k(t,\tau)] \frac{\Delta_{qj}(k)}{\Delta(k)} u_{kj}(t),$$

де

$$g_k(t,\tau) = \frac{1}{2} u_{kn}(t-\tau) \operatorname{sgn}(t-\tau),$$

$\Delta_{qj}(k)$ − алгебричне доповнення у визначнику $\Delta(k)$ елемента, що стоїть на перетині q-го рядка та j-го стовпця.

Збіжність ряду (9), взагалі кажучи, пов'язана із проблемою малих знаменників, оскільки вираз $|\Delta(k)|$, будучи додатним, може набувати як завгодно близьких до нуля значень для нескінченної кількості векторів $k \in \mathbb{Z}^p$.

Нехай $\gamma_0 = \max_{1 \le j \le n} \left\{ \frac{N_j}{j} \right\}$. Тоді

$$\left|\lambda_j(k)\right| \le C_2 (1 + \|k\|)^{\gamma_0}, \qquad k \in \mathbb{Z}^p,$$

де стала C_2 не залежить від k (див. [8, ст. 101]).

У квадраті $K = \{(t,\tau) \in \mathbb{R}^2 : t \in [0,T],\ \tau \in [0,T]\}$ (за винятком сторін $\tau = 0$ та $\tau = T$ і діагоналі $\tau = t$) для функції Ґріна задачі (3), (4) справджується таке зображення:

$$G_k(t,\tau) = \frac{1}{\Delta(k)} \det \begin{Vmatrix} w_k(t-\tau) & u_{k1}(t) & \cdots & u_{kn}(t) \\ -C_1(\sigma) u_{kn}(T-\tau) & M_1[u_{k1}] & \ldots & M_1[u_{kn}] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -C_n(\sigma) u_{kn}^{(n-1)}(T-\tau) & M_n[u_{k1}] & \ldots & M_n[u_{kn}] \end{Vmatrix}, \qquad (10)$$

де $w_k(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ u_{kn}(t), & t > 0. \end{cases}$

Легко переконатися, що ця функція задовольняє всі властивості функції Ґріна (див. [5]).

Введемо позначення

$$K_1 = \{(t,\tau) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le t < \tau < T\}, \qquad K_2 = \{(t,\tau) \in \mathbb{R}^2 : 0 < \tau < t \le T\}.$$

Лема 2. *У кожній із областей K_1 та K_2 справджуються оцінки*

$$\left|\frac{\partial^s G_k(t,\tau)}{\partial t^s}\right| \le \frac{C_3}{|\Delta(k)|} \left(\overline{\lambda(k)}\right)^{n(n-1)/2+s} \prod_{j=1}^{n} \max\left\{1, \exp\left(\operatorname{Re}\lambda_j(k) T\right)\right\},$$

$$s = 0, 1, \ldots, n. \qquad (11)$$

Д о в е д е н н я. Введемо такі позначення:

$$\mathbf{B} = \left\|\mathbf{b}_{qj}\right\|_{q,j=1}^{n} = \left\|B_q(\sigma) u_{kj}^{(q-1)}(0)\right\|_{q,j=1}^{n},$$

$$\mathbf{C}(t) = \left\|\mathbf{c}_{qj}(t)\right\|_{q,j=1}^{n} = \left\|-C_q(\sigma) u_{kj}^{(q-1)}(t)\right\|_{q,j=1}^{n},$$

$$\mathbf{M} = \left\|M_q[u_{kj}]\right\|_{q,j=1}^{n},$$

$$\mathbf{F}(t) = \left\|\mathbf{f}_{qj}(t)\right\|_{q,j=1}^{n} = \begin{Vmatrix} \Phi_1^1(k;t) & \Phi_1^2(k;t) & \cdots & \Phi_1^n(k;t) \\ 0 & \Phi_2^2(k,t) & \cdots & \Phi_2^n(k;t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \Phi_n^n(k;t) \end{Vmatrix},$$

$\mathbf{X} = \|\mathbf{B} \quad \mathbf{C}(T-\tau)\|$ − матриця розміру $n \times 2n$,

$\mathbf{Y} = \begin{Vmatrix} \mathbf{E}_n \\ \mathbf{F}(\tau) \end{Vmatrix}$ − матриця розміру $2n \times n$.

Всередині трикутника K_1, розклавши визначник (10) за першим рядком, отримуємо

$$\frac{\partial^s G_k(t,\tau)}{\partial t^s} = \frac{1}{\Delta(k)} \sum_{j=1}^{n} u_{kj}^{(s)}(t) \det \mathbf{M}_j,$$

де $\mathbf{M}_j$ − матриця, отримана із матриці $\mathbf{M}$ шляхом заміни j-го стовпця стовпцем $\operatorname{col}\left(C_q(\sigma) u_{kn}^{(q-1)}(T-\tau)\right)_{q=1}^{n}$. Зауважимо, що кожну з матриць $\mathbf{M}_j$, $j = 1, \ldots, n$, можна подати у вигляді добутку

$$\mathbf{M}_j = \mathbf{X} \times \mathbf{Y}_j,$$

де $\mathbf{Y}_j$ – матриця, отримана із матриці $\mathbf{Y}$ шляхом заміни j-го стовпця стовпцем $\operatorname{col}(\underbrace{0,\ldots,0}_{2n-1},1)$ (висотою $2n$ елементів).

Згідно з формулою Біне – Коші [7],

$$\det \mathbf{M}_j = \sum_{1\le r_1<r_2<\ldots<r_n\le 2n} \det \mathbf{X}_{r_1,r_2,\ldots,r_n} \det(\mathbf{Y}_j)_{r_1,r_2,\ldots,r_n},$$

де $\mathbf{X}_{r_1,r_2,\ldots,r_n}$ – матриця, отримана з матриці $\mathbf{X}$ шляхом викреслення з неї стовпців з номерами $r_1,r_2,\ldots,r_n$; $(\mathbf{Y}_j)_{r_1\cdot r_2,\ldots,r_n}$ – матриця, отримана з матриці $\mathbf{Y}_j$ шляхом викреслення з неї рядків із номерами $r_1,r_2,\ldots,r_n$.

На підставі оцінок

$$\left|\mathbf{b}_{qj}\right| \le C_4 \left(\overline{\lambda(k)}\right)^{q-1}, \qquad q,j=1,\ldots,n, \tag{12}$$

$$\left|\mathbf{c}_{qj}(T-\tau)\right| \le C_5 \left(\overline{\lambda(k)}\right)^{q-1} \exp\left(\operatorname{Re}\lambda_j(k)(T-\tau)\right), \qquad q,j=1,\ldots,n, \tag{13}$$

$$\left|\mathbf{f}_{qj}(\tau)\right| \le C_6 \left(\overline{\lambda(k)}\right)^{q-1} \exp\left(\operatorname{Re}\lambda_j(k)\tau\right), \qquad q,j=1,\ldots,n, \tag{14}$$

отримуємо такі оцінки:

$$\left|\det \mathbf{X}_{r_1,r_2,\ldots,r_n}\right| \le C_7 \left(\overline{\lambda(k)}\right)^{n(n-1)/2} \prod_{j=1}^{n} \max\left\{1, \exp\left(\operatorname{Re}\lambda_j(k)(T-\tau)\right)\right\},$$

$$\left|\det(\mathbf{Y}_j)_{r_1,r_2,\ldots,r_n}\right| \le C_8 \prod_{r=1,\ldots,n;\ r\ne j} \max\left\{1, \exp\left(\operatorname{Re}\lambda_j(k)\tau\right)\right\},$$

звідки випливає, що всередині області K_1 справджуються оцінки (11).

Всередині області K_2 на підставі рівності (5) отримуємо

$$\frac{\partial^s G_k(t,\tau)}{\partial t^s} = \frac{1}{\Delta(k)} \det(\bar{\mathbf{X}} \times \bar{\mathbf{Y}}),$$

де $\bar{\mathbf{X}}$ – матриця розміру $(n+1)\times 2n$, отримана з матриці $\mathbf{X}$ шляхом дописування до неї зверху рядка $\left(\underbrace{0,\ldots,0}_{n}, u_{k1}^{(s)}(t-\tau),\ldots,u_{kn}^{(s)}(t-\tau)\right)$, а $\bar{\mathbf{Y}}$ – матриця розміру $2n\times(n+1)$, отримана з матриці $\mathbf{Y}$ шляхом дописування до неї зліва стовпця $\operatorname{col}(\underbrace{0,\ldots,0}_{2n-1},1)$. Отже,

$$\frac{\partial^s G_k(t,\tau)}{\partial t^s} = \frac{1}{\Delta(k)} \sum_{1\le r_1<r_2<\ldots<r_{n-1}\le 2n} \det \bar{\mathbf{X}}_{r_1,r_2,\ldots,r_{n-1}} \det \bar{\mathbf{Y}}_{r_1,r_2,\ldots,r_{n-1}},$$

де $\bar{\mathbf{X}}_{r_1,r_2,\ldots,r_{n-1}}$ – матриця, отримана з матриці $\bar{\mathbf{X}}$ шляхом викреслення з неї стовпців із номерами $r_1,r_2,\ldots,r_{n-1}$; $\bar{\mathbf{Y}}_{r_1\cdot r_2,\ldots,r_{n-1}}$ – матриця, отримана з матриці $\bar{\mathbf{Y}}$ шляхом викреслення з неї рядків із номерами $r_1,r_2,\ldots,r_{n-1}$.

На підставі оцінок (7), (12)–(14) отримуємо

$$\left|\det \bar{\mathbf{X}}_{r_1,r_2,\ldots,r_{n-1}}\right| \le C_9 \left(\overline{\lambda(k)}\right)^{n(n-1)/2} \prod_{j=1}^{n} \max\left\{1, \exp\left(\operatorname{Re}\lambda_j(k)(T-\tau)\right)\right\},$$

$$\left|\det \bar{\mathbf{Y}}_{r_1,r_2,\ldots,r_{n-1}}\right| \le C_{10} \prod_{r=1}^{n} \max\left\{1, \exp\left(\operatorname{Re}\lambda_j(k)\tau\right)\right\},$$

звідки випливає, що всередині області K_2 справджуються оцінки (11). Лему доведено. ◊

Із леми 2 випливає, що в квадраті K справджуються оцінки

$$\left|\frac{\partial^s}{\partial t^s}\int_0^T G_k(t,\tau)f_k(\tau)\,d\tau\right| \le$$

$$\le \frac{C_{11}}{|\Delta(k)|}\left(\overline{\lambda(k)}\right)^{n(n-1)/2+s}\prod_{j=1}^{n}\max\{1,\,\exp(\operatorname{Re}\lambda_j(k)T)\}\left(\int_0^T |f_k(\tau)|^2\,d\tau\right)^{1/2},$$

$$s = 0,1,\ldots,n. \qquad (15)$$

Теорема 2. *Нехай виконується умова* (8) *та існують додатні сталі* C_{12}, γ_1 *такі, що для всіх* (*крім скінченної кількості*) *векторів* $k \in \mathbb{Z}^p$ *справджуються нерівності*

$$|\Delta(k)| \ge C_{12}\left(\sqrt{1+\|k\|^2}\right)^{-\gamma_1}\prod_{j=1}^{n}\max\{1,\,\exp(\operatorname{Re}\lambda_j(k)T)\}. \qquad (16)$$

Якщо $f(t,x) \in C([0,T], H_{z_0}(\Omega^p))$, $\varphi_q(x) \in H_{z_0+\gamma_0(1-q)}(\Omega^p)$, $q = 1,\ldots,n$, *де* $z_0 = \alpha + n + \gamma_1 + \gamma_0 n(n+1)/2$, *то в просторі* $C^n([0,T], H_\alpha(\Omega^p))$ *існує єдиний розв'язок задачі* (1), (2), *який зображається рядом* (9) *і неперервно залежить від функцій* $f(t,x)$ *та* $\varphi_q(x)$, $q = 1,\ldots,n$.

Д о в е д е н н я. За умов теореми для кожного $k \in \mathbb{Z}^p$ на підставі (7), (9) і (15) отримуємо оцінки

$$\left|\frac{d^s U_k(t)}{dt^s}\right| \le C_{13}\sum_{j=1}^{n}\left(\sqrt{1+\|k\|^2}\right)^{\gamma_1+\gamma_0(n(n-1)/2-q+1+s)}\left|\varphi_{qk}\right|,$$

$$\left|\frac{\partial^s}{\partial t^s}\int_0^T G_k(t,\tau)f_k(\tau)\,d\tau\right| \le C_{14}\left(\sqrt{1+\|k\|^2}\right)^{\gamma_1+\gamma_0(n(n-1)/2+s)}\left(\int_0^T |f_k(\tau)|^2\,d\tau\right)^{1/2},$$

де $s = 0,1,\ldots,n$. На підставі останніх двох нерівностей отримуємо

$$\|u\|^2_{C^n([0,T],H_\alpha(\Omega^p))} \le$$

$$\le C_{15}\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}\left(1+\|k\|^2\right)^{\alpha+n}\left(C_{13}\sum_{q=1}^{n}\left(\sqrt{1+\|k\|^2}\right)^{\gamma_1+\gamma_0(n(n+1)/2-q+1)}\left|\varphi_{qk}\right| +\right.$$

$$\left. + C_{14}\left(\sqrt{1+\|k\|^2}\right)^{\gamma_1+\gamma_0(n(n+1)/2)}\left(\int_0^T |f_k(\tau)|\,d\tau\right)^{1/2}\right)^2 \le$$

$$\le C_{16}\sum_{q=1}^{n}\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}\left(1+\|k\|^2\right)^{z_0+\gamma_0(1-q)}\left|\varphi_{qk}\right|^2 +$$

$$+ C_{17}\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}\left(1+\|k\|^2\right)^{z_0}\int_0^T |f_k(\tau)|\,d\tau =$$

$$= C_{16}\sum_{q=1}^{n}\left\|\varphi_q\right\|^2_{H_{z_0+\gamma_0(1-q)}(\Omega^p)} + C_{17}\|f\|^2_{C^n([0,T],H_{z_0}(\Omega^p))}.$$

Отже, норма функції $u(t,x)$ є скінченною і неперервно залежить від $\varphi_q(x)$, $q = 1,\ldots,n$, та $f(t,x)$. Теорему доведено. ◊

6. З'ясуємо, за яких умов справджуються оцінки (16). Визначник $\Delta(k) \equiv \equiv \Delta(k;T,\sigma)$ розглянемо як функцію двох параметрів: T та σ. Продиференціювавши n разів за змінною σ визначник $\Delta(k;T,\sigma)$, отримаємо

$$\frac{\partial^n \Delta(k;T,\sigma)}{\partial\sigma^n} = \frac{\partial^n}{\partial\sigma^n}\det\left\|(B_q^0+\sigma)u_{kj}^{(q-1)}(0)-(C_q^0-\sigma)u_{kj}^{(q-1)}(T)\right\|_{q,j=1}^n =$$

$$= 2^n \det\left\|u_{kj}^{(q-1)}(0)+u_{kj}^{(q-1)}(T)\right\|_{q,j=1}^n =$$

$$= 2^n \det\left\|u_{kj}^{(q-1)}(0)+\sum_{r=1}^n u_{kr}^{(q-1)}(0)\Phi_r^j(k;T)\right\|_{q,j=1}^n =$$

$$= 2^n \det\left(\mathbf{W}(0)\times(\mathbf{E}_n+\mathbf{F}(T))\right) = 2^n\prod_{j=1}^n\left(1+\Phi_j^j(k;T)\right) =$$

$$= 2^n\prod_{j=1}^n\left(1+\exp(\lambda_j(k)T)\right), \tag{17}$$

тут $\mathbf{W}(t) = \left\|u_{kj}^{(q-1)}(t)\right\|_{q,j=1}^n$.

На підставі рівності (17), використовуючи лему 1.3.4 із [6], отримуємо, що для майже всіх (стосовно міри Лебеґа в $\mathbb{R}$) значень σ справджуються оцінки

$$|\Delta(k;T,\sigma)| \geq \left(\sqrt{1+\|k\|^2}\right)^{-\gamma_2}\prod_{q=1}^n\left|1+\exp(\lambda_j(k)T)\right| \tag{18}$$

при $\gamma_2 > np$ для всіх (крім скінченної кількості) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$.

На підставі леми 3 із [1] отримуємо, що для довільної послідовності комплексних чисел $\lambda_k(k)$, $k \in \mathbb{Z}^p$, для майже всіх (стосовно міри Лебеґа в $\mathbb{R}$) чисел $T > 0$ виконується нерівність

$$|1+\exp(\lambda(k)T)| \geq \left(\sqrt{1+\|k\|^2}\right)^{-\gamma_3}\max\{1, \exp(\operatorname{Re}\lambda(k)T)\} \tag{19}$$

для всіх (крім скінченної кількості) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$ при $\gamma_3 > p$.

З огляду на нерівності (18), (19) отримуємо таке твердження.

Теорема 3. *Для майже всіх (стосовно міри Лебеґа в $\mathbb{R}^2$) пар (T,σ), де $T > 0$, $\sigma \in \mathbb{R}$, нерівність (16) справджується при $\gamma_1 > 2np$ для всіх (за винятком скінченної кількості) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$.*

Результати роботи можна поширити на випадок рівнянь, не розв'язних відносно старшої похідної за змінною t, а також на випадок крайових умов загальнішого вигляду.

1. *Власій О. Д., Пташник Б. Й.* Нелокальна крайова задача для лінійних рівнянь з частинними похідними, нерозв'язних відносно старшої похідної за часом // Укр. мат. журн. – 2007. – **59**, № 3. – С. 370–381.
2. *Гой Т. П., Пташник Б. Й.* Задача з нелокальними умовами для слабконелінійних гіперболічних рівнянь // Укр. мат. журн. – 1997. – **49**, № 2. – С. 186–195.
3. *Задорожна Н. М., Пташник Б. Й.* Нелокальна крайова задача для параболічних рівнянь зі змінними коефіцієнтами // Укр. мат. журн. – 1995. – **47**, № 7. – С. 915–921.

4. *Ильків В. С.* Нелокальная краевая задача для дифференциального уравнения в частных производных с постоянными коэффициентами // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1982. – № 5. – С. 15–19.
5. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. – Москва: Наука, 1969. – 526 с.
6. *Пташник Б. Й., Ільків В. С., Кміть І. Я., Поліщук В. М.* Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. – Київ: Наук. думка, 2002. – 416 с.
7. *Фаддеев Д. К.* Лекции по алгебре. – Москва: Наука, 1984. – 446 с.
8. *Фаддеев Д. К., Соминский И. С.* Сборник задач по высшей алгебре. – Москва: Наука, 1968. – 304 с.
9. *Шилов Г. Е.* Математический анализ. Второй специальный курс. – Москва: Наука, 1965. – 328 с.

ЗАДАЧА С НЕЛОКАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В цилиндрической области, которая является произведением отрезка на тор, исследована корректность задачи с нелокальными условиями для бестипных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами. Для почти всех значений (относительно меры Лебега) двух выбранных параметров задачи установлены условия корректности задачи.

PROBLEM WITH NONLOCAL CONDITIONS FOR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH CONSTANT COEFFICIENTS

The correctness of a problem with nonlocal conditions for untyped partial differential equations with constant coefficients in a cylindrical domain, which is a product of time segment by torus, is studied. The correctness of the problem for almost all values (concerning to Lebesque's measure) of two separated parameters of the problem is established.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
11.12.07