

ІДЕНТИФІКАЦІЯ КОЕФІЦІЄНТА ПРИ ПОХІДНІЙ ЗА ЧАСОМ У КВАЗІЛІНІЙНОМУ ПАРАБОЛІЧНОМУ РІВНЯННІ

Визначено умови існування та єдиності розв'язку оберненої задачі для одно-вимірнього квазілінійного параболічного рівняння з невідомим коефіцієнтом при похідній за часом для випадку крайових умов другого роду.

1. Вступ і формулювання задачі. У цій статті досліджується обернена задача визначення невідомого коефіцієнта при похідній за часом в одно-вимірному квазілінійному параболічному рівнянні для випадку крайових умов Неймана. Встановлено умови існування локального за часом класичного розв'язку задачі з класу неперервно диференційовних функцій та умови глобальної єдиності розв'язку в класі Гельдера.

Обернені задачі досліджували О. І. Прилепко [6], М. В. Музильов [4, 5], М. І. Іванчов [2, 12], А. Лоренці [14–16], Дж. Кеннон [8–10], Б. Ф. Джонс [13], Н. Л. Гольдман [1] та інші, в роботах яких невідомими є, в основному, старший або молодший коефіцієнт або права частина параболічного рівняння. Серед невеликої кількості робіт, пов'язаних із ідентифікацією невідомих коефіцієнтів у квазілінійному параболічному рівнянні, можна відмітити роботи М. В. Музильова [4, 5], який встановив єдиність розв'язку задачі у випадку нелінійного рівняння

$$c(u)u_t = (k(u)u_x)_x + d(u)u_x, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < T,$$

з невідомими коефіцієнтами $c(u)$, $k(u)$, $d(u)$. Дослідженню питання стійкості розв'язку [14] для рівняння

$$u_t = b(t)c(u)u_{xx}, \quad x > 0, \quad 0 < t < T,$$

а також встановленню умов існування, єдиності та стійкості розв'язку оберненої задачі [16] у випадку рівняння

$$u_t = [v(u(x,t))u_x]_x + f(x,t), \quad 0 < x < \ell, \quad 0 < t < T,$$

з невідомими b та v відповідно присвячені роботи А. Лоренці.

В області $Q_T = (0, h) \times (0, T)$ розглянемо рівняння

$$c(t)u_t = a(x, t, u, u_x)u_{xx} + b(x, t, u, u_x) \quad (1)$$

з невідомим коефіцієнтом $c(t) > 0$, $t \in [0, T]$, початковою умовою

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in [0, h], \quad (2)$$

крайовими умовами

$$u_x(0, t) = \mu_1(t), \quad u_x(h, t) = \mu_2(t), \quad t \in [0, T], \quad (3)$$

та умовою перевизначення

$$u(0, t) = \mu_3(t), \quad t \in [0, T]. \quad (4)$$

Припустимо, що виконуються умови:

$$(A1) \quad a(x, t, u, v) \in C^{1,0,1,1}(\bar{Q}_T \times \mathbb{R}^2), \quad b(x, t, u, v) \in C^{1,0,1,1}(\bar{Q}_T \times \mathbb{R}^2),$$

$$\varphi(x) \in C^2[0, h], \quad \mu_i(t) \in C^1[0, T], \quad i = 1, 2, 3;$$

$$(A2) \quad a(x, t, u, v)a_0 \geq 0, \quad (x, t, u, v) \in \bar{Q}_T \times \mathbb{R}^2;$$

$$(A3) \quad a(x, t, u, v) + |a_x(x, t, u, v)| + |a_u(x, t, u, v)| + |a_v(x, t, u, v)| \leq a_1,$$

$$|b(x, t, u, v)| + |b_x(x, t, u, v)| + |b_u(x, t, u, v)| +$$

$$+ |b_v(x, t, u, v)| \cdot |(1 + |v|)| \leq v_0(1 + |v|)^2, \quad (x, t, u, v) \in \bar{Q}_T \times \mathbb{R}^2;$$

(A4) $\varphi''(x) > 0$, $x \in [0, h]$, $b(0, t, \mu_3(t), \mu_1(t)) > 0$, $\mu_3'(t) > 0$, $t \in [0, T]$;

(A5) $\varphi'(0) = \mu_1(0)$, $\varphi'(h) = \mu_2(0)$.

Тут a_1, v_0 – додатні сталі.

Теорема 1. При виконанні умов **(A1)–(A5)** можна вказати таке число t_0 , $0 < t_0 \leq T$, що розв'язок $(c, u) \in C[0, t_0] \times C^{2,1}(\bar{Q}_{t_0})$, $c(t) > 0$, $t \in [0, t_0]$, задачі (1)–(4) існує.

Теорема 2. Нехай a, a_u, a_v, b_u, b_v – неперервні та задовольняють умову Гельдера за змінною x в $\bar{Q}_T \times \mathbb{R}^2$ локально,

$$\mu_3(t) \neq 0, \quad t \in [0, T], \quad a(x, t, u, v) \geq a_0 > 0, \quad (x, t, u, v) \in \bar{Q}_T \times \mathbb{R}^2.$$

Тоді розв'язок $(c, u) \in H^{\gamma/2}[0, T] \times H^{2+\gamma, 1+\gamma}(\bar{Q}_T)$ задачі (1)–(4) єдиний.

2. Доведення існування розв'язку задачі. Для доведення **теорему 1** використаємо теорему Шаудера про нерухому точку компактного оператора. Для цього зведемо задачу (1)–(4) до системи рівнянь. Щоб отримати рівняння відносно $c(t)$, покладемо в рівнянні (1) $x = 0$:

$$c(t) = \frac{a(0, t, \mu_3(t), \mu_1(t))u_{xx}(0, t) + b(0, t, \mu_3(t), \mu_1(t))}{\mu_3'(t)}. \quad (5)$$

Зафіксуємо довільну точку $y \in [0, h]$ і подамо рівняння (1) у вигляді [11]

$$\begin{aligned} c(t)u_t = & a(y, t, u(y, t), u_y(y, t))u_{xx} + (a(x, t, u(x, t), u_x(x, t)) - \\ & - a(y, t, u(y, t), u_y(y, t)))u_{xx} + b(x, t, u, u_x). \end{aligned} \quad (6)$$

У припущенні, що функція $c(t)$ є відомою, зводимо задачу (6), (2), (3) до нелінійного інтегро-диференціального рівняння

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \int_0^h \varphi(\xi)G_2(x, t, \xi, 0; y) d\xi - \\ & - \int_0^t \frac{a(y, \tau, u(y, \tau), u_y(y, \tau))}{c(\tau)} \mu_1(\tau)G_2(x, t, 0, \tau; y) d\tau + \\ & + \int_0^t \frac{a(y, \tau, u(y, \tau), u_y(y, \tau))}{c(\tau)} \mu_2(\tau)G_2(x, t, h, \tau; y) d\tau + \\ & + \int_0^t \int_0^h \frac{b(\xi, \tau, u(\xi, \tau), u_\xi(\xi, \tau))}{c(\tau)} G_2(x, t, \xi, \tau; y) d\xi d\tau + \\ & + \int_0^t \frac{d\tau}{c(\tau)} \int_0^h (a(\xi, \tau, u(\xi, \tau), u_\xi(\xi, \tau)) - a(y, \tau, u(y, \tau), u_y(y, \tau))) \times \\ & \times u_{\xi\xi}(\xi, \tau)G_2(x, t, \xi, \tau; y) d\xi, \end{aligned} \quad (7)$$

де

$$\begin{aligned} G_i(x, t, \xi, \tau; y) = & \frac{1}{2\sqrt{\pi(\theta(t, y) - \theta(\tau, y))}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\exp\left(-\frac{(x - \xi + 2nh)^2}{4(\theta(t, y) - \theta(\tau, y))}\right) + \right. \\ & \left. + (-1)^i \exp\left(-\frac{(x + \xi + 2nh)^2}{4(\theta(t, y) - \theta(\tau, y))}\right) \right), \quad i = 1, 2, \\ \theta(t, y) = & \int_0^t \frac{a(y, \tau, u(y, \tau), u_y(y, \tau))}{c(\tau)} d\tau. \end{aligned}$$

Зауважимо, що функції Гріна $G_i(x, t, \xi, \tau; y)$ першої ($i = 1$) та другої ($i = 2$) крайових задач для рівняння

$$c(t)z_t = a(y, t, z(y, t), z_y(y, t))z_{xx},$$

залежать як від параметра y , так і від невідомих c , u , u_x , що містяться в функції $\theta(t, y)$. Для спрощення позначень залежність від останніх не писатимемо.

Обчислимо з рівняння (7) другу похідну u_{xx} , враховуючи рівності

$$G_{2xx}(x, t, \xi, \tau; y) = G_{2\xi\xi}(x, t, \xi, \tau; y), \quad G_{2x}(x, t, \xi, \tau; y) = -G_{1\xi}(x, t, \xi, \tau; y),$$

$$G_{2xx}(x, t, \xi, \tau; y) = -\frac{c(\tau)}{a(y, \tau, u(y, \tau), u_y(y, \tau))} G_{2\tau}(x, t, \xi, \tau; y),$$

умови **(A1)** та інтегруючи частинами. Поклавши в отриманому виразі $y = x$, запишемо рівняння

$$\begin{aligned} u_{xx}(x, t) = & \int_0^h \varphi''(\xi) G_2(x, t, \xi, 0; x) d\xi - \int_0^t \mu_1'(\tau) G_2(x, t, 0, \tau; x) d\tau + \\ & + \int_0^t \mu_2'(\tau) G_2(x, t, h, \tau; x) d\tau - \int_0^t \frac{d\tau}{c(\tau)} \int_0^h [b_\xi(\xi, \tau, u(\xi, \tau), u_\xi(\xi, \tau)) + \\ & + b_u(\xi, \tau, u(\xi, \tau), u_\xi(\xi, \tau)) u_\xi(\xi, \tau) + b_v(\xi, \tau, u(\xi, \tau), u_\xi(\xi, \tau)) \times \\ & \times u_{\xi\xi}(\xi, \tau)] G_{2\xi}(x, t, \xi, \tau; x) d\xi + \int_0^t \frac{d\tau}{c(\tau)} \int_0^h [a(\xi, \tau, u(\xi, \tau), u_\xi(\xi, \tau)) - \\ & - a(x, \tau, u(x, \tau), u_x(x, \tau))] u_{\xi\xi}(\xi, \tau) G_{2\xi\xi}(x, t, \xi, \tau; x) d\xi. \end{aligned} \quad (8)$$

Оскільки

$$u(x, t) = \mu_3(t) + \int_0^x u_x(x, t) dx, \quad u_x(x, t) = \mu_1(t) + \int_0^x u_{xx}(x, t) dx, \quad (9)$$

то, таким чином, задачу (1)–(4) зведено до системи рівнянь (5), (8) відносно невідомих c , u_{xx} .

Для того щоб застосувати теорему Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора, необхідно встановити оцінки зверху та знизу розв'язків системи (5), (8).

Якщо розглянути задачу

$$\begin{aligned} c(t)z_t = & a(y, t, z(y, t), z_y(y, t))z_{xx}, \quad (x, t) \in Q_T, \\ z(x, 0) = & 1, \quad x \in [0, h], \quad z_x(0, t) = 0, \quad z_x(h, t) = 0, \quad t \in [0, T], \end{aligned}$$

то для будь-якого $y \in [0, h]$ при відомій $c(t)$ розв'язком цієї задачі буде

$$u(x, t) = \int_0^h G_2(x, t, \xi, 0; y) d\xi = 1. \quad (10)$$

Звідси маємо

$$\int_0^h \varphi''(\xi) G_2(x, t, \xi, 0; x) d\xi \geq \min_{x \in [0, h]} \varphi''(x). \quad (11)$$

Серед доданків, що входять в u_{xx} у формулі (8), всі, крім першого, прямують до нуля при $t \rightarrow 0$. Тому існує такий проміжок $[0, T_0]$, $0 < T_0 \leq T$, на якому буде виконуватись нерівність

$$\begin{aligned} \int_0^h \varphi''(\xi) G_2(x, t, \xi, 0; x) d\xi \geq & \int_0^t \mu_1'(\tau) G_2(x, t, 0, \tau; x) d\tau - \\ & - \int_0^t \mu_2'(\tau) G_2(x, t, h, \tau; x) d\tau + \int_0^t \frac{d\tau}{c(\tau)} \int_0^h [b_\xi(\xi, \tau, u(\xi, \tau), u_\xi(\xi, \tau)) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + b_u(\xi, \tau, u(\xi, \tau), u_\xi(\xi, \tau))u_\xi(\xi, \tau) + \\
& + b_v(\xi, \tau, u(\xi, \tau), u_\xi(\xi, \tau))u_{\xi\xi}(\xi, \tau)]G_{2\xi}(x, t, \xi, \tau; x) d\xi - \\
& - \int_0^t \frac{d\tau}{c(\tau)} \int_0^h [a(\xi, \tau, u(\xi, \tau), u_\xi(\xi, \tau)) - \\
& - a(x, \tau, u(x, \tau), u_x(x, \tau))]u_{\xi\xi}(\xi, \tau)G_{2\xi\xi}(x, t, \xi, \tau; x) d\xi, \quad (12)
\end{aligned}$$

звідки

$$u_{xx}(x, t) \geq 0, \quad (x, t) \in \bar{Q}_{T_0}.$$

Отже, згідно з припущеннями **(A2)**, **(A4)** з рівняння (5) маємо

$$c(t) \geq A_0 > 0, \quad t \in [0, T_0], \quad (13)$$

де константа A_0 залежить тільки від відомих величин. Звідси маємо оцінку

$$\theta(t, x) \leq C_1, \quad (x, t) \in \bar{Q}_{T_0}. \quad (14)$$

Знайдемо оцінку другої похідної $w = u_{xx}$. З рівності (10) та оцінки [12]

$$G_2(x, t, \xi, \tau; x) \leq C_2 + \frac{C_3}{\sqrt{\theta(t, x) - \theta(\tau, x)}} \quad (15)$$

маємо

$$\begin{aligned}
& \left| \int_0^h \varphi''(\xi)G_2(x, t, \xi, 0; x) d\xi - \int_0^t \mu_1'(\tau)G_2(x, t, 0, \tau; x) d\tau + \right. \\
& \left. + \int_0^t \mu_2'(\tau)G_2(x, t, h, \tau; x) d\tau \right| \leq C_4 + C_5 \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\theta(t, x) - \theta(\tau, x)}}.
\end{aligned}$$

Нехай

$$v(x, t) = u_x(x, t), \quad V(t) = \max_{x \in [0, h]} |v(x, t)|, \quad W(t) = \max_{x \in [0, h]} |w(x, t)|.$$

З рівності (9) маємо

$$|v(x, t)| \leq C_6 + C_7 W(t). \quad (16)$$

На підставі нерівності

$$z^p \exp(-qz^2) \leq C_{p,q} < \infty \quad \forall z \in [0, \infty), \quad p \geq 0, \quad q > 0,$$

отримаємо

$$\begin{aligned}
|G_{2\xi}(x, t, \xi, \tau; x)| & \leq \frac{C_8}{\theta(t, x) - \theta(\tau, x)} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\exp\left(-\frac{(x - \xi + 2nh)^2}{8(\theta(t, x) - \theta(\tau, x))}\right) + \right. \\
& \left. + \exp\left(-\frac{(x + \xi + 2nh)^2}{8(\theta(t, x) - \theta(\tau, x))}\right) \right).
\end{aligned}$$

Звідси з огляду на умови **(A3)** та оцінки (14), (16) отримаємо

$$\begin{aligned}
& \left| \int_0^t \frac{d\tau}{c(\tau)} \int_0^h G_{2\xi}(x, t, \xi, \tau; x) [b_\xi(\xi, \tau, u(\xi, \tau), v(\xi, \tau)) + \right. \\
& \left. + b_u(\xi, \tau, u(\xi, \tau), v(\xi, \tau))v(\xi, \tau) + b_v(\xi, \tau, u(\xi, \tau), v(\xi, \tau))w(\xi, \tau)] d\xi \right| \leq \\
& \leq C_9 + C_{10} \int_0^t \frac{W(\tau) + W^2(\tau) + W^3(\tau)}{c(\tau)\sqrt{\theta(t, x) - \theta(\tau, x)}} d\tau.
\end{aligned}$$

Оскільки за теоремою Лагранжа

$$f(x) - f(y) = (x - y) \int_0^1 f'(z) \Big|_{z=y+\alpha(x-y)} d\alpha,$$

то

$$\begin{aligned} & |a(\xi, \tau, u(\xi, \tau), v(\xi, \tau)) - a(x, \tau, u(x, \tau), v(x, \tau))| \leq \\ & \leq (C_{11} + C_{12}V(t) + C_{13}W(\tau))|\xi - x| \leq (C_{14} + C_{15}W(\tau))|\xi - x|, \end{aligned}$$

де сталі C_{11}, C_{12}, C_{13} визначаються через відомі величини. Тоді, враховуючи оцінку [7]

$$\int_0^h |\xi - x| |G_{2\xi\xi}(x, t, \xi, \tau; x)| d\xi \leq \frac{C_{16}}{\sqrt{\theta(t, x) - \theta(\tau, x)}},$$

отримаємо

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^t \frac{d\tau}{c(\tau)} \int_0^h [a(\xi, \tau, u(\xi, \tau), u_\xi(\xi, \tau)) - a(x, \tau, u(x, \tau), u_x(x, \tau))] u_{\xi\xi}(\xi, \tau) \times \right. \\ & \left. \times G_{2\xi\xi}(x, t, \xi, \tau; x) d\xi \right| \leq C_{17} \int_0^t \frac{W(\tau) + W^2(\tau)}{c(\tau)\sqrt{\theta(t, x) - \theta(\tau, x)}} d\tau. \end{aligned}$$

Підсумовуючи всі оцінки, з рівняння (8) приходимо до нерівності

$$\begin{aligned} W(t) & \leq C_{18} + C_{19} \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\theta(t, x) - \theta(\tau, x)}} + \\ & + C_{20} \int_0^t \frac{W(\tau) + W^2(\tau) + W^3(\tau)}{c(\tau)\sqrt{\theta(t, x) - \theta(\tau, x)}} d\tau, \quad t \in [0, T_0], \end{aligned}$$

або, враховуючи нерівність (див. (5))

$$c(t) \leq C_{21} + C_{22}W(t) \tag{17}$$

та оцінку (14), маємо

$$W(t) \leq C_{23} + C_{24} \int_0^t \frac{W(\tau)(1 + W(\tau) + W^2(\tau))}{c(\tau)\sqrt{\theta_0(t) - \theta_0(\tau)}} d\tau,$$

де $\theta_0(t) = \int_0^t \frac{d\tau}{c(\tau)}$. Звідси, позначивши $W_1(t) = W(t) + \frac{1}{2}$, прийдемо до

$$W_1(t) \leq C_{25} + C_{26} \int_0^t \frac{W_1^3(\tau)}{c(\tau)\sqrt{\theta_0(t) - \theta_0(\tau)}} d\tau, \quad t \in [0, T_0]. \tag{18}$$

Використовуючи нерівність

$$(a + b)^3 \leq 4(a^3 + b^3) \quad \forall a, b \geq 0,$$

і підносячи до кубу обидві частини нерівності (18), матимемо

$$W_1^3(t) \leq C_{27} + C_{28} \left(\int_0^t \frac{W_1^3(\tau)}{c(\tau)\sqrt{\theta_0(t) - \theta_0(\tau)}} d\tau \right)^3. \tag{19}$$

Застосувавши нерівність Гельдера, отримаємо

$$\begin{aligned} & \left(\int_0^t \frac{W_1^3(\tau)}{c(\tau)\sqrt{\theta_0(t) - \theta_0(\tau)}} d\tau \right)^3 \leq \int_0^t \frac{W_1^9(\tau)}{c(\tau)\sqrt{\theta_0(t) - \theta_0(\tau)}} d\tau \left(\int_0^t \frac{d\tau}{c(\tau)\sqrt{\theta_0(t) - \theta_0(\tau)}} \right)^2 \leq \\ & \leq C_{29} \int_0^t \frac{W_1^9(\tau)}{c(\tau)\sqrt{\theta_0(t) - \theta_0(\tau)}} d\tau. \end{aligned}$$

Тоді з (19) прийдемо до

$$W_1^3(t) \leq C_{27} + C_{30} \int_0^t \frac{W_1^9(\tau)}{c(\tau)\sqrt{\theta_0(t) - \theta_0(\tau)}} d\tau. \tag{20}$$

Покладемо в (20) $t = \sigma$, домножимо на $\frac{1}{c(\sigma)\sqrt{\theta_0(t) - \theta_0(\sigma)}}$ та проінтегруємо

мо від 0 до t :

$$\int_0^t \frac{W_1^3(\sigma)}{c(\sigma)\sqrt{\theta_0(t) - \theta_0(\sigma)}} d\sigma \leq C_{27} \int_0^t \frac{d\sigma}{c(\sigma)\sqrt{\theta_0(t) - \theta_0(\sigma)}} + \\ + C_{30} \int_0^t \frac{d\sigma}{c(\sigma)\sqrt{\theta_0(t) - \theta_0(\sigma)}} \int_0^\sigma \frac{W_1^9(\tau)}{c(\tau)\sqrt{\theta_0(\sigma) - \theta_0(\tau)}} d\tau.$$

Використовуючи рівність

$$\int_\tau^t \frac{d\sigma}{c(\sigma)\sqrt{(\theta_0(t) - \theta_0(\sigma))(\theta_0(\sigma) - \theta_0(\tau))}} = \pi$$

та оцінку $\theta_0(t)$ зверху, отримаємо

$$\int_0^t \frac{W_1^3(\sigma)}{c(\sigma)\sqrt{\theta_0(t) - \theta_0(\sigma)}} d\sigma \leq C_{31} + C_{32} \int_0^t \frac{W_1^9(\tau)}{c(\tau)} d\tau.$$

Отже, повертаючись до (18), запишемо

$$W_1(t) \leq C_{33} + C_{34} \int_0^t \frac{W_1^9(\tau)}{c(\tau)} d\tau, \quad t \in [0, T_0].$$

Позначимо $W_2(t) = C_{33} + C_{34} \int_0^t \frac{W_1^9(\tau)}{c(\tau)} d\tau$. Тоді

$$W_2'(t) \leq \frac{C_{34} W_2^9(t)}{c(t)}, \quad t \in [0, T_0].$$

Звідси приходимо до нерівності

$$\frac{1}{C_{33}} - \frac{1}{W_2^8(t)} \leq C_{35} t$$

і для деякого T_1 , $0 < T_1 < T_0 \leq T$, де $1 - C_{33}^8 C_{35} T_1 > 0$, отримаємо оцінку

$$W(t) \leq W_2(t) \leq C_{36}, \quad t \in [0, T_1].$$

Тоді з (9), (16), (17) випливають оцінки

$$|u(x, t)| \leq C_{37}, \quad |v(x, t)| \leq C_{38}, \quad (x, t) \in \bar{Q}_{T_1},$$

$$c(t) \leq A_1 < \infty, \quad t \in [0, T_1]. \quad (21)$$

Зауважимо, що нерівність (див. (11), (12))

$$\int_0^t \mu_1'(\tau) G_2(x, t, 0, \tau; x) d\tau - \int_0^t \mu_2'(\tau) G_2(x, t, h, \tau; x) d\tau + \\ + \int_0^t \frac{d\tau}{c(\tau)} \int_0^h [b_\xi(\xi, \tau, u(\xi, \tau), v(\xi, \tau)) + b_u(\xi, \tau, u(\xi, \tau), v(\xi, \tau))v(\xi, \tau) + \\ + b_v(\xi, \tau, u(\xi, \tau), v(\xi, \tau))w(\xi, \tau)] G_{2\xi}(x, t, \xi, \tau; x) d\xi - \\ - \int_0^t \frac{d\tau}{c(\tau)} \int_0^h [a(\xi, \tau, u(\xi, \tau), v(\xi, \tau)) - a(x, \tau, u(x, \tau), v(x, \tau))] \times \\ \times w(\xi, \tau) G_{2\xi\xi}(x, t, \xi, \tau; x) d\xi \leq \min_{x \in [0, h]} \varphi''(x), \quad (22)$$

виконується на $[0, T_0]$ і, маючи оцінки c та w , число T_0 визначається лише через вихідні дані.

При відомих оцінках c , u , v , w з (8) маємо, що

$$w(x, t) \leq C_{39} + C_{40} \sqrt{t} + C_{41} t, \quad t \in [0, T_1].$$

Запишемо систему (5), (8) в операторному вигляді

$$\omega = P\omega, \quad (23)$$

де $\omega = (c, w)$. У припущенні, що

$$C_{39} + C_{40}\sqrt{t} + C_{41} \leq C_{36}, \quad t \in [0, T_2], \quad 0 < T_2 \leq T,$$

внаслідок апріорних оцінок (13), (21) оператор P , який визначається правими частинами системи (5), (8), переводить в себе множину

$$N \equiv \{(c, w) \in C[0, t_0] \times C(\bar{Q}_{t_0}) : 0 < A_0 \leq c(t) \leq A_1, \quad 0 \leq w(x, t) \leq C_{36}\}.$$

Тут $t_0 = \min\{T_1, T_2\}$.

Встановимо компактність інтегральних операторів, що входять в P . Зауважимо, що при відомих оцінках c, u, v, w , достатньо встановити компактність у випадку операторів

$$(P_1c)(x, t) = \int_0^h \tilde{\varphi}(\xi) G_2(x, t, \xi, 0; x) d\xi,$$

$$(P_2c)(x, t) = \int_0^t \tilde{\mu}(\tau) G_2(x, t, 0, \tau; x) d\tau,$$

$$(P_3c)(x, t) = \int_0^t \frac{d\tau}{c(\tau)} \int_0^h \tilde{f}(\xi, \tau) G_{2\xi}(x, t, \xi, \tau; x) d\xi,$$

$$(P_4c)(x, t) = \int_0^t \frac{d\tau}{c(\tau)} \int_0^h (\tilde{a}(\xi, \tau) - \tilde{a}(x, \tau)) w(\xi, \tau) G_{2\xi\xi}(x, t, \xi, \tau; x) d\xi$$

з довільними неперервними функціями $\tilde{\varphi}, \tilde{\mu}, \tilde{f}$, неперервно диференційовною функцією \tilde{a} і $\theta(t, x) = \int_0^t \frac{a(x, \tau, u(x, \tau), v(x, \tau))}{c(\tau)} d\tau \equiv \int_0^t \frac{\tilde{a}(x, \tau)}{c(\tau)} d\tau$. Для доведення цього факту, згідно з теоремою Арцела – Асколі, достатньо встановити одностайну неперервність множин $P_i N, i = 1, \dots, 4$. Нехай

$$\Delta_k \equiv |(P_kc)(x_2, t_2) - (P_kc)(x_1, t_1)|, \quad k = 1, \dots, 4,$$

з довільними $(x_i, t_i) \in \bar{Q}_T, (x_1, t_1) \neq (x_2, t_2)$.

Встановимо одностайну неперервність множини $P_1 N$. Для заданого $\varepsilon > 0$ розглянемо Δ_1 . Очевидно, що

$$\Delta_1 \leq |(P_1c)(x_2, t_2) - (P_1c)(x_1, t_2)| + |(P_1c)(x_1, t_2) - (P_1c)(x_1, t_1)| \equiv \Delta_{1,1} + \Delta_{1,2}.$$

З властивостей теплових потенціалів випливає існування такого $t_{01}, 0 < t_{01} \leq T$, що для довільної пари $(c, w) \in N$ виконується оцінка

$$\left| \int_0^h \tilde{\varphi}(\xi) G_2(x, t, \xi, 0; x) d\xi - \tilde{\varphi}(x) \right| < \frac{\varepsilon}{5}, \quad t \in [0, t_{01}], \quad x \in [0, h].$$

Тоді, якщо $t_2 \leq t_{01}$, отримаємо

$$\Delta_{1,1} \leq \left| \int_0^h \tilde{\varphi}(\xi) G_2(x_2, t_2, \xi, 0; x_2) d\xi - \tilde{\varphi}(x_2) \right| + \left| \int_0^h \tilde{\varphi}(\xi) G_2(x_1, t_2, \xi, 0; x_1) d\xi - \tilde{\varphi}(x_1) \right| + |\tilde{\varphi}(x_2) - \tilde{\varphi}(x_1)| < \frac{3\varepsilon}{5}.$$

Тут використано означення рівномірної неперервності функції $\tilde{\varphi}(x)$ на проміжку $[0, h]$, тобто існує таке $\delta_1 > 0$, що при $|x_2 - x_1| < \delta_1$ маємо

$$|\tilde{\varphi}(x_2) - \tilde{\varphi}(x_1)| < \frac{\varepsilon}{5}.$$

Тоді, якщо $t_1 \leq t_{01}$, то за рахунок вибору t_{01} матимемо

$$\Delta_{1,2} \leq |(P_1c)(x_1, t_2)| + |(P_1c)(x_1, t_1)| < \frac{2\varepsilon}{5}.$$

Отже, при $t_i \leq t_{01}$, $i = 1, 2$,

$$\Delta_1 < \varepsilon.$$

Нехай $t_{01} < t_1$, $t_{01} < t_2$ і для визначеності $t_1 < t_2$, $x_1 < x_2$. Розглянемо

$$\begin{aligned} \Delta_{1,1} &= \left| \int_0^h \tilde{\varphi}(\xi) d\xi \int_{x_1}^{x_2} G_{2y}(y, t_2, \xi, 0; y) dy \right| \leq \\ &\leq \max_{x \in [0, h]} |\tilde{\varphi}(x)| \int_{x_1}^{x_2} dy \int_0^h |G_{2y}(y, t_2, \xi, 0; y)| d\xi. \end{aligned}$$

При $t_2 > t_{01}$ функція $G_{2y}(y, t_2, \xi, 0; y)$ обмежена. Тоді

$$\Delta_{1,1} \leq C_{42}(x_2 - x_1).$$

Звідси маємо існування такого $\delta_2 = \frac{\varepsilon}{2C_{42}}$, що при $x_2 - x_1 < \delta_2$, викону-

ється $\Delta_{1,1} < \frac{\varepsilon}{2}$.

Аналогічно, існує $\delta_3 > 0$, що при $t_2 - t_1 < \delta_3$

$$\Delta_{1,2} = \left| \int_0^h \tilde{\varphi}(\xi) d\xi \int_{t_1}^{t_2} G_{2z}(x_1, z, \xi, 0; x_1) dz \right| \leq C_{43}(t_2 - t_1) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Вибираючи $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\} > 0$ і підсумовуючи отримані результати при $x_2 - x_1 < \delta$, $t_2 - t_1 < \delta$, приходимо до $\Delta_1 < \varepsilon$.

Покажемо, що множина P_2N є одностайно неперервна. Для заданого $\varepsilon > 0$ розглянемо Δ_2 . Враховуючи (15) та означення множини N , отримаємо

$$|(P_2c)(x, t)| \leq C_{44}\sqrt{t} + C_{45}t.$$

Тому для вказаного ε існує таке t_{02} , що при $t_i \leq t_{02}$, $i = 1, 2$, для довільних $x \in [0, h]$ виконується

$$|(P_2c)(x, t_i)| < \frac{\varepsilon}{6}, \quad i = 1, 2,$$

звідки

$$\Delta_2 \leq |(P_2c)(x_2, t_2)| + |(P_2c)(x_1, t_1)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall x_1, x_2 \in [0, h].$$

Нехай для визначеності, $x_1 < x_2$, $t_1 < t_2 \leq T$ і $t_{02} < t_1, t_2$. Аналогічно до випадку, наведеного в [12], встановлюємо, що $\Delta_2 < \frac{\varepsilon}{2}$. Очевидно, що

$$\begin{aligned} \Delta_2 &\leq |(P_2c)(x_2, t_2) - (P_2c)(x_1, t_2)| + \\ &+ |(P_2c)(x_1, t_2) - (P_2c)(x_1, t_1)| \equiv \Delta_{2,1} + \Delta_{2,2}. \end{aligned}$$

Оцінимо $\Delta_{2,1}$:

$$\begin{aligned} \Delta_{2,1} &\leq \\ &\leq C_{46} \int_0^{t_2} \frac{\tilde{a}(x_2, \tau)}{c(\tau)} \left| \frac{1}{\sqrt{\theta(t_2, x_2) - \theta(\tau, x_2)}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x_2 + 2nh)^2}{4(\theta(t_2, x_2) - \theta(\tau, x_2))}\right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\sqrt{\theta(t_2, x_1) - \theta(\tau, x_1)}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x_1 + 2nh)^2}{4(\theta(t_2, x_1) - \theta(\tau, x_1))}\right) \right| d\tau. \end{aligned}$$

Виконаємо заміну змінних $\theta(t_2, x_2) - \theta(\tau, x_2) = \sigma$. Функція $\theta(\tau, x_2)$ монотонно зростає для довільного фіксованого x_2 , тому існує обернена до неї $\theta^{-1}(\sigma, x_2)$. Тоді $\tau = \theta^{-1}(\theta(t_2, x_2) - \sigma, x_2)$ і $\theta(\tau, x_1) = \theta(\theta^{-1}(\theta(t_2, x_2) - \sigma, x_2), x_1)$, звідки

$$\begin{aligned} \Delta_{2,1} &\leq C_{47} \int_0^{\theta(t_2, x_2)} \left| \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x_2 + 2nh)^2}{4\sigma}\right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\sqrt{\theta(t_2, x_1) - \theta(\theta^{-1}(\theta(t_2, x_2) - \sigma, x_2), x_1)}} \times \right. \\ &\quad \left. \times \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x_1 + 2nh)^2}{4(\theta(t_2, x_1) - \theta(\theta^{-1}(\theta(t_2, x_2) - \sigma, x_2), x_1))}\right) \right| d\sigma \leq \\ &\leq C_{47} \int_0^{\frac{t_2 a_1}{A_0}} \left| \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x_2 + 2nh)^2}{4\sigma}\right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\sqrt{\theta(t_2, x_1) - \theta(\theta^{-1}(\theta(t_2, x_2) - \sigma, x_2), x_1)}} \times \right. \\ &\quad \left. \times \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x_1 + 2nh)^2}{4(\theta(t_2, x_1) - \theta(\theta^{-1}(\theta(t_2, x_2) - \sigma, x_2), x_1))}\right) \right| d\sigma, \end{aligned}$$

де $a_1 = \max_{\bar{Q}_T} \tilde{a}(x, t)$. Skorиставшись оцінкою цього інтеграла на малому проміжку при $t_2 a_1 / A_0 \leq t_{02}$, безпосередньо отримаємо $\Delta_{2,1} < \varepsilon / 3$. Якщо ж $t_2 a_1 / A_0 > t_{02}$, тоді

$$\begin{aligned} \Delta_{2,1} &\leq \frac{\varepsilon}{6} + C_{47} \int_{t_{02}}^{\frac{t_2 a_1}{A_0}} \left| \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x_2 + 2nh)^2}{4\sigma}\right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x_1 + 2nh)^2}{4\sigma}\right) \right| d\sigma + \\ &\quad + C_{47} \int_{t_{02}}^{\frac{t_2 a_1}{A_0}} \left| \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x_1 + 2nh)^2}{4\sigma}\right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\sqrt{\theta(t_2, x_1) - \theta(\theta^{-1}(\theta(t_2, x_2) - \sigma, x_2), x_1)}} \times \right. \\ &\quad \left. \times \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x_1 + 2nh)^2}{4(\theta(t_2, x_1) - \theta(\theta^{-1}(\theta(t_2, x_2) - \sigma, x_2), x_1))}\right) \right| d\sigma \end{aligned}$$

або

$$\begin{aligned} \Delta_{2,1} &\leq \frac{\varepsilon}{6} + C_{47} \int_{t_{02}}^{\frac{t_2 a_1}{A_0}} \left| \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x + 2nh)^2}{4\sigma}\right) \right) dx \right| d\sigma + \\ &\quad + C_{47} \int_{t_{02}}^{\frac{t_2 a_1}{A_0}} d\sigma \left| \frac{\theta(t_2, x_1) - \theta(\theta^{-1}(\theta(t_2, x_2) - \sigma), x_1)}{\int_{\sigma}^{\theta(t_2, x_1) - \theta(\theta^{-1}(\theta(t_2, x_2) - \sigma), x_1)}} \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{\sqrt{z}} \times \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x_2 + 2nh)^2}{4z}\right) \right) dz \right|. \end{aligned}$$

При $z > t_{02}$, $\sigma > t_{02}$ маємо

$$\left| \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{\sqrt{z}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x_2 + 2nh)^2}{4z}\right) \right) \right| + \left| \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\sqrt{\sigma}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x + 2nh)^2}{4\sigma}\right) \right) \right| \leq C_{48}.$$

Оскільки $\lim_{x_1 \rightarrow x_2} \theta(\theta^{-1}(\theta(t_2, x_2) - \sigma, x_2), x_1) = \theta(t_2, x_2) - \sigma$, то для заданого ε існує таке $\delta_4 > 0$, що при $|x_1 - x_2| < \delta_4$ і при неперервно диференційовній функції \tilde{a} (див. **(A1)**) матимемо

$$\left| \theta(t_2, x_1) - \theta(\theta^{-1}(\theta(t_2, x_2) - \sigma, x_2), x_1) - \sigma \right| < \frac{\varepsilon}{6C_{47}C_{48}}. \quad (23)$$

Отже, $\Delta_{2,1} < \frac{\varepsilon}{2}$, звідки, враховуючи оцінку для $\Delta_{2,2}$, впливає оцінка $\Delta_2 < \varepsilon$.

Встановимо одностайну неперервність множини P_3N . Для заданого $\varepsilon > 0$, $t_i \geq t_{03}$, $i = 1, 2$, $t_1 < t_2$, $x_1 < x_2$ (для визначеності) розглянемо

$$\Delta_3 \leq |(P_3c)(x_2, t_2) - (P_3c)(x_1, t_2)| + |(P_3c)(x_1, t_2) - (P_3c)(x_1, t_1)| \equiv \Delta_{3,1} + \Delta_{3,2}.$$

Спочатку оцінимо

$$\begin{aligned} \Delta_{3,1} = & \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \left| \int_0^{t_2} \frac{d\tau}{c(\tau)} \int_0^h \tilde{f}(\xi, \tau) \left(\frac{1}{\sqrt{(\theta(t_2, x_2) - \theta(\tau, x_2))^3}} \times \right. \right. \\ & \times \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left((x_2 - \xi + 2nh) \exp\left(-\frac{(x_2 - \xi + 2nh)^2}{4(\theta(t_2, x_2) - \theta(\tau, x_2))}\right) - \right. \\ & \left. \left. - (x_2 + \xi + 2nh) \exp\left(-\frac{(x_2 + \xi + 2nh)^2}{4(\theta(t_2, x_2) - \theta(\tau, x_2))}\right) \right) - \right. \\ & \left. - \frac{1}{\sqrt{(\theta(t_2, x_1) - \theta(\tau, x_1))^3}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left((x_1 - \xi + 2nh) \times \right. \right. \\ & \left. \left. \times \exp\left(-\frac{(x_1 - \xi + 2nh)^2}{4(\theta(t_2, x_1) - \theta(\tau, x_1))}\right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + (x_1 + \xi + 2nh) \exp\left(-\frac{(x_1 + \xi + 2nh)^2}{4(\theta(t_2, x_1) - \theta(\tau, x_1))}\right) \right) \right) d\xi \Big|. \end{aligned}$$

Зробимо заміну змінних $\theta(t_2, x_2) - \theta(\tau, x_2) = \sigma$, звідки $\tau = \theta^{-1}(\theta(t_2, x_2) - \sigma, x_2)$ і, оцінивши отриманий інтеграл, прийдемо до

$$\begin{aligned} \Delta_{3,1} \leq & C_{49} \int_0^h d\xi \int_0^{\frac{a_1 t_2}{A_0}} \left| \frac{1}{\sqrt{\sigma^3}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left((x_2 - \xi + 2nh) \exp\left(-\frac{(x_2 - \xi + 2nh)^2}{4\sigma}\right) - \right. \right. \\ & \left. \left. - (x_2 + \xi + 2nh) \exp\left(-\frac{(x_2 + \xi + 2nh)^2}{4\sigma}\right) \right) - \right. \\ & \left. - \frac{1}{\sqrt{(\theta(t_2, x_1) - \theta(\theta^{-1}(\theta(t_2, x_2) - \sigma, x_2), x_1))^3}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left((x_1 - \xi + 2nh) \times \right. \right. \\ & \left. \left. \times \exp\left(-\frac{(x_1 - \xi + 2nh)^2}{4(\theta(t_2, x_1) - \theta(\theta^{-1}(\theta(t_2, x_2) - \sigma, x_2), x_1))}\right) + \right. \right. \end{aligned}$$

$$+ (x_1 + \xi + 2nh) \exp\left(-\frac{(x_2 + \xi + 2nh)^2}{4(\theta(t_2, x_1) - \theta(\theta^{-1}(\theta(t_2, x_2) - \sigma, x_2), x_1))}\right)\Big| d\sigma.$$

Якщо $\frac{a_1 t_2}{A_0} > t_{03}$, то, використовуючи оцінку для малого $t \leq t_{03}$, отримаємо

$$\begin{aligned} \Delta_{3,1} &\leq \frac{\varepsilon}{4} + C_{49} \int_0^h d\xi \int_{t_{03}}^{\frac{a_1 t_2}{A_0}} \left| \frac{1}{\sqrt{\sigma^3}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left((x_2 - \xi + 2nh) \exp\left(-\frac{(x_2 - \xi + 2nh)^2}{4\sigma}\right) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - (x_2 + \xi + 2nh) \exp\left(-\frac{(x_2 + \xi + 2nh)^2}{4\sigma}\right) \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\sqrt{\sigma^3}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left((x_1 - \xi + 2nh) \exp\left(-\frac{(x_1 - \xi + 2nh)^2}{4\sigma}\right) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - (x_1 + \xi + 2nh) \exp\left(-\frac{(x_1 + \xi + 2nh)^2}{4\sigma}\right) \right) \right| d\sigma + \\ &\quad + C_{49} \int_0^h d\xi \int_{t_{03}}^{\frac{a_1 t_2}{A_0}} \left| \frac{1}{\sqrt{\sigma^3}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left((x_1 - \xi + 2nh) \exp\left(-\frac{(x_1 - \xi + 2nh)^2}{4\sigma}\right) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - (x_1 + \xi + 2nh) \exp\left(-\frac{(x_1 + \xi + 2nh)^2}{4\sigma}\right) \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\sqrt{(\theta(t_2, x_1) - \theta(\theta^{-1}(\theta(t_2, x_2) - \sigma, x_2), x_1))^3}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left((x_1 - \xi + 2nh) \times \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \exp\left(-\frac{(x_1 - \xi + 2nh)^2}{4(\theta(t_2, x_1) - \theta(\theta^{-1}(\theta(t_2, x_2) - \sigma, x_2), x_1))}\right) - (x_1 + \xi + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2nh) \exp\left(-\frac{(x_2 + \xi + 2nh)^2}{4(\theta(t_2, x_1) - \theta(\theta^{-1}(\theta(t_2, x_2) - \sigma, x_2), x_1))}\right) \right) \right| d\sigma = \\ &= \frac{\varepsilon}{4} + C_{49} \int_0^h d\xi \int_{t_{03}}^{\frac{a_1 t_2}{A_0}} \left| \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\sqrt{\sigma^3}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left((y - \xi + 2nh) \times \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \exp\left(-\frac{(y - \xi + 2nh)^2}{4\sigma}\right) - (y + \xi + 2nh) \times \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \exp\left(-\frac{(y + \xi + 2nh)^2}{4\sigma}\right) \right) \right) dy \Big| d\sigma + C_{49} \int_0^h d\xi \times \\ &\quad \times \int_{t_{03}}^{\frac{a_1 t_2}{A_0}} \left| \frac{\theta(t_2, x_1) - \theta(\theta^{-1}(\theta(t_2, x_2) - \sigma, x_2), x_1)}{\int_{\sigma}^{\frac{a_1 t_2}{A_0}} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\sqrt{z^3}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left((x_1 - \xi + 2nh) \times \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \exp\left(-\frac{(x_1 - \xi + 2nh)^2}{4z}\right) - (x_1 + \xi + 2nh) \times \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \exp\left(-\frac{(x_1 + \xi + 2nh)^2}{4z}\right) \right) \right) \Big| d\sigma. \end{aligned}$$

Звідси при $|x_2 - x_1| < \delta_5$, $\delta_5 > 0$, аналогічно до (23), впливає оцінка

$$\Delta_{3,1} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Розглянемо

$$\begin{aligned} \Delta_{3,2} &\leq \left| \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\tau}{c(\tau)} \int_0^h \tilde{f}(\xi, \tau) G_{2\xi}(x_1, t_2, \xi, \tau; x_1) d\xi \right| + \\ &\quad + \left| \int_0^{t_1} \frac{d\tau}{c(\tau)} \int_0^h \tilde{f}(\xi, \tau) (G_{2\xi}(x_1, t_2, \xi, \tau; x_1) - G_{2\xi}(x_1, t_1, \xi, \tau; x_1)) d\xi \right| \equiv \\ &\equiv \Delta_{3,2,1} + \Delta_{3,2,2}. \end{aligned}$$

Використовуючи оцінку $G_{2\xi}$, матимемо

$$\Delta_{3,2,1} \leq \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\tau}{c(\tau)\sqrt{\theta(t_2) - \theta(\tau)}} \leq C_{50} \sqrt{t_2 - t_1}.$$

Тоді існує таке $\delta_6 > 0$, що $\Delta_{3,2,1} < \frac{\varepsilon}{4}$ при $t_2 - t_1 < \delta_6$.

Зробивши заміну змінних $\theta(t_1, x_1) - \theta(\tau, x_1) = \sigma$ в $\Delta_{3,2,2}$, отримаємо

$$\begin{aligned} \Delta_{3,2,2} &\leq C_{51} \int_0^h d\xi \int_0^{\theta(t_1, x_1)} \left| \frac{1}{\sqrt{(\theta(t_2, x_1) - \theta(t_1, x_1) + \sigma)^3}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left((x_1 - \xi + 2nh) \times \right. \right. \\ &\quad \times \exp\left(-\frac{(x_1 - \xi + 2nh)^2}{4(\theta(t_2, x_1) - \theta(t_1, x_1) + \sigma)}\right) - (x_1 + \xi + 2nh) \times \\ &\quad \times \exp\left(-\frac{(x_1 + \xi + 2nh)^2}{4(\theta(t_2, x_1) - \theta(t_1, x_1) + \sigma)}\right) \Bigg) - \frac{1}{\sqrt{\sigma^3}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left((x_1 - \xi + \right. \\ &\quad \left. + 2nh) \exp\left(-\frac{(x_1 - \xi + 2nh)^2}{4\sigma}\right) - (x_1 + \xi + 2nh) \times \right. \\ &\quad \left. \times \exp\left(-\frac{(x_1 + \xi + 2nh)^2}{4\sigma}\right) \Bigg) \right| d\sigma \end{aligned}$$

або при $\frac{a_1 t_1}{A_0} > t_{03}$, враховуючи оцінку на малому проміжку $[0, t_{03}]$, прийдемо до

$$\begin{aligned} \Delta_{3,2,2} &\leq \frac{\varepsilon}{8} + C_{51} \int_0^h d\xi \int_{t_{03}}^{\frac{a_1 t_1}{A_0}} \left| \int_{\sigma}^{\theta(t_2, x_1) - \theta(t_1, x_1) + \sigma} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\sqrt{z^3}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left((x_1 - \xi + 2nh) \times \right. \right. \right. \\ &\quad \times \exp\left(-\frac{(x_1 - \xi + 2nh)^2}{4z}\right) - (x_1 + \xi + 2nh) \times \\ &\quad \left. \left. \left. \times \exp\left(-\frac{(x_1 + \xi + 2nh)^2}{4z}\right) \right) \right) \right| dz \Bigg) d\sigma. \end{aligned}$$

Тоді існує $\delta_7 > 0$, що $\Delta_{3,2,2} < \frac{\varepsilon}{4}$ при $t_2 - t_1 < \delta_7$, а тому і $\Delta_{3,2} < \frac{\varepsilon}{2}$.

Вибираючи мінімальне з усіх δ_i , $i = 5, 6, 7$, і враховуючи встановлені оцінки, отримаємо $\Delta_3 < \varepsilon$, що й доводить одностайну неперервність множини $P_3 N$.

Оскільки $\tilde{a}(x, t)$ – неперервно диференційовна функція за x , то дослідження компактності оператора P_4 зводиться до встановлення компактності P_3 .

У встановлених оцінках C_i , $i = 1, \dots, 51$, та A_0, A_1 – відомі величини.

Отже, оператор P – цілком неперервний. Застосувавши теорему Шаудера, отримаємо існування розв'язку системи (5), (8), а, отже, й розв'язку вихідної задачі. \diamond

3. Доведення єдиності розв'язку задачі. Доведення **теореми 2** проведемо від супротивного. Припустимо, що існують два розв'язки (c_1, u_1) і (c_2, u_2) з класу $H^{\gamma/2}[0, T] \times H^{2+\gamma, 1+\gamma/2}(\bar{Q}_T)$ задачі (1)–(4). Нехай $c = c_1 - c_2$, $u = u_1 - u_2$. Запишемо задачу для (c, u) :

$$\begin{aligned} c_1(t)u_{1t} - c_2(t)u_{2t} &= a(x, t, u_1(x, t), u_{1x}(x, t))u_{1xx}(x, t) - \\ &\quad - a(x, t, u_1(x, t), u_{1x}(x, t))u_{2xx}(x, t) + \\ &\quad + a(x, t, u_1(x, t), u_{1x}(x, t))u_{2xx}(x, t) - \\ &\quad - a(x, t, u_2(x, t), u_{2x}(x, t))u_{2xx}(x, t) + \\ &\quad + b(x, t, u_1(x, t), u_{1x}(x, t)) - b(x, t, u_2(x, t), u_{2x}(x, t)), \end{aligned} \quad (24)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad x \in [0, h], \quad (25)$$

$$u_x(0, t) = 0, \quad u_x(h, t) = 0, \quad t \in [0, T], \quad (26)$$

$$u(0, t) = 0, \quad t \in [0, T]. \quad (27)$$

Подамо рівняння (24) як

$$\begin{aligned} c_1(t)u_t &= a(x, t, u_1, u_{1x})u_{xx} + (a(x, t, u_1, u_{1x}) - a(x, t, u_2, u_{2x}))u_{2xx} + \\ &\quad + b_0(x, t, u_1, u)u_x + b_1(x, t, u, u_{2x})u - c(t)u_{2t}. \end{aligned}$$

Оскільки u_1, u_2 – відомі функції від (x, t) , то це рівняння можемо записати так:

$$c_1(t)u_t = a_1(x, t)u_{xx} + a_2(x, t)u_x + a_3(x, t)u - c(t)u_{2t}, \quad (28)$$

де коефіцієнти $a_i, i = 1, 2, 3$, визначаються через a, a_u, a_v, b_u, b_v . За допомогою функції Гріна $\tilde{G}_2(x, t, \xi, \tau)$ для однорідного рівняння (28) запишемо розв'язок задачі (28), (26), (27):

$$u(x, t) = - \int_0^t \frac{c(\tau)}{c_1(\tau)} d\tau \int_0^h u_{2\tau}(\xi, \tau) \tilde{G}_2(x, t, \xi, \tau) d\xi.$$

Поклавши в рівнянні (28) $x = 0$, отримаємо рівняння стосовно функції $c(t)$:

$$c(t)\mu'_3(t) - a_1(0, t)u_{xx}(0, t) = 0$$

або

$$c(t)\mu'_3(t) + a_1(0, t) \int_0^t \frac{c(\tau)}{c_1(\tau)} d\tau \int_0^h u_{2\tau}(\xi, \tau) \tilde{G}_{2xx}(0, t, \xi, \tau) d\xi = 0. \quad (29)$$

Згідно з припущеннями теореми, рівняння (29) – однорідне рівняння Вольтерра другого роду з ядром, яке має інтегровну [3] особливість

$$|K(t, \tau)| \frac{C_1}{(t - \tau)^{1-\gamma/2}}.$$

Тут C_1 – деяка додатна стала. Оскільки рівняння (29) має єдиний розв'язок $c(t) \equiv 0$ на $[0, T]$, то, повертаючись до задачі (28), (25), (26), отримаємо $u(x, t) \equiv 0$. Тобто $c_1(t) = c_2(t)$ і $u_1(x, t) = u_2(x, t)$, що й доводить єдиність розв'язку задачі. \diamond

1. Гольдман Н. Л. Об одном классе обратных задач для квазилинейного параболического уравнения с локальным условием переопределения // Вычисл. методы и программирование. – 2005. – 6. – С. 128–145.
2. Иванцов Н. И. Об определении зависящего от времени старшего коэффициента в параболическом уравнении // Сиб. мат. журн. – 1998. – 39, № 3. – С. 539–550.

3. Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – Москва: Наука, 1967. – 736 с.
4. Музылев Н. В. О единственности решения одной обратной задачи нелинейной теплопроводности // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1985. – **25**, № 9. – С. 1346–1352.
5. Музылев Н. В. Теоремы единственности для некоторых обратных задач теплопроводности // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1980. – **20**, № 2. – С. 388–400.
6. Прилепко А. И., Костин А. Б. Об обратных задачах определения коэффициента в параболическом уравнении. II // Сиб. мат. журн. – 1993. – **34**, № 5. – С. 147–162.
7. Федусь У. М. Обернена задача для параболического рівняння загального вигляду з невідомим коефіцієнтом теплоємності // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2006. – **49**, № 4. – С. 40–48.
8. Cannon J. R., Lin Y. An inverse problem of finding a parameter in a semilinear heat equation // J. Math. Anal. Appl. – 1990. – No. 145. – P. 470–484.
9. Cannon J. R., Lin Y. Determination of a parameter $p(t)$ in a Hölder class for some semilinear parabolic equations // Inverse Problems. – 1988. – No. 4. – P. 596–605.
10. Cannon J. R., Lin Y. Determination of a parameter $p(t)$ in some quasilinear parabolic differential equations // Inverse Problems. – 1988. – No. 4. – P. 35–45.
11. Ivanchov M. I. Free boundary problem for nonlinear diffusion equation // Мат. студії. – 2003. – **19**, № 2. – С. 156–164.
12. Ivanchov M. Inverse problems for equations of parabolic type. – Lviv: VNTL Publ., 2003. – 238 p. – (Math. Studies: Monograph Ser. – Vol. 10.)
13. Jones B. F. Various methods for finding unknown coefficient in parabolic equations // Comm. Pure Appl. Math. – 1963. – **16**. – P. 33–34.
14. Lorenzi A. Determination of a time-dependent coefficient in a quasi-linear parabolic equation // Ricerche Mat. – 1983. – **32**, No. 2. – P. 263–284.
15. Lorenzi A. Identification of the thermal conductivity in the nonlinear heat equation // Inverse Problems. – 1987. – No. 3. – P. 437–451.
16. Lorenzi A., Lunardi A. An identification problem in the theory of heat conduction // Differential and integral equations. – 1990. – **3**, No. 5. – P. 237–252.

ИДЕНТИФИКАЦИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ПРИ ПРОИЗВОДНОЙ ПО ВРЕМЕНИ В КВАЗИЛИНЕЙНОМ ПАРАБОЛИЧЕСКОМ УРАВНЕНИИ

Установлены условия существования и единственности решения обратной задачи для одномерного квазилинейного параболического уравнения общего вида с неизвестным коэффициентом при производной по времени и краевых условий второго рода.

IDENTIFICATION OF COEFFICIENT OF DERIVATIVE WITH RESPECT TO TIME VARIABLE IN QUASI-LINEAR PARABOLIC EQUATION

We establish conditions for existence and uniqueness of solution of the inverse problem for one-dimensional quasi-linear parabolic equation with unknown coefficient of the derivative with respect to time variable and boundary condition of the second kind.

Львів. нац. ун-т імені Івана Франка, Львів

Одержано
04.01.08