УДК 514.774.4

М. П. Плахтієнко

НЕКЛАСИЧНІ СПІВВІДНОШЕННЯ МІЖ ЕЛЕМЕНТАМИ МАТРИЦЬ ГРАМА СИСТЕМИ ВЕКТОРІВ УНІТАРНОГО ГІЛЬБЕРТОВОГО ПРОСТОРУ

Для певного класу нескінченновимірних векторів гільбертового простору знайдено співвідношення другого степеня між елементами матриці Грама у формі рівностей і нерівностей. Для упорядкованої системи неортогональних періодичних вектор-функцій виявлено матриці Грама, недіагональні елементи яких пов'язані з елементами першого стовпця рівностями, не вище другого степеня.

1. Вступ. Матриці Грама поряд з матрицями обертання є об'єктами широкого застосування в теоретичній та прикладній математиці, при математичному моделюванні механіко-математичних та фізико-технічних проблем. Перша з них присутня при дослідженні на лінійну незалежність та ортогоналізацію системи векторів в унітарних евклідовому та гільбертовому просторах. Друга виникає в задачах теоретичної механіки та астрономії, що пов'язані з дослідженням обертання твердого тіла та визначенням положення астрономічних об'єктів. Матриця обертання $A = [a_{ik}]$ задає ортогональне лінійне перетворення $x' = Ax$, $A^\top A = AA^\top = E$, $x = (x_1, x_2, x_3)$, у тривимірному евклідовому просторі [1, 4]. Перетворення з матрицею A зберігає модулі векторів і кути між ними. З огляду на ортогональність між елементами матриці A існують 6 відомих функціональних залежностей

$$\sum_{j=1}^{3} a_{ij}a_{kj} = \sum_{j=1}^{3} a_{ji}a_{jk} = \begin{cases} 0, & i \neq k, \\ 1, & i = k. \end{cases}$$

Це означає, що будь-які три із дев'яти елементів a_{ik}, $i,k = 1,2,3$, визначають шість інших. При розв'язанні практичних задач за такі три базові параметри використовують кути Ейлера та інші параметри [6]. Матриці обертання є періодичними за кожним із трьох базових кутів. Фактором, що поєднує матрицю Грама з одиничною головною діагоналлю з матрицями обертання, є геометричний зміст їх елементів − це косинуси кутів між векторами. У зв'язку з цим виникає природне запитання: чи існують матриці Грама $G = [g_{ik}]$, елементи яких пов'язані співвідношеннями, відмінними від класичних співвідношень симетрії $g_{ik} = g_{ki}$, та $\det G = 0$ для випадку системи лінійно залежних векторів? Позитивну відповідь на це питання дають кілька неочевидних тверджень, які потребують доведення з використанням аналітичних і числових розрахунків.

Твердження 1. *На множині вектор-функцій унітарного гільбертового простору* (*УГП*), *існують матриці Грама, модуль довільного елемента яких не менше модуля добутку двох елементів їхнього першого стовпця, що стоять в* i*-му та* k*-му рядках.*

Твердження 2. *Для періодичних вектор-функцій УГП, породжених однопараметричною множиною замкнених ліній з групою симетрій* $L_4 4PC$, *елементи матриць Грама напрямних косинусів між* ℓ*-ми і* k*-ми вектор-функціями при* $k = \ell N$, *де* N *− ціле число, збігаються з елементами їхнього першого стовпця, що стоять в* N*-му рядку.*

Твердження 3. *При умовах, накладених на вектор-функції у твердженні 2, існують матриці Грама з елементами* g_{ki} *при* $k/i \neq N$, *що виражаються через добуток пари елементів* g_{k1}, g_{i1} *їхнього першого стовпця.*

Із двох останніх тверджень випливає можливість побудови матриць Грама для деяких систем неортогональних періодичних вектор-функцій обчисленням матричних елементів тільки першого стовпця.

Це суттєво відрізняє розглядувану задачу від задачі встановлення співвідношень між власними числами та матричними елементами лінійних операторів [5].

2. Допоміжні співвідношення між означеними інтегралами функцій. Для доведення цих тверджень розглянемо два приклади оцінок інтегральних величин від функцій однієї змінної, необхідні для подальшого використання.

***1*°**. Нехай $f(x)$, $g(x)$ − інтегровні на $[a,\ b]$ функції і нехай на усьому цьому проміжку

$$m_1 \le f(x) \le M_1, \qquad m_2 \le g(x) \le M_2 .$$

Розглянемо добуток двох інтегралів

$$J_1 = \int_a^b f(x)\,dx \cdot \int_a^b g(x)\,dx$$

та інтеграл від добутку двох функцій

$$J_2 = \int_a^b f(x) g(x)\,dx .$$

Спираючись на теорему про середнє, маємо

$$J_1 = \mu_1 \mu_2 (b-a)^2 ,$$

де

$$m_i \le \mu_i \le M_i, \quad i = 1,2, \quad J_2 = \mu_3 (b-a), \quad m_1 m_2 \le \mu_3 \le M_1 M_2 .$$

Отже, при $b - a \to \varepsilon$, де $0 < \varepsilon \ll 1$, маємо, що $J_1 < J_2$ як величина другого порядку мализни. Навпаки, при $b - a \to \dfrac{1}{\varepsilon}$ маємо, що $J_1 > J_2$ як величина пропорційна квадрату великої величини. При $b - a = \mu_3 / (\mu_1 \mu_2)$ маємо рівність $J_1 = J_2$. При цих умовах будемо говорити, що величини $J_1(a,b)$, $J_2(a,b)$ знаходяться в мажорантно-мінорантному співвідношенні.

***2*°**. Нехай $\varphi(x)$ − абсолютно інтегровна за Ріманом з показником $p > 0$ функція на відрізку $[a,\ b]$. Розглянемо таку рівність:

$$\rho_\varphi(p,a,b) = \left| \int_a^b \varphi(x)\,dx \right|^p \Bigg/ \int_a^b |\varphi(x)|^p\,dx .$$

При $p = 1$ має місце класична нерівність $\rho_\varphi(1,a,b) \le 1$. Тут рівність має місце для всіх a, b тільки для знакосталої функції $\varphi(x)$.

Для $p \ne 1$ величина $\rho_\varphi(p,a,b)$ може набирати будь-яких додатних значень, при цьому одиничне значення має місце на поверхні

$$\Pi_\varphi(p,a,b) = \rho_\varphi(p,a,b) - 1 = 0 ,$$

визначеній в тривимірному просторі з декартовою системою координат $Opab$. У випадку $p = 2$ це рівняння визначає однопараметричну множину точок (лінію) на площині $p = 2$. Отже, приходимо до такого

Означення. Співвідношення

$$\left| \int_a^b \varphi(x)\,dx \right|^p \gtrless \int_a^b |\varphi(x)|^p\,dx ,$$

яке на поверхні $\Pi_\varphi(p,a,b) = 0$ перетворюється у рівність, назвемо *мажо-*

рантно-мінорантним, а введену поверхню назвемо *роздільною поверхнею*, що відповідає функції $\varphi(x)$, $x \in [a, b]$, та показнику степеня $p > 0$ її абсолютної інтегровності.

У прикладі ***1***° лінія $b = a + \mu_3/(\mu_1\mu_2)$ на площині Oab є також роздільною для інтегралів J_1 і J_2.

3. Обчислення співвідношень рівності та нерівності для елементів матриць Грама вектор-функцій УГП. Для доведення тверджень 1−3 розглянемо множину нормованих векторів $f_n(x) \in L_2$, $n = 1, 2, \ldots, M$, $x \in [a, b]$, в унітарному гільбертовому просторі. В цьому випадку можна побудувати матрицю Грама, елементи якої визначаються за формулою

$$(f_i, f_k) = \int_a^b f_i(x) f_k(x)\, dx = g_{ik}. \tag{1}$$

Помножимо ліву частину рівності (1) на «гільбертову» одиницю

$$\frac{1}{g_{\ell\ell}} \int_a^b f_\ell^2(x)\, dx = 1 \tag{2}$$

та обчислимо оцінку інтеграла від добутку підінтегральних функцій лівих частин рівностей (1), (2). Враховуючи допоміжний результат ***1***°, отримуємо таке мажорантно-мінорантне співвідношення:

$$\int_a^b f_\ell^2(x) f_i(x) f_k(x)\, dx \underset{<}{>} g_{\ell\ell} g_{ik}. \tag{3}$$

Тут рівність має місце, якщо межі інтегрування вибрані на лінії $b = a + \delta_{ik\ell}$, де величина $\delta_{ik\ell}(a, b)$ обчислюється в такий же спосіб, як це показано в прикладі ***1***°.

Далі, застосовуючи нерівність Коші − Шварца, знаходимо

$$|g_{\ell\ell} g_{ik}|^2 \underset{<}{>}$$

$$\underset{<}{>} \left| \int_a^b f_\ell(x) f_i(x) f_\ell(x) f_k(x)\, dx \right|^2 \le \int_a^b |f_\ell(x) f_i(x)|^2\, dx \cdot \int_a^b |f_\ell(x) f_k(x)|^2\, dx.$$

У цьому співвідношенні ліва крайня частина має таку форму оцінки:

$$|g_{\ell\ell} g_{ik}|^2 \underset{<}{>} \int_a^b |f_\ell(x) f_i(x)|^2\, dx \cdot \int_a^b |f_\ell(x) f_k(x)|^2\, dx. \tag{4}$$

З цього випливає, що співвідношення (4) є мажорантно-мінорантним. Воно повинно мати роздільну лінію.

Звертаючись до прикладу ***2***° допоміжних співвідношень, можна ввести множину роздільних ліній

$$\rho_{ik\ell}(a, b) - 1 = 0,$$

де

$$\rho_{ik\ell}(a, b) = \frac{W_{ik\ell}(a, b)}{U_{ik\ell}(a, b)},$$

$$W_{ik\ell}(a, b) = \left| \int_a^b f_\ell(x) f_i(x)\, dx \right|^2 \cdot \left| \int_a^b f_\ell(x) f_k(x)\, dx \right|^2,$$

$$U_{ik\ell}(a, b) = \int_a^b |f_\ell(x) f_i(x)\, dx|^2 \cdot \int_a^b |f_\ell(x) f_k(x)\, dx|^2 \ne 0,$$

оскільки жодна із функцій $f_\lambda(x)$, $\lambda = i, k, \ell$, не дорівнює тотожно нулеві. На цій множині параметрів, замість співвідношень (4), маємо таке мажорантно-мінорантне співвідношення:

$$|g_{\ell\ell}g_{ik}|^2 \gtrless \left|\int_a^b f_\ell(x)f_i(x)\,dx\right|^2 \cdot \left|\int_a^b f_\ell(x)f_k(x)\,dx\right|^2$$

або

$$|g_{\ell\ell}g_{ik}| \gtrless |g_{i\ell}g_{k\ell}|. \tag{5}$$

Поділивши обидві частини співвідношення (5) на $\sqrt{g_{ii}g_{kk}}$, отримаємо співвідношення вигляду

$$|\cos\alpha_{ik}| \gtrless |\cos\alpha_{i\ell}\cos\alpha_{k\ell}|, \tag{6}$$

де $\cos\alpha_{mn} = g_{mn}/\sqrt{g_{mm}g_{nn}}$, $m,n = i,\ell,k$, α_{mn} – кут між вектор-функціями $f_m(x)$, $f_n(x)$ УГП.

Як приклад розглянемо систему векторів $f_i(x) = x^i$, $i = 1,2,\dots$, $x\in[0,1]$. Стандартні обчислення дають

$$\cos\alpha_{k\ell} = \sqrt{(2\ell+1)(2k+1)}\,/(k+\ell+1),$$

$$\cos\alpha_{n\ell} = \sqrt{(2\ell+1)(2n+1)}\,/(n+\ell+1),$$

$$\cos\alpha_{kn} = \sqrt{(2n+1)(2k+1)}\,/(k+n+1). \tag{7}$$

Звідси згідно з формулою (6) маємо

$$\frac{\cos\alpha_{k\ell}\cos\alpha_{n\ell}}{\cos\alpha_{kn}} = \frac{(2\ell+1)(k+n+1)}{(k+\ell+1)(n+\ell+1)} \gtrless 1 \tag{8}$$

або після алгебраїчних перетворень знаходимо

$$\Pi(n,k,\ell) = (n-\ell)(k-\ell) \gtrless 0\,.$$

Цілочислова функція $\Pi(n,k,\ell) = 0$ визначає роздільну множину цілих чисел для мажорантно-мінорантного співвідношення (8).

Розглянемо це співвідношення більш детально. Умова $\Pi(n,k,\ell) = 0$ ділить множину чисел n,k,ℓ на дві підмножини, на одній із яких $\Pi(n,k,\ell) \geq 0$, на іншій $\Pi(n,k,\ell) \leq 0$. Для візуалізації цих множин введемо позначення $n = x$, $k = y$, $\ell = z$. Тоді рівняння $\Pi(x,y,z) = 0$ в тривимірному просторі з декартовою системою координат $Oxyz$ визначає вироджену роздільну поверхню другого порядку, що складається із двох площин $z = x$ та $z = y$ (рис. 1).

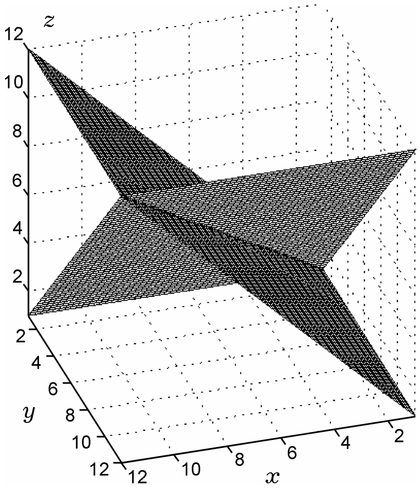

Рис. 1. Вироджена роздільна поверхня другого порядку $\Pi(x,y,z) = 0$

Вони нахилені до площини $z = 0$ під кутом $\alpha = \pi / 4$ та містять в собі півосі Ox, Oy. Лінія перетину цих площин нахилена до площини Oxy під кутом $\beta = \mathrm{arctg}\left(\sqrt{2}/2\right)$, а її проекція на цю площину визначається рівнянням $y = x$. Цілим значенням аргументів x, y відповідають цілі значення функції z. На рис. 1 поверхня $\Pi(x, y, z) = 0$ відповідає квадратній області аргументів x, y: $1 \le x, y \le 12$. Як бачимо, ця поверхня ділить обмежений кубічний об'єм простору першого квадранта системи $Oxyz$ на чотири підпростори попарно рівновеликого об'єму. У двох із них ($z \le y, z \le x$ і $z \ge y, z \ge x$) функція $\Pi(\cdot) \ge 0$, у двох інших ($z \ge y, z \le x$ і $z \le y, z \ge x$) функція $\Pi(\cdot) < 0$. Перша пара нерівностей задовольняється сталими величинами $z = z_{\min}$, $z = z_{\max}$ при всіх $x, y \in [z_{\min}, z_{\max}]$.

Позначимо через V^+ об'єм підпростору куба, де $\Pi(x, y, z) \ge 0$, а через V^- – ту частину його об'єму, де $\Pi(x, y, z) \le 0$. Тоді нескладний розрахунок на основі рис. 1 для вибраної системи вектор-функцій дає $V^-/V^+ = 1/2$. Звідси випливає, що існують системи вектор-функцій, при яких ймовірність отримання співвідношення (5) зі знаком $\ge$ більша, ніж реалізація його із знаком $\le$.

Повертаючись до цілочислових змінних, приходимо до висновку, що на стовпці із найменшим і найбільшим значеннями його індексу ℓ величини

$$\Delta_{kn\ell} = \left|\cos\alpha_{kn}\right| - \left|\cos\alpha_{n\ell}\cos\alpha_{k\ell}\right| \ge 0$$

для будь-яких $1 \le k, n \le \ell$ не змінюють знак нерівності на протилежний. Такі стовпці будемо називати мажорантними; коли ж $\Delta_{kn\ell}$ змінює знак на протилежний при деяких k, n, такі стовпці назвемо мажорантно-мінорантними.

У зв'язку з цим терміном зауважимо, по-перше: для нескінченої системи вектор-функцій матриці Грама є нескінченновимірними, тому поняття найбільшого за номером стовпця є невизначеним; по-друге: для систем упорядкованих періодичних вектор-функцій при великих значеннях індексів k, n з огляду на відому в теорії рядів Фур'є лему Рімана елементи матриць Грама a_{kn} ($n \ne k$ – взаємно прості великі числа) можуть бути як завгодно малі за модулем, а число мажорантних стовпців може бути довільним.

З цих причин тільки перший стовпець матриць Грама упорядкованої системи вектор-функцій будь-якої природи доцільно розглядати як мажорантний.

Для експериментального спостереження описаного математичного факту обчислимо елементи матриці G розміром 6×6 за формулами (7) та порівняємо величини $\cos\alpha_{k\ell}\cos\alpha_{n\ell}$ для $\ell = 1, 3, 6$ з елементами першого, $k = 1$, $\cos\alpha_{1n}$, другого, $k = 2, \cos\alpha_{2n}$, четвертого $k = 4, \cos\alpha_{4n}$, та п'ятого $k = 5, \cos\alpha_{5n}$, рядків відповідно.

Для $k = 1, \ell = 1$ маємо, що $\Pi(n, 1, 1) = 0$, тому $\cos\alpha_{1n} \equiv \cos\alpha_{11}\cos\alpha_{n1}$, оскільки $\cos\alpha_{11} = 1$, а матриця Грама G симетрична. Результати обчислень для інших пар індексів зведено в табл. 1.

Згідно з табл. 1 мажорантними є перший та шостий стовпці матриці G; четвертий – мажорантно-мінорантний.

Таблиця 1

n	$k=2,\ \ell=1$		$k=4,\ \ell=3$		$k=5,\ \ell=6$	
	$\cos\alpha_{2n}$	$\cos\alpha_{21}\cos\alpha_{n1}$	$\cos\alpha_{4n}$	$\cos\alpha_{43}\cos\alpha_{n3}$	$\cos\alpha_{5n}$	$\cos\alpha_{56}\cos\alpha_{n6}$
1	**0.9682**	**0.9682**	0.8660	0.9094	0.8207	0.7779
2	1	0.9374	0.9583	0.9783	0.9270	0.8927
3	0.9860	0.8874	**0.9922**	**0.9922**	0.9750	0.9506
4	0.9583	0.8385	1	0.9845	0.9950	0.9799
5	0.9270	0.7946	0.9950	0.9674	1	0.9930
6	0.8958	0.7558	0.9833	0.9465	**0.9965**	**0.9965**

Ці експериментальні математичні факти можна спостерігати також на матрицях Q_E, P_E розміром 12×12 з роботи [10].

Отже, твердження 1 доведено.

4. Обчислення функціональних співвідношень між елементами матриць Грама для множини симетричних періодичних функцій УГП. Серед знакозмінних функцій важливе місце посідають періодичні функції як в теоретичних, так і в прикладних дослідженнях [3, 6, 7, 11, 12, 14]. Розглянемо систему періодичних вектор-функцій вигляду $f_n(x)=f_n(x+T)$, де $T<\infty$ при цьому число $T_n=nT$ є також періодом функції $f_n(x)$. В практиці періодичних функцій індекс n посідає роль цілочислової частоти: $f_n(x)=h(nx)$. Очевидно, якщо $h(x)=h(x+T_p)$ при $n=1$, то функція $h(kx)$ має період T_p/k.

За такі періодичні функції можна взяти будь-яку функцію на замкнених траєкторіях з групою симетрій $L_4 4PC$ [9]. Такі траєкторії на площині $O\xi\eta$ описуються рівнянням

$$|\xi|^p+|\eta|^p=1, \qquad 0<p<\infty .$$

Множина T_p періодичних функцій на цих лініях ділиться на підмножини парних $\widehat{f}_{pn}(-x)=\operatorname{cosip}(nx,p)$ і непарних $\overline{f}_{pn}(x)=-\overline{f}_{pn}(-x)=$ $=\operatorname{sip}(nx,p)$ функцій, період яких залежить від параметра p, при цьому аргумент x означає довжину дуги замкненої траєкторії від початку з координатами $\xi=1,\ \eta=0$. Наслідком групи симетрії $L_4 4PC$ мають місце такі співвідношення:

$$\operatorname{cosip}(T_p/2-x,p)=-\operatorname{cosip}(x,p), \qquad \operatorname{sip}(T_p/2-x,p)=\operatorname{sip}(x,p). \quad (9)$$

При $p=2$ маємо класичні 2π-періодичні (колові) функції:

$$T_2=2\pi, \qquad \operatorname{cosip}(nx,2)=\cos(nx), \qquad \operatorname{sip}(nx,2)=\sin(nx),$$

значення $p=1$ відповідає ромбічним функціям [10]:

$$T_1=4\sqrt{2}, \qquad \operatorname{cosip}(nx,1)=\operatorname{cor}(nx), \qquad \operatorname{sip}(nx,1)=\operatorname{sir}(nx).$$

Матриці Грама для множини колових вектор-функцій кратного аргументу є діагональними з огляду на їх ортогональність на довжині цілого числа періодів:

$$\int_0^{2\pi}\cos(\ell x)\cos(kx)\,dx=\int_0^{2\pi}\sin(\ell x)\sin(kx)\,dx=\begin{cases}0, & k\neq\ell,\\ \pi, & k=\ell.\end{cases}$$

У цьому випадку співвідношення (6) для $i\neq k$ перетворюється на рівність типу $0=0$. Знакозмінні вектор-функції $\operatorname{cosip}(nx,p)$, $\operatorname{sip}(nx,p)$ при $p=1$ і $n=k,\ell$ не є ортогональними для $k\neq\ell$ [10].

Покажемо, що для всіх T_p-періодичних функцій з параметром $p \neq 2$ існують «резонансні» значення недіагональних елементів матриці Грама. Не зменшуючи загальності, розглянемо парні функції, що продукують таку формулу для елемента $g_{k\ell}$:

$$g_{k\ell}(p) = \int_0^{T_p} \operatorname{cosip}(kx, p)\operatorname{cosip}(\ell x, p)\, dx\,. \tag{10}$$

Обидві функції підінтегрального виразу (10) є неперервними, тому на підставі фундаментальної леми Рімана теорії тригонометричних рядів та її узагальнення [8, 13] при $k = \mathrm{const}$ маємо

$$\lim_{\ell\to\infty} g_{k\ell}(p) = 0\,.$$

Далі величини k, ℓ будемо називати цілочисловими частотами T_p-періодичних вектор-функцій. Коли обидві частоти k, ℓ змінюються так, що має місце «резонансне» співвідношення $k/\ell = n$, де n − ціле число, остання формула не має місця. Покладемо в (10) $k = \ell n$ і зробимо заміну змінної інтегрування $u = \ell x$. З огляду на періодичність підінтегральної функції маємо

$$g_{k\ell}(p) = \frac{1}{\ell}\int_0^{\ell T_p} \operatorname{cosip}(nu, p)\operatorname{cosip}(u)\, du = g_{n1}(p)\,. \tag{11}$$

Як бачимо, «резонансні» елементи матриці Грама виражаються через елементи її першого стовпця. У загальному випадку, якщо числа k і ℓ мають найбільший спільний дільник N, тобто $k = Ni$, $\ell = Nj$, де i, j − взаємно прості числа, тоді цілочислові частоти k, ℓ і відповідні елементи матриці Грама задовольняють демультиплікативні «резонансні» співвідношення [2]

$$k = \ell i / j, \qquad g_{k\ell}(p) = g_{ij}(p)\,. \tag{12}$$

Обчислимо елементи $g_{k\ell}(p)$, коли один із індексів є парним числом, а другий − непарним. Згідно з формулою (10) маємо

$$g_{2k,2\ell+1}(p) = S_1(p) + S_2(p), \qquad k, \ell = 1, 2, \ldots, \tag{13}$$

де

$$S_j(p) = \int_{(j-1)T_p/2}^{jT_p/2} \operatorname{cosip}(2kx, p)\operatorname{cosip}((2\ell+1)x, p)\, dx, \qquad j = 1, 2\,. \tag{14}$$

В інтегралі для $S_2(p)$ зробимо заміну змінної інтегрування за формулою $u = T_p/2 - x$. Скориставшись періодичністю і парністю підінтегральної функції та формулами (9), знаходимо

$$S_2(p) = -\int_0^{T_p/2} \operatorname{cosip}(2ku, p)\operatorname{cosip}((2\ell+1)u, p)\, du = -\, S_1(p)\,.$$

Отже,

$$S_1(p) + S_2(p) = 0\,. \tag{15}$$

Це означає, що всі елементи матриці Грама для періодичних вектор-функцій $h(kx, p)$, $h(\ell x, p)$, породжених замкненими траєкторіями з групою симетрій $L_4 4PC$, є ортогональними в УГП, якщо хоча б одна із цілочислових частот є парною і не є «резонансною» з другою парною частотою. При цій умові співвідношення (6) виконується також у формі тотожної рівності $0 = 0$. Це є груповою властивістю розглядуваної множини періодичних вектор-функцій. Вона є інваріантною відносно параметра p множини породжувальних замкнених траєкторій.

Перейдемо до числового аналізу елементів розглядуваних матриць, що стоять в рядках і стовпцях з непарними номерами. Користуючись груповою властивістю симетрії розглядуваних періодичних функцій, виконаємо обчислення для алгебраїчних періодичних функцій, що відповідають параметру $p = 1$.

Ці функції мають вигляд

$$\operatorname{cosip}(x,1) = \operatorname{cor}(x) = \begin{cases} 1 - x/q, & 0 \le x \le 2q, \quad q = \sqrt{2}, \\ x/q - 3, & 2q < x \le 4q, \end{cases}$$

$$\operatorname{sip}(x,1) = \operatorname{sir}(x) = \begin{cases} x/q, & 0 \le x \le q, \\ 2 - x/q, & q < x \le 3q, \\ x/q - 4, & 3q < x \le 4q. \end{cases} \quad (16)$$

На рис. 2 зображено функції $\operatorname{cor}(x), \operatorname{sir}(x)$ як парна і непарна функції відповідно на інтервалі двох періодів.

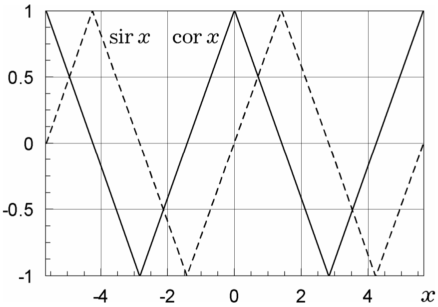

Рис. 2. Графік ромбічних функцій $\operatorname{cor}(x)$, $\operatorname{sir}(x)$ на інтервалі двох періодів

Позначимо через $Q = [q_{ik}]$ матрицю Грама із вектор-функцій $\operatorname{cor}(kx)$, $k = 1, 2, \ldots$. Для елементів першого стовпця (рядка) цієї матриці маємо такі формули [10]:

$$q_{m1} = \begin{cases} q_{mm}/m^2, & m = 2n+1, \\ 0, & m = 2n, \qquad n = 1, 2, \ldots. \end{cases} \quad (17)$$

Згідно з формулами (13)–(15) всі елементи рядків і стовпців з парними номерами, що не стоять на головній діагоналі і не є «резонансними», дорівнюють нулеві, тобто відповідають формулі (6) в сенсі рівності.

Обчислимо напрямні косинуси (нормовані елементи) матриці Q згідно з формулами (6), (10) при $T_p = T_1 = 4\sqrt{2}$. Подамо «нерезонансне» співвідношення (6) при $\ell = 1$ у вигляді рівності і, скориставшись залежностями (17) при $q_{mm} = 1$, отримуємо таку формулу для непарних і «нерезонансних» індексів k, i:

$$\cos\alpha_{ki} = \cos\alpha_{k1}\cos\alpha_{i1}, \qquad \cos\alpha_{ki} = 1/(k^2 i^2). \quad (18)$$

Для «резонансних» елементів демультиплікативного вигляду $\cos\alpha_{ki}$, де $k = i(\ell / j)$, ℓ, j – взаємно прості натуральні числа, отримуємо аналогічну формулу $\cos\alpha_{ki} = \cos\alpha_{\ell j} = 1/(\ell^2 j^2)$. При $j = 1$ згідно з формулою (11) маємо

$$\cos\alpha_{ki} = \cos\alpha_{\ell i, i} = \cos\alpha_{\ell 1}, \qquad k = \ell i. \quad (19)$$

Із формул (18), (19) перша потребує експериментально-числової перевірки.

Запишемо матрицю Q для випадку розміру 6×6:

$$Q = \begin{Vmatrix} 1.00000000 & 0 & 0.11111111 & 0 & 0.04000000 & 0 \\ 0 & 1.00000000 & 0 & 0 & 0 & 0.11111111 \\ 0.11111111 & 0 & 1.00000000 & 0 & 0.00444446 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.00000000 & 0 & 0 \\ 0.04000000 & 0 & 0.00444444 & 0 & 1.00000000 & 0 \\ 0 & 0.11111111 & 0 & 0 & 0 & 1.00000000 \end{Vmatrix}.$$

За геометричним змістом елементи q_{ik} є напрямними косинусами. Елементи, розміщені вище головної діагоналі, отримано числовим інтегруванням квадратур типу (10) з використанням формули трапеції з кроком $h = 4\sqrt{2}/19200$. Елементи лівого нижнього кута цієї матриці отримано згідно з алгебраїчними формулами (12), (18), (19). Як бачимо, $q_{35} - q_{53} = 2 \cdot 10^{-8}$, решта симетричних елементів q_{ik} і q_{ki} збігаються до 9-го знаку включно. В цій таблиці спостерігаємо тільки одну пару «резонансних» елементів q_{31} і q_{62}. Для матриці Q розміром 12×12 можна спостерігати також «резонансні» елементи $q_{9,3}, q_{12,4}$ і $q_{1,5}, q_{2,10}$ та виконання рівностей (12), (18), (19). Для матриці Грама, побудованої на функціях $\mathrm{sir}(kx)$, $k = 1, 2, \ldots$, можна також довести справедливість формули (6) в сенсі її рівності, оскільки елементи такої матриці тільки знаками відрізняються від елементів матриці Q [10].

Числовий аналіз показав, що для гладеньких періодичних функцій вигляду $\mathrm{cor}(nx)/r(nx)$, $\mathrm{sir}(nx)/r(nx)$ [10], де

$$r(nx) = \sqrt{\mathrm{cor}^2(nx) + \mathrm{sir}^2(nx)}, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

також має місце співвідношення (6) у сенсі рівності, але алгебраїчних формул типу (17) для першого стовпця матриці Грама отримати не вдається.

Таким чином, з використанням формул (12), (18), (19) всі елементи матриці Грама $q_{k\ell} = \cos \alpha_{k\ell}$, $k, \ell = 1, 2, \ldots$, обчислюються за елементами її першого стовпця.

Отже, твердження 2, 3 доведено.

Підсумовуючи викладене, зауважимо, якщо в інтегральних формулах типу (10) запровадити довільний інтервал інтегрування $\Delta = b - a$, тоді формули (12), (18), (19) перетворюються на мажорантно-мінорантні співвідношення. Вони мають роздільні точки при $\Delta = \Delta_n = nT$, $n = 1, 2, \ldots$. Отже, наявність рівностей (12), (18), (19) зумовлена двома факторами: періодичністю інтегрованих функцій та вибором інтервалу інтегрування довжиною Δ, кратного одному періоду інтегрованих функцій.

1. *Бари Н.* О базисах в гильбертовом пространстве // Докл. АН СССР. – 1946. – **54**, № 5. – С. 383–386.
2. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы теории нелинейных колебаний. – Москва: Физматгиз, 1963. – 410 с.
3. *Варварецька Г. А., Попов В. Г.* Взаємодія гармонічної хвилі кручення з кільцеподібними дефектами в пружному тілі // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2009. – **52,** № 2. – С. 109–117.
4. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. – Москва: Наука, 1967. – 575 с.
5. *Гохберг И. Ц., Маркус А. С.* Некоторые соотношения между собственными числами и матричными элементами линейных операторов // Мат. сб. – 1964. – **64**(106), № 4. – С. 481–496.
6. *Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.* Современная геометрия. – Москва: Наука, 1979. – 754 с.

7. *Козінов С. В., Лобода В. В.* Періодична система електропроникних тріщин на межі двох п'єзоелектричних матеріалів // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2009. – **52,** № 2. – С. 81–91.
8. *Плахтиенко Н. П.* К исследованию движения тел под действием разрывных сил методом усреднения // Прикл. механика. – 1985. – **21**, № 8. – С. 84–91.
9. *Плахтієнко М. П.* Періодичні функції на замкнених траєкторіях з групою симетрій $L_4 4PC$ // Доп. НАН України. – 2008. – № 4. – С. 36–43.
10. *Плахтієнко М. П.* Ромбічні функції: початки теорії та прикладні задачі. – Київ: ЗНДІП, 2005. – 132 с.
11. *Плешаков М. Г., Попов П. А.* Второе неравенство Джексона в знакосохраняющем приближении периодических функций // Укр. мат. журн. – 2004. – **56**, № 1. – С. 123–128.
12. *Самойленко А. М.* Численно-аналитический метод исследования периодических систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Ч. I // Укр. мат. журн. – 1965. – **17**, № 4. – С. 82–93; Ч. II // Укр. мат. журн. – 1966. – **18**, № 2. – С. 50–59.
13. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3 т. – Москва: Физматгиз, 1963. – Т. III. – 656 с.
14. *Larin V. B.* High-accuracy algorithms for solving the discrete-time periodic Riccati equation // Int. Appl. Mech. – 2007. – **43**, No. 9. – P. 1028–1034.

НЕКЛАССИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ЭЛЕМЕНТАМИ МАТРИЦ ГРАМА СИСТЕМЫ ВЕКТОРОВ УНИТАРНОГО ГИЛЬБЕРТОВОГО ПРОСТРАНСТВА

Для определенного класса бесконечномерных векторов гильбертового пространства найдены соотношения второй степени между элементами матриц Грама в форме равенств и неравенств. Для упорядоченной системы неортогональных периодических вектор-функций выявлены матрицы Грама, недиагональные элементы которых связаны с элементами первого столбца равенствами, не выше второй степени.

NONCLASSICAL RELATIONS BETWEEN ELEMENTS OF GRAM'S MATRICES OF VECTORS SYSTEM OF UNITARY HILBERT SPACE

On the certain class of indefinitely measured vectors of Hilbert space the relationship of the second degree between elements of Gram's matrices in the form of equalities and inequalities are found. For the ordered system of nonorthogonal periodic vector functions the Gram's matrices which contain nondiagonal elements connected to the elements of the first column by the equality not above the second degree are shown.

Ін-т механіки ім. С. П. Тимошенка
НАН України, Київ

Одержано
07.12.09