

О СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЯХ НЕТОНКИХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ НА ОСНОВЕ МЕТОДА СПЛАЙН-КОЛЛОКАЦИИ

Для определения динамических характеристик свободных колебаний круговых незамкнутых цилиндрических оболочек переменной в двух координатных направлениях толщины использован метод сплайн-коллокации в совокупности с методом дискретной ортогонализации. Задача решена в рамках уточненной теории Тимошенко – Миндлина. Исследовано влияние различных законов изменения толщины оболочки на характер ее собственных колебаний. Расчеты проведены при различных геометрических и упругих параметрах оболочки и граничных условиях.

Введение. Оболочки, благодаря своим уникальным свойствам, в частности высокой жесткости при малой массе, нашли широкое применение в авиационной промышленности, строительстве и других областях современной техники. В связи с появлением новых материалов и повышением требований к конструкциям, расширился и усложнился класс задач, требующих решения.

Достаточно полно изучены динамические характеристики тонких оболочек постоянной толщины. В работах [10, 11] систематизированы, обобщены и получили дальнейшее развитие методы исследований свободных колебаний оболочек.

Учет пространственных эффектов, возникающих в процессе колебаний нетонких оболочек, дает возможность более точно описать динамические характеристики оболочки, что есть особенно важным при решении сложных практических задач. В работе [6] анализируется спектр частот и формы колебаний слоистых оболочек, описывается методика решения задач данного класса на основе различных теорий.

В работе [7] подчеркивается важность изучения оболочек переменной жесткости. В работе [9] указывается, что исследование динамической жесткости оболочек переменной толщины представляет большой практический интерес и представлен расчет первых частот колебаний цилиндрических панелей переменной толщины. Несмотря на актуальность таких исследований, число публикаций, посвященных этой проблеме, незначительно [12, 13].

В представленном сообщении развивается эффективная численно-аналитическая методика исследования спектра частот свободных колебаний незамкнутых конечных цилиндрических оболочек переменной толщины в окружном и продольном направлениях. Предлагаемый подход основан на применении метода сплайн-аппроксимации в круговом направлении и решением краевой задачи на собственные значения для систем обыкновенных дифференциальных уравнений высокого порядка с переменными коэффициентами устойчивым численным методом дискретной ортогонализации в сочетании с методом пошагового поиска в продольном. Ранее данная методика рассматривалась для изучения свободных колебаний пластин переменной толщины, замкнутых цилиндрических оболочек переменной толщины, толстостенных ортотропных неоднородных цилиндров, например, в работах [2–5, 8].

1. Основные соотношения. Открытая цилиндрическая оболочка длиной L , толщиной H и радиусом срединной поверхности R рассматривается в цилиндрической системе координат γ, θ, z , где $-\frac{H}{2} \leq \gamma \leq \frac{H}{2}$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq z \leq L$ (рис. 1).

Для определения частот и форм свободных колебаний таких оболочек используется уточненная теория Тимошенко – Миндлина, которая базируется на гипотезе прямой линии. Суть принятой гипотезы состоит в том, что прямолинейный элемент нормали исходной координатной поверхности при малых деформациях сохраняет свою длину и прямолинейность, но не остается перпендикулярным к деформированной срединной поверхности. Согласно принятой гипотезе в системе координат θ, γ, z , (γ – координата в направлении нормали срединной поверхности), связанной со срединной поверхностью оболочки малые перемещения оболочки можно записать в виде

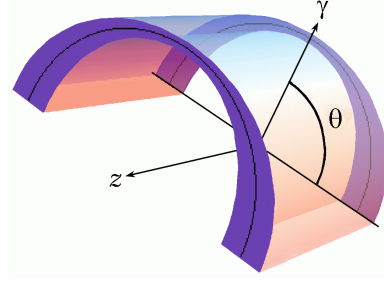


Рис. 1

$$\begin{aligned} u_r(r, \theta, z) &= w(\theta, z), \\ u_\theta(r, \theta, z) &= v(\theta, z) + \gamma \Psi_\theta(\theta, z), \\ u_z(r, \theta, z) &= u(\theta, z) + \gamma \Psi_s(\theta, z), \end{aligned} \quad (1)$$

где $u(z, \theta)$, $v(z, \theta)$, $w(z, \theta)$ – перемещения координатной поверхности, $\Psi_s(z, \theta)$, $\Psi_\theta(z, \theta)$ – функции, характеризующие полный поворот нормали.

Геометрические соотношения соответственно запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned} e_\theta(r, \theta, z) &= \varepsilon_\theta(\theta, z) + \gamma \alpha_\theta(\theta, z), \\ e_z(r, \theta, z) &= \varepsilon_z(\theta, z) + \gamma \alpha_z(\theta, z), \\ e_{\theta z}(r, \theta, z) &= \varepsilon_{\theta z}(\theta, z) + 2\gamma \alpha_{\theta z}(\theta, z), \\ e_{\gamma_\theta}(r, \theta, z) &= \gamma_\theta(\theta, z), \quad e_{\gamma_z}(r, \theta, z) = \gamma_z(\theta, z), \\ \varepsilon_\theta &= \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{1}{R} w, \quad \varepsilon_{\theta z} = \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \alpha_z = \frac{\partial \Psi_z}{\partial z}, \\ \alpha_\theta &= \frac{1}{R} \frac{\partial \Psi_\theta}{\partial \theta} - \frac{1}{R} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{1}{R} w \right), \quad 2\alpha_{\theta z} = \frac{1}{R} \frac{\partial \Psi_z}{\partial \theta} + \frac{\partial \Psi_\theta}{\partial z} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial u}{\partial \theta}, \\ \gamma_\theta &= \Psi_\theta + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{1}{R} v, \quad \gamma_z = \Psi_z + \frac{\partial w}{\partial z}, \end{aligned} \quad (2)$$

$\varepsilon_\theta, \varepsilon_z, \varepsilon_{\theta z}$ – тангенциальные деформации координатной поверхности; $\alpha_\theta, \alpha_z, \alpha_{\theta z}$ – компоненты изгибной деформации; γ_θ, γ_z – углы поворота нормали, обусловленные поперечными сдвигами. Соотношения упругости для цилиндрических ортотропных оболочек с осями ортотропии, совпадающими с координатными осями, запишутся в виде

$$\begin{aligned} N_z &= C_{11} \varepsilon_z + C_{12} \varepsilon_\theta, \quad N_\theta = C_{12} \varepsilon_z + C_{22} \varepsilon_\theta, \\ N_{z\theta} &= C_{66} \varepsilon_{\theta z} + 2D_{66} \frac{1}{R} \alpha_{\theta z}, \quad M_z = D_{11} \alpha_z + D_{12} \alpha_\theta, \\ M_\theta &= D_{12} \alpha_z + D_{22} \alpha_\theta, \quad M_{\theta z} = M_{z\theta} = 2D_{66} \alpha_{\theta z}, \\ Q_\theta &= K_2 \gamma_\theta, \quad Q_z = K_1 \gamma_z, \quad N_{\theta z} = C_{66} \varepsilon_{\theta z}, \end{aligned} \quad (3)$$

где $K_1 = \frac{5}{6} h(\theta, z) G_{13}$, $K_2 = \frac{5}{6} h(\theta, z) G_{23}$; G_{13}, G_{23} – модули поперечных сдви-

гов; $D_{ij} = \frac{1}{12} B_{ij} h^3(\theta, z)$; $B_{66} = G_{12}$, $B_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_1 \nu_2}$, $B_{12} = \frac{\nu_2 E_1}{1 - \nu_1 \nu_2} = \frac{\nu_1 E_2}{1 - \nu_1 \nu_2}$,
 $B_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_1 \nu_2}$; E_1 , E_2 , G_{12} , ν_1 , ν_2 – модули упругости, сдвига и коэффициенты Пуассона соответственно.

Уравнения движения элемента срединной поверхности имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_z}{\partial z} + \frac{1}{R} \frac{\partial N_{\theta z}}{\partial \theta} &= \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, & \frac{1}{R} \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial N_{z\theta}}{\partial z} + \frac{1}{R} Q_\theta &= \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial Q_z}{\partial z} + \frac{1}{R} \frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} - \frac{1}{R} N_\theta &= \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, & \frac{\partial M_z}{\partial z} + \frac{1}{R} \frac{\partial M_{\theta z}}{\partial \theta} - Q_z &= \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \Psi_z}{\partial t^2}, \\ \frac{1}{R} \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial M_{z\theta}}{\partial z} - Q_\theta &= \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \Psi_\theta}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (4)$$

$N_{z\theta} - \frac{1}{R} M_{\theta z} - N_{\theta z} = 0$. Здесь N_z , N_θ , $N_{z\theta}$, $N_{\theta z}$ – тангенциальные усилия; Q_z , Q_θ – перерезывающие усилия; M_z , M_θ , $M_{z\theta}$, $M_{\theta z}$ – изгибающие и крутящие моменты; $\rho = \rho(\theta, z)$ – плотность материала оболочки; $h = h(\theta, z)$ – толщина оболочки.

Предполагая, что все точки оболочки совершают гармонические колебания с круговой частотой ω , учитывая следующие представления:

$$\begin{aligned} u(\theta, z, t) &= \tilde{u}(\theta, z) e^{i\omega t}, & v(\theta, z, t) &= \tilde{v}(\theta, z) e^{i\omega t}, & w(\theta, z, t) &= \tilde{w}(\theta, z) e^{i\omega t}, \\ \Psi_\theta(\theta, z, t) &= \tilde{\Psi}_\theta(\theta, z) e^{i\omega t}, & \Psi_z(\theta, z, t) &= \tilde{\Psi}_z(\theta, z) e^{i\omega t} \end{aligned}$$

(далее знак « \sim » опускаем), уравнения движения перепишем в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_z}{\partial z} + \frac{1}{R} \frac{\partial N_{\theta z}}{\partial \theta} + \rho h \omega^2 u &= 0, \\ \frac{1}{R} \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial N_{z\theta}}{\partial z} + \frac{1}{R} Q_\theta + \rho h \omega^2 v &= 0, \\ \frac{\partial Q_z}{\partial z} + \frac{1}{R} \frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} - \frac{1}{R} N_\theta + \rho h \omega^2 w &= 0, \\ \frac{\partial M_z}{\partial z} + \frac{1}{R} \frac{\partial M_{\theta z}}{\partial \theta} - Q_z + \rho \omega^2 \frac{h^3}{12} \Psi_z &= 0, \\ \frac{1}{R} \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial M_{z\theta}}{\partial z} - Q_\theta + \rho \omega^2 \frac{h^3}{12} \Psi_\theta &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Подставляя соотношения (2), (3) в (5), получаем разрешающую систему дифференциальных уравнений относительно функций $u(z, \theta)$, $v(z, \theta)$, $w(z, \theta)$, $\Psi_z(z, \theta)$, $\Psi_\theta(z, \theta)$ и их производных, которую запишем в виде

$$\begin{aligned} L_i \left(u, \frac{\partial u}{\partial \theta}, \frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial^2 u}{\partial^2 \theta}, \frac{\partial^2 u}{\partial^2 z}, \frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial z}, v, \frac{\partial v}{\partial \theta}, \frac{\partial v}{\partial z}, \frac{\partial^2 v}{\partial^2 \theta}, \frac{\partial^2 v}{\partial^2 z}, \frac{\partial^2 v}{\partial \theta \partial z}, w, \frac{\partial w}{\partial \theta}, \right. \\ \left. \frac{\partial w}{\partial z}, \frac{\partial^2 w}{\partial^2 \theta}, \frac{\partial^2 w}{\partial^2 z}, \frac{\partial^2 w}{\partial \theta \partial z}, \Psi_\theta, \frac{\partial \Psi_\theta}{\partial \theta}, \frac{\partial \Psi_\theta}{\partial z}, \frac{\partial^2 \Psi_\theta}{\partial^2 \theta}, \frac{\partial^2 \Psi_\theta}{\partial^2 z}, \right. \\ \left. \frac{\partial^2 \Psi_\theta}{\partial \theta \partial z}, \Psi_z, \frac{\partial \Psi_z}{\partial \theta}, \frac{\partial \Psi_z}{\partial z}, \frac{\partial^2 \Psi_z}{\partial^2 \theta}, \frac{\partial^2 \Psi_z}{\partial^2 z}, \frac{\partial^2 \Psi_z}{\partial \theta \partial z}, \omega^2 \right) = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

где L_i , $i = 1, \dots, 5$, – линейные операторы.

Рассматривались следующие граничные условия на криволинейных контурах $z = \text{const}$, $\theta = \text{const}$:

- I. При $z=0$ и $z=L$ контур жестко закреплен $u = v = w = \Psi_0 = \Psi_z = 0$;
при $\theta = 0$ и $\theta = \pi$ для незамкнутых оболочек контур жестко закреплен $u = v = w = \Psi_\theta = \Psi_z = 0$.
- II. При $z=0$ и $z=L$ контур жестко закреплен $u = v = w = \Psi_0 = \Psi_z = 0$;
при $\theta=0$ и $\theta=\pi$ контур шарнирно опертый $u = \frac{\partial v}{\partial \theta} = w = \Psi_z = \frac{\partial \Psi_\theta}{\partial \theta} = 0$.
- III. При $z=0$ и $z=L$ контур шарнирно опертый $\frac{\partial u}{\partial z} = v = w = \frac{\partial \Psi_z}{\partial z} = \Psi_\theta = 0$; при $\theta = 0$ и $\theta = \pi$ контур шарнирно опертый $u = \frac{\partial v}{\partial \theta} = w = \Psi_z = \frac{\partial \Psi_\theta}{\partial \theta} = 0$.
- IV. При $z=0$ и $z=L$ контур шарнирно опертый $\frac{\partial u}{\partial z} = v = w = \frac{\partial \Psi_z}{\partial z} = \Psi_\theta = 0$; при $\theta = 0$ и $\theta = \pi$ контур жестко закреплен $u = v = w = \Psi_0 = \Psi_z = 0$.

Таким образом, двумерная краевая задача на собственные значения полностью сформулирована.

2. Методика решения. Для решения поставленной задачи используется и развивается эффективная численно-аналитическая методика, основанная на сведении двумерной краевой задачи к одномерной методом сплайн-коллокации и последующим ее решением методом дискретной ортогонализации с применением метода пошагового поиска.

Решение системы (6) будем искать в виде

$$\begin{aligned} u(z, \theta) &= \sum_{i=0}^N u_i(\theta) \varphi_{1i}(z), & v(z, \theta) &= \sum_{i=0}^N v_i(\theta) \varphi_{2i}(z), \\ w(z, \theta) &= \sum_{i=0}^N w_i(\theta) \varphi_{3i}(z), & \Psi_z(z, \theta) &= \sum_{i=0}^N \Psi_{zi}(\theta) \varphi_{4i}(z), \\ \Psi_\theta(z, \theta) &= \sum_{i=0}^N \Psi_{\theta i}(\theta) \varphi_{5i}(z), \end{aligned} \quad (7)$$

где $u_i(\theta)$, $v_i(\theta)$, $w_i(\theta)$, $\Psi_{\theta i}(\theta)$, $\Psi_{zi}(\theta)$ – искомые функции переменной θ ; $\varphi_{ji}(z)$, $j = 1, \dots, 5$, $i = 0, \dots, N$, – линейные комбинации B -сплайнов на равномерной сетке $\Delta: 0 = z_0 < z_1 < \dots < z_N = L$, с учетом граничных условий при $z = 0$ и $z = L$. Наивысшая степень производной по координате z от функций $u(\theta, z)$, $v(\theta, z)$, $w(\theta, z)$, $\Psi_\theta(\theta, z)$, $\Psi_z(\theta, z)$, входящих в разрешающую систему, не выше второго порядка и можно ограничиться аппроксимацией сплайн-функциями третьей степени:

$$B_3^i(z) = \frac{1}{6} \begin{cases} 0, & -\infty < z < z_{i-2}, \\ y^3, & z_{i-2} \leq z < z_{i-1}, \\ -3y^3 + 3y^2 + 3y + 1, & z_{i-1} \leq z < z_i, \\ 3y^3 - 6y^2 + 4, & z_i \leq z < z_{i+1}, \\ (1-y)^3, & z_{i+1} \leq z < z_{i+2}, \\ 0, & z_{i+2} \leq z < \infty, \end{cases}$$

где $y = \frac{z - z_k}{h_z}$ на интервале $[z_k, z_{k+1}]$, $k = i - 2, \dots, i + 1$, $i = -1, \dots, N + 1$, $h_z = z_{k+1} - z_k = \text{const}$. Функции $\varphi_{ij}(z)$ при условии равенства нулю разрешающей функции определяются следующим образом: $\varphi_{j0}(z) = -4B_3^{-1}(z) + B_3^0(z)$, $\varphi_{j1}(z) = B_3^{-1}(z) - \frac{1}{2}B_3^0(z) + B_3^1(z)$, $\varphi_{ji}(z) = B_3^i(z)$. При условии равенства нулю производной по z разрешающей функции для функций $\varphi_{ij}(z)$ имеем $\varphi_{j0}(z) = B_3^0(z)$, $\varphi_{j1}(z) = B_3^{-1}(z) - \frac{1}{2}B_3^0(z) + B_3^1(z)$, $\varphi_{ji}(z) = B_3^i(z)$, $i = 2, \dots, N - 2$.

Подставляем выражения (7) в систему разрешающих уравнений (6) и требуем их удовлетворения в точках коллокации $\xi_k \in [0, L]$, $k = 0, \dots, N$. Специальный выбор точек коллокации позволяет существенно увеличить точность аппроксимации:

$$\xi_{2i} = z_{2i} + t_1 h_z, \quad \xi_{2i+1} = z_{2i} + t_2 h_z, \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

где $t_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}$, $t_2 = 1 - t_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}$. Точки t_1 и t_2 – корни полинома Лежандра второй степени $P_2(t) = 6t^2 - 6t + 1$ на отрезке $[0, 1]$.

Введем обозначения: $\Phi_{j\alpha} = [\varphi_{ji}^{(\alpha)}(\xi_k)]$, $i, k = 0, \dots, N$, $j = 1, \dots, 5$, $\alpha = 0, 1, 2$, $\bar{u} = [u_0, \dots, u_N]^\top$, $\bar{v} = [v_0, \dots, v_N]^\top$, $\bar{w} = [w_0, \dots, w_N]^\top$, $\bar{\Psi}_z = [\Psi_{z0}, \dots, \Psi_{zN}]^\top$, $\bar{\Psi}_\theta = [\Psi_{\theta0}, \dots, \Psi_{\theta N}]^\top$, $\bar{b}_{k\ell} = \{b_{k\ell}(\theta, \xi_0), \dots, b_{k\ell}(\theta, \xi_N)\}^\top$, $k = 1, \dots, 5$, $\ell = 0, \dots, N$, $\ell = 1, \dots, 19$. Точки коллокации выбраны так, что матрицы Φ_{j0} – невырожденные, то есть существуют обратные матрицы Φ_{j0}^{-1} . С учетом введенных обозначений система разрешающих уравнений примет вид

$$\begin{aligned} \bar{u}'' &= \Phi_{10}^{-1}(\bar{b}_{11} * \Phi_{12} + \bar{b}_{15} * \Phi_{11} + \omega^2 \bar{b}_{19} * \Phi_{10})\bar{u} + \Phi_{10}^{-1}(\bar{b}_{18} * \Phi_{10})\bar{u}' + \\ &\quad + \Phi_{10}^{-1}(\bar{b}_{14} * \Phi_{21})\bar{v} + \Phi_{10}^{-1}(\bar{b}_{12} * \Phi_{21} + \bar{b}_{16} * \Phi_{20})\bar{v}' + \\ &\quad + \Phi_{10}^{-1}(\bar{b}_{13} * \Phi_{31} + \bar{b}_{17} * \Phi_{30})\bar{w}, \\ \bar{v}'' &= \Phi_{20}^{-1}(\bar{b}_{2,10} * \Phi_{11})\bar{u} + \Phi_{20}^{-1}(\bar{b}_{21} * \Phi_{11} + \bar{b}_{2,12} * \Phi_{10})\bar{u}' + \Phi_{20}^{-1}(\bar{b}_{22} * \Phi_{20} + \\ &\quad + \bar{b}_{23} * \Phi_{22} + \bar{b}_{2,13} * \Phi_{21} + \omega^2 \bar{b}_{2,15} * \Phi_{20})\bar{v} + \Phi_{20}^{-1}(\bar{b}_{2,11} * \Phi_{20})\bar{v}' + \\ &\quad + \Phi_{20}^{-1}(\bar{b}_{24} * \Phi_{30})\bar{w} + \Phi_{20}^{-1}(\bar{b}_{25} * \Phi_{30})\bar{w}' + \Phi_{20}^{-1}(\bar{b}_{25} * \Phi_{41} + \\ &\quad + \bar{b}_{2,14} * \Phi_{40})\Psi'_z + \Phi_{20}^{-1}(\bar{b}_{27} * \Phi_{50} + \bar{b}_{28} * \Phi_{52} + \bar{b}_{29} * \Phi_{51})\bar{\Psi}_\theta, \\ \bar{w}'' &= \Phi_{30}^{-1}(\bar{b}_{31} * \Phi_{11})\bar{u} + \Phi_{30}^{-1}(\bar{b}_{32} * \Phi_{20})\bar{v} + \Phi_{30}^{-1}(\bar{b}_{33} * \Phi_{20})\bar{v}' + \\ &\quad + \Phi_{30}^{-1}(\bar{b}_{34} * \Phi_{30} + \bar{b}_{35} * \Phi_{32} + \bar{b}_{3,10} * \Phi_{31} + \omega^2 \bar{b}_{3,12} * \Phi_{30})\bar{w} + \\ &\quad + \Phi_{30}^{-1}(\bar{b}_{3,11} * \Phi_{30})\bar{w}' + \Phi_{30}^{-1}(\bar{b}_{36} * \Phi_{41} + \bar{b}_{39} * \Phi_{40})\bar{\Psi}_z + \\ &\quad + \Phi_{30}^{-1}(\bar{b}_{38} * \Phi_{50})\bar{\Psi}_\theta + \Phi_{30}^{-1}(\bar{b}_{37} * \Phi_{50})\bar{\Psi}'_\theta, \\ \bar{\Psi}_z'' &= \Phi_{40}^{-1}(\bar{b}_{42} * \Phi_{12} + \bar{b}_{49} * \Phi_{11} + \omega^2 \bar{b}_{4,16} * \Phi_{10})\bar{u} + \Phi_{40}^{-1}(\bar{b}_{41} * \Phi_{10})\bar{u}' + \\ &\quad + \Phi_{40}^{-1}(\bar{b}_{4,12} * \Phi_{21})\bar{v} + \Phi_{40}^{-1}(\bar{b}_{43} * \Phi_{21} + \bar{b}_{4,10} * \Phi_{20})\bar{v}' + \\ &\quad + \Phi_{40}^{-1}(\bar{b}_{44} * \Phi_{31} + \bar{b}_{4,11} * \Phi_{30})\bar{w} + \Phi_{40}^{-1}(\bar{b}_{45} * \Phi_{40} + \bar{b}_{46} * \Phi_{42} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \bar{b}_{4,13} * \Phi_{41} + \omega^2 \bar{b}_{4,17} * \Phi_{40}) \Psi_z + \Phi_{40}^{-1} (\bar{b}_{4,15} * \Phi_{40}) \bar{\Psi}'_z + \\
& + \Phi_{40}^{-1} (\bar{b}_{48} * \Phi_{51}) \bar{\Psi}_\theta + \Phi_{40}^{-1} (\bar{b}_{47} * \Phi_{51} + \bar{b}_{4,14} * \Phi_{50}) \bar{\Psi}'_\theta, \\
\bar{\Psi}''_\theta = & \Phi_{50}^{-1} (\bar{b}_{5,11} * \Phi_{11}) \bar{u} + \Phi_{50}^{-1} (\bar{b}_{51} * \Phi_{11} + \bar{b}_{5,12} * \Phi_{10}) \bar{u}' + \\
& + \Phi_{50}^{-1} (\bar{b}_{52} * \Phi_{20} + \bar{b}_{5,13} * \Phi_{21} + \bar{b}_{54} * \Phi_{22} + \omega^2 \bar{b}_{5,17} * \Phi_{20}) \bar{v} + \\
& + \Phi_{50}^{-1} (\bar{b}_{53} * \Phi_{20}) \bar{v}' + \Phi_{50}^{-1} (\bar{b}_{55} * \Phi_{30}) w + \Phi_{50}^{-1} (\bar{b}_{56} * \Phi_{30}) \bar{w}' + \\
& + \Phi_{50}^{-1} (\bar{b}_{5,16} * \Phi_{41}) \bar{\Psi}_z + \Phi_{50}^{-1} (\bar{b}_{57} * \Phi_{41} + \bar{b}_{5,14} * \Phi_{40}) \bar{\Psi}'_z + \\
& + \Phi_{50}^{-1} (\bar{b}_{58} * \Phi_{50} + \bar{b}_{59} * \Phi_{52} + \bar{b}_{5,15} * \Phi_{51} + \\
& + \omega^2 \bar{b}_{5,18} * \Phi_{50}) \bar{\Psi}_\theta + \Phi_{50}^{-1} (\bar{b}_{5,10} * \Phi_{50}) \bar{\Psi}'_\theta. \tag{8}
\end{aligned}$$

Систему дифференциальных уравнений (8) можно привести к виду

$$\bar{Y}' = A(\theta, \omega) \bar{Y}, \tag{9}$$

где $\bar{Y} = \{\bar{u}, \bar{u}', \bar{v}, \bar{v}', \bar{w}, \bar{w}', \bar{\Psi}_z, \bar{\Psi}'_z, \bar{\Psi}_\theta, \bar{\Psi}'_\theta\}^T$, $A(\theta, \omega)$ – квадратная матрица размера $10(N+1) \times 10(N+1)$. Граничные условия запишутся в виде

$$B_1 \bar{Y}(0) = \bar{0}, \quad B_2 \bar{Y}(\pi) = \bar{0}, \tag{10}$$

здесь B_1 и B_2 – прямоугольные матрицы размера $5(N+1) \times 10(N+1)$.

Краевую задачу (9), (10) на собственные значения можно решить с использованием метода дискретной ортогонализации совместно с методом пошагового поиска.

Анализ результатов. 1. На основании предлагаемой методики исследовался спектр частот свободных колебаний незамкнутых круговых цилиндрических оболочек (изотропных и ортотропных) переменной толщины в окружном и продольном направлениях при различных параметрах. Для оценки достоверности результатов, полученных при использовании представленной методики, рассматривался спектр частот свободных колебаний оболочки с шарнирно опертыми краями при различном числе N точек коллокации, а также проводилось сравнение с результатами вычислений частот колебаний по трехмерной теории с возможным в этом случае представлением перемещений в виде $u_r = \bar{u}_r(r) \cos n\theta \sin \frac{k\pi z}{L}$, $u_z = \bar{u}_z(r) \cos n\theta \cos \frac{k\pi z}{L}$,

$u_\theta = \bar{u}_\theta(r) \sin n\theta \sin \frac{k\pi z}{L}$ и последующим применением метода дискретной ортогонализации и пошагового поиска.

Первоначально рассматривали незамкнутую изотропную оболочку постоянной толщины с коэффициентом Пуассона $\nu = 0.3$ и геометрическими параметрами: длиной $L = 20$, радиусом $R = 10$ и постоянной толщиной $H_0 = 2$ при $0 \leq \theta \leq \pi$. Полученные значения безразмерного параметра $\Omega_m = \omega_m H \sqrt{\rho/G}$ (m – номер частоты) представлены в табл. 1.

Таблица 1

m	Трехмерная теория	Уточненная теория				
		Волнообразование	$N = 10$	$N = 14$	$N = 18$	$N = 22$
1	0.06964	$n = 2, k = 1$	0.0708	0.0707	0.0707	0.0707
2	0.09142	$n = 3, k = 1$	0.0939	0.0939	0.0938	0.0938
3	0.09899	$n = 1, k = 1$	0.0987	0.0987	0.0987	0.0986

Результаты вычислений имеют хорошее совпадение, что свидетельствует о возможности применения представленной методики для решения задач данного класса.

2. Далее рассматривали изотропную оболочку с теми же параметрами (см. п. 1), но с переменной толщиной, изменяющейся в окружном направлении по квадратичному закону

$$H(\theta) = H_0 \left(1 + \alpha \left(6 \cdot \frac{\theta^2}{\pi^2} - 6 \cdot \frac{\theta}{\pi} + 1 \right) \right),$$

при граничных условиях *I–IV* и значениях параметра $\alpha \in [-0.3, 0.3]$. Расчеты проводились для $N = 18$.

Рис. 2 иллюстрирует сечения оболочек переменной толщины при значениях $\alpha = 0.3$ и $\alpha = -0.3$.

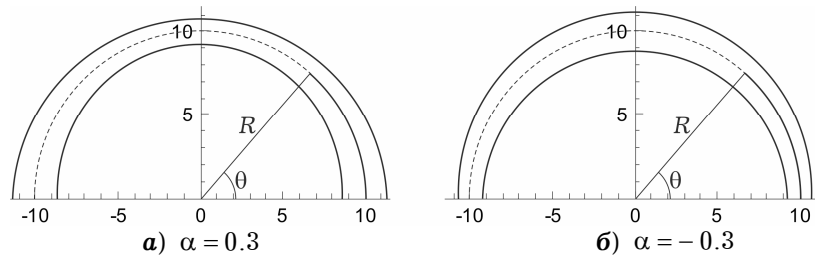


Рис. 2

Результаты вычислений первых трех значений безразмерного частотного параметра $\Omega_m = \omega_m H \sqrt{\rho/G}$ в зависимости от α при граничных условиях *I–IV* представлены соответственно на рис. 3а – рис. 3в.

Анализ результатов вычислений показывает, что изменение параметра α незначительно влияет на спектр собственных частот колебаний оболочки при выбранном законе изменения толщины. Так, при граничных условиях типа *I* (рис. 3а) частота Ω_1 уменьшается с увеличением параметра α приблизительно на 3%, увеличение частоты Ω_2 составляет около 9%, частота Ω_3 практически не изменяется.

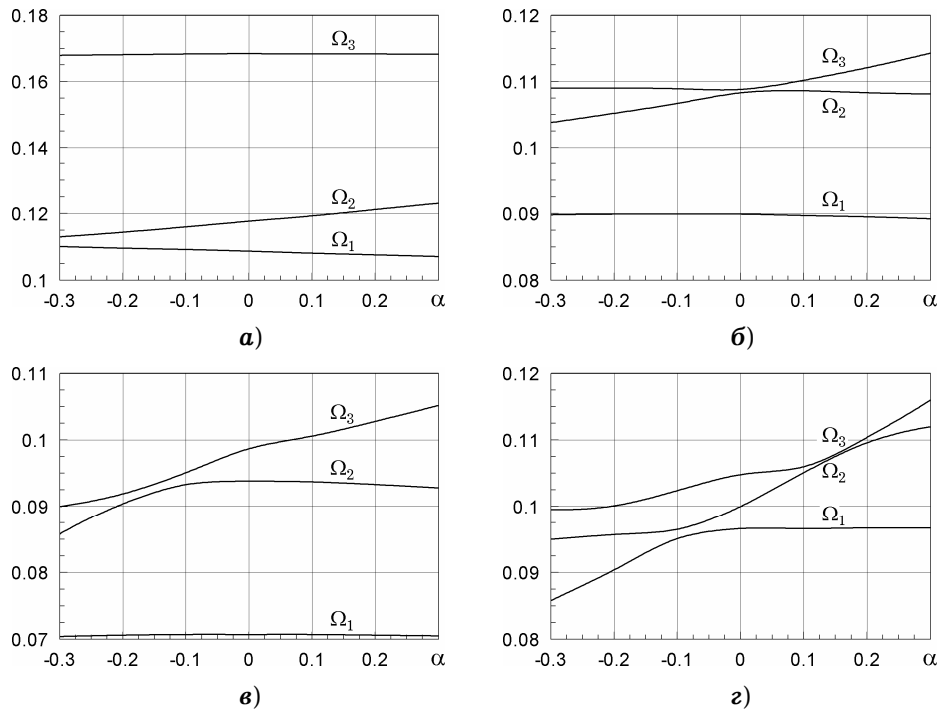


Рис. 3

На рис. 4 представлены результаты расчета первой частоты Ω_1 изотропной оболочки с толщиной, зависящей от двух переменных (θ и z) и изменяющейся по закону

$$H(\theta, z) = H_0 \left(1 + \alpha \cos 2\theta \right) \left(1 + \beta \left(\frac{6z^2}{L^2} - \frac{6z}{L} + 1 \right) \right),$$

при значениях параметров $\alpha \in [-0.3, 0.3]$ и $\beta \in [-0.3, 0.3]$. Исследования выполнены для граничных условий типа *I*.

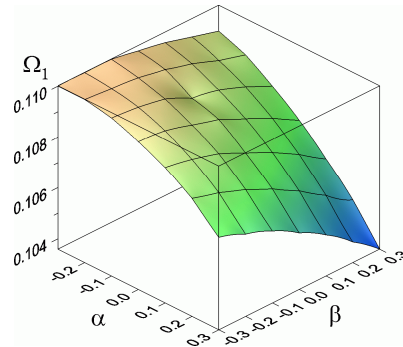


Рис. 4

Анализ проведенных вычислений показывает, что наибольшее значение частота Ω_1 принимает при $\alpha = -0.3$ и $\beta = -0.3$, а наименьшее – при $\alpha = 0.3$ и $\beta = 0.3$, причем изменение составляет около 6%. Таким образом, варьирование параметрами α и β из рассматриваемого диапазона позволяет незначительно повысить жесткость исследуемой оболочки.

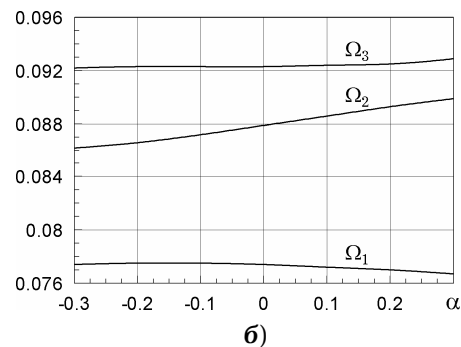
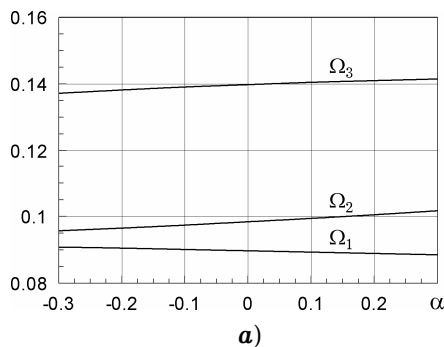
3. Рассматривали незамкнутую цилиндрическую оболочку с аналогичными геометрическими параметрами: длиной $L = 20$, радиусом $R = 10$ и постоянной толщиной $H_0 = 2$ при $0 \leq \theta \leq \pi$, изготовленную из волокнистого стеклопластика с ортогонально уложенными слоями в соотношении 5:1 со следующими характеристиками упругости:

$$\begin{aligned} \nu_{\theta z} &= 0.149, & \nu_{z\theta} &= 0.0648, & E_z &= 4.76 \cdot 10^4 \text{ МПа}, & E_\theta &= 2.07 \cdot 10^4 \text{ МПа}, \\ G_{z\theta} &= 0.531 \cdot 10^4 \text{ МПа}, & G_{z\gamma} &= 0.501 \cdot 10^4 \text{ МПа}, & G_{\theta\gamma} &= 0.434 \cdot 10^4 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

На рис. 5 представлены результаты расчета первых трех значений частотного параметра $\Omega_m = \omega_m H \sqrt{\rho/E_0}$ колебаний оболочки с переменной толщиной в окружном направлении, изменяющейся по закону

$$H(\theta) = H_0 \left(1 + \alpha \left(6 \cdot \frac{\theta^2}{\pi^2} - 6 \cdot \frac{\theta}{\pi} + 1 \right) \right),$$

при значениях параметра $\alpha \in [-0.3, 0.3]$ и граничных условиях *I–IV* (соответственно рис. 5а – рис. 5б).



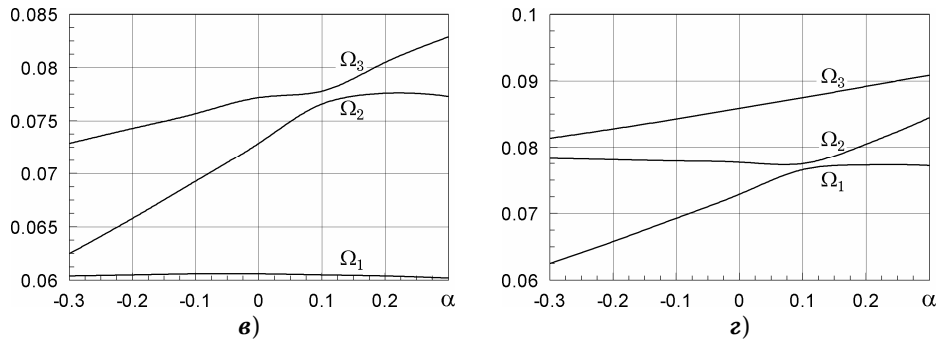


Рис. 5

На рис. 6 представлены результаты расчета частоты Ω_1 этой оболочки с толщиной, переменной в двух координатных направлениях, изменяющейся по закону

$$H(\theta, z) = H_0(1 + \alpha \cos 2\theta) \left(1 + \beta \left(\frac{6z^2}{L^2} - \frac{6z}{L} + 1 \right) \right),$$

при значениях параметров $\alpha \in [-0.3, 0.3]$ и $\beta \in [-0.3, 0.3]$. Исследования выполнены для граничных условий типа I.

Как и в случае ортотропной оболочки, наибольшее значение первая частота Ω_1 принимает при $\alpha = -0.3$ и $\beta = -0.3$, а наименьшее – при $\alpha = 0.3$ и $\beta = 0.3$, причем изменение составляет около 5%.

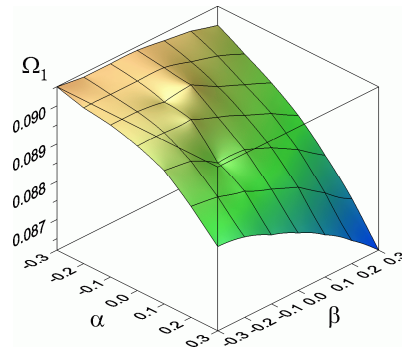


Рис. 6

Проведено сравнение характера изменения первой частоты колебаний оболочек из волокнистых стеклопластиков ВМ-1 с различным соотношением ортогонально уложенных однонаправленных слоев 5:1, 2:1 и 1:1, характеристики упругости которых представлены в табл. 2 [1].

Таблица 2

Характеристики упругости	Соотношение волокон		
	5:1 (C1)	2:1 (C2)	1:1 (C3)
$\nu_{\theta z}$	0.149	0.105	0.123
$\nu_{z\theta}$	0.0648	0.077	0.110
$E_z \cdot 10^4$ МПа	4.76	3.68	3.09
$E_\theta \cdot 10^4$ МПа	2.07	2.68	2.74
$G_{z\theta} \cdot 10^4$ МПа	0.531	0.505	0.396
$G_{z\gamma} \cdot 10^4$ МПа	0.501	0.447	0.366
$G_{\gamma z} \cdot 10^4$ МПа	0.434	0.414	0.369

В табл. 3 представлены вычисленные значения безразмерного частотного параметра Ω_1 колебаний оболочки с переменной толщиной в окружном направлении, изменяющейся по закону

$$H(\theta) = H_0 \left(1 + \alpha \left(6 \cdot \frac{\theta^2}{\pi^2} - 6 \cdot \frac{\theta}{\pi} + 1 \right) \right),$$

при различных значениях параметра α для материала с соотношением волокон С1, С2, С3. Расчеты проводились при граничных условиях типа I и числе точек коллокации $N = 18$.

Таблица 3

	Ω_1						
	$\alpha = -0.3$	$\alpha = -0.2$	$\alpha = -0.1$	$\alpha = 0$	$\alpha = 0.1$	$\alpha = 0.2$	$\alpha = 0.3$
С1	0.0908	0.0905	0.0901	0.0897	0.0893	0.0889	0.0885
С2	0.0888	0.0885	0.0882	0.0880	0.0877	0.0874	0.0872
С3	0.0812	0.0811	0.0810	0.0809	0.0808	0.0807	0.0807

Анализ значений, представленных в табл. 3, показывает, что оболочка, изготовленная из материала С1, имеет более высокую жесткость. Влияние параметра изменения толщины α также более существенно (до 3 %) для оболочек, изготовленных из этого материала (для оболочек из материала С2 изменение составляет около 2 %, из С3 – около 1 %).

Выводы. Для решения задачи о свободных колебаниях изотропных и ортотропных оболочек переменной толщины в рамках уточненной теории Миндлина – Тимошенко предложен эффективный численно-аналитический подход. Исходная краевая задача на собственные значения для систем дифференциальных уравнений в частных производных с переменными коэффициентами с помощью сплайн-аппроксимации неизвестных функций и метода коллокации сводится к одномерным задачам высокого порядка. Полученные системы краевых задач на собственные значения для обыкновенных дифференциальных уравнений решались устойчивым численным методом дискретной ортогонализации в сочетании с методом пошагового поиска. Большое внимание уделяется достоверности полученных результатов путем сравнения расчетов с данными, полученными для отдельных краевых условий по трехмерной теории, а также с помощью индуктивных приемов. Проведен расчет значений собственных частот нетонких незамкнутых цилиндрических оболочек переменной толщины как изотропных, так и изготовленных из ортотропного материала при различных условиях на краях. Приведена зависимость собственных частот от механических и геометрических параметров, типов граничных условий и законов изменения толщины цилиндрической оболочки.

1. Ашкенази Е. К., Ганов Э. В. Анизотропия конструктивных материалов: Справочник. – Ленинград: Машиностроение, 1980. – 247 с.
2. Григоренко А. Я., Ефимова Т. Л. Применение метода сплайн-аппроксимации для решения задач о собственных колебаниях прямоугольных пластин переменной толщины // Прикл. механика. – 2005. – **41**, № 10. – С. 90–99.
То же: Grigorenko A. Ya., Efimova T. L. Spline-approximation method applied to solve natural-vibration problems for rectangular plates of varying thickness // Int. Appl. Mech. – 2005. – **41**, No. 10. – P. 1161–1169.
3. Григоренко А. Я., Ефимова Т. Л. Применение метода сплайн-аппроксимации для решения задач об осесимметричных свободных колебаниях толстостенных ортотропных цилиндров // Прикл. механика. – 2008. – **44**, № 10. – С. 74–85.
То же: Grigorenko A. Ya., Efimova T. L. Using spline-approximation to solve problems of axisymmetric free vibration of thick-walled orthotropic cylinders // Int. Appl. Mech. – 2008. – **44**, No. 10. – P. 1137–1147.
4. Григоренко А. Я., Яремченко Н. П. О напряженном состоянии прямоугольных в плане нетонких ортотропных оболочек переменной толщины // Прикл. механика. – 2008. – **44**, № 8. – С. 91–102.

- То же: Grigorenko A. Ya., Yaremchenko N. P. Stress state of nonthin orthotropic shells with varying thickness and rectangular planform // *Int. Appl. Mech.* – 2008. – **44**, No. 8. – P. 905–915.
5. Григоренко О. Я., Єфімова Т. Л., Пузирьов С. В. Дослідження вільних коливань прямокутних ортотропних пластин лінійно змінної товщини // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2006. – **49**, № 3. – С. 153–161.
 6. Григоренко Я. М., Беспалова Е. И., Китайгородский А. Б., Шинкарь А. И. Свободные колебания элементов оболочечных конструкций. – Киев: Наук. думка, 1986. – 171 с.
 7. Григоренко Я. М., Василенко А. Т. Теория оболочек переменной жесткости. – Киев: Наук. думка, 1981. – 544 с. – (Методы расчета оболочек: В 5 т. – Т. 4.)
 8. Єфімова Т. Л. Решение задач о свободных крутильных колебаниях толстостенных ортотропных неоднородных цилиндров // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2009. – **52**, № 1. – С. 92–100.
То же: Efimova T. L. Solution of problems of free torsional vibrations of thick-walled orthotropic inhomogeneous cylinders // *J. Math. Sci.* – 2009. – **168**, No. 4. – P. 613–623.
 9. Ониашвили О. Д. Некоторые динамические задачи теории оболочек. – Москва: Изд-во АН СССР, 1957. – 195 с.
 10. Leissa A. W. Vibration of shells. – NASA SP-288, 1973. – 428 с.
 11. Markuš Š. The mechanics of vibration of cylindrical shells. – Amsterdam: Elsevier, 1988. – 159 p.
 12. Suzuki K., Leissa A. W. Exact solutions for the free vibration of open cylindrical shells with circumferentially varying curvature and thickness // *J. Sound and Vibr.* – 1986. – **107**. – P. 1–15.
 13. Zhang L., Xiang Y. Exact solutions for vibration of stepped circular cylindrical shells // *J. Sound and Vibr.* – 2007. – **299**. – P. 948–964.

ПРО ВІЛЬНІ КОЛИВАННЯ НЕТОНКИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК ЗМІННОЇ ТОВЩИНИ НА ОСНОВІ МЕТОДУ СПЛАЙН-КОЛОКАЦІЇ

Для визначення динамічних характеристик вільних коливань кругових незамкнених циліндричних оболонок змінної у двох координатних напрямках товщини застосовано метод сплайн-колокації разом з методом дискретної ортогоналізації. Задачу розв'язано в рамках уточненої теорії Тимошенка – Міндіна. Досліджено вплив різних законів зміни товщини оболонки на характер її власних коливань. Розрахунки проведено для різних геометричних і пружних параметрів оболонки та граничних умов.

ON FREE VIBRATIONS OF CYLINDRICAL SHELLS (NOT THIN) WITH VARIABLE THICKNESS BASED ON SPLINE-COLLOCATION METHOD

The spline-collocation method together with discrete orthogonalization method is used for calculation of dynamic characteristics of free vibrations of circular cylindrical shells with variable thickness in two coordinate directions. The problem is solved within the framework of Timoshenko – Mindlin's refined theory. The influence of the shell thickness variation on the character of its natural vibrations is examined. The calculations for different geometric and elastic shell parameters at different boundary conditions are carried out.

¹ Ін-т механіки ім. С. П. Тимошенка
НАН України, Київ,

² Київ. нац. ун-т стр-ва и архітектури, Київ

Получено

09.11.09