УДК 539.3

І. Є. Бернакевич, П. П. Вагін, І. Я. Шот

ДОСЛІДЖЕННЯ СТІЙКОЇ РІВНОВАГИ ТОНКИХ ОБОЛОНОК, ПОДАТЛИВИХ НА ЗСУВ І СТИСНЕННЯ

З використанням співвідношень геометрично нелінійної теорії тонких оболонок, податливих на зсув та стиснення (шестимодальний варіант), записано ключові рівняння для визначення методом скінченних елементів початкового післякритичного стану. Особливість моделі полягає у напівдискретизації на основі кінематичних гіпотез Тимошенка – Міндліна вектора зміщень пружного тіла за змінною товщиною зі збереженням повного вектора поворотів нормалі серединної поверхні. Чисельно розв'язано задачу про стійкість затиснутої по контуру круглої пластини, яка знаходиться під дією радіальних рівномірно розподілених уздовж контуру стискувальних зусиль. Здійснено порівняльний аналіз отриманих чисельних розв'язків з розв'язками, наведеними в літературі.

Сучасна нелінійна теорія оболонок, головним чином, використовує класичну гіпотезу Кірхгофа – Лява та гіпотезу Тимошенка – Міндліна (п'ятимодальний варіант) [6, 9, 10] та ін. Проблемі дослідження нелінійної теорії оболонок типу Тимошенка, податливих на зсув та стиснення (шестимодальний варіант), присвячено праці [2, 5, 8].

У цій статті записано ключові співвідношення для визначення початкового післякритичного стану гнучких оболонок, податливих на зсув і стиснення, методом скінченних елементів. Особливість такої моделі полягає у напівдискретизації на основі кінематичних гіпотез Тимошенка – Міндліна вектора зміщень пружного тіла за змінною товщиною зі збереженням повного вектора поворотів нормалі серединної поверхні.

1. Основні припущення та співвідношення. Розглянемо оболонку як тривимірне тіло, що в недеформованому стані відноситься до криволінійної ортогональної системи координат α_i, $i = 1,2,3$. Вважаємо, що координатні лінії серединної поверхні Ω співпадають з лініями головних кривин, а товщина h є істотно меншою від інших розмірів оболонки. При деформуванні оболонки її елементи, які є ортогональними до серединної поверхні, залишаються прямолінійними і до деформованої серединної поверхні. При цьому може змінюватися довжина елементів і кут повороту нормалі.

Вирази для визначення компонент тензора лінійної деформації і тензора повороту в матричній форми з точністю до $o(h)$ подамо у вигляді [2]

$$e_{\mathrm{L}} = C_{\mathrm{L}} u, \qquad \omega = C_{\Omega} u, \tag{1}$$

де $u = (u_1, u_2, u_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)^\top$ – вектор переміщень точок серединної поверхні і кутів повороту нормалі;

$$e_{\mathrm{L}} = (e_{11}, e_{22}, e_{33}, e_{12}, e_{13}, e_{23}, æ_{11}, æ_{22}, æ_{12}, æ_{13}, æ_{23})^\top,$$

$$\omega = \left(\overset{0}{\omega}_1, \overset{0}{\omega}_2, \overset{0}{\omega}_3, \overset{1}{\omega}_1, \overset{1}{\omega}_2, \overset{1}{\omega}_3\right)^\top$$

– відповідно матриці-стовпці лінійних деформацій та поворотів: e_{11}, e_{22}, e_{33}, e_{12}, e_{13}, e_{23}, $\overset{0}{\omega}_1$, $\overset{0}{\omega}_2$, $\overset{0}{\omega}_3$ – компоненти тангенціальних, а $æ_{11}$, $æ_{22}$, $æ_{12}$, $æ_{13}$, $æ_{23}$, $\overset{1}{\omega}_1$, $\overset{1}{\omega}_2$, $\overset{1}{\omega}_3$ – компоненти згинних лінійних деформацій і поворотів; C_{L}, C_{Ω} – матриці диференціальних операторів.

Деформаційні співвідношення для гнучких оболонок з урахуванням лінійної і нелінійної складових деформації запишемо таким чином:

$$\varepsilon_{11} = e_{11} + \frac{1}{2}\overset{0}{\omega}{}_2^2 + \frac{1}{2}\overset{0}{\omega}{}_3^2, \qquad \varepsilon_{22} = e_{22} + \frac{1}{2}\overset{0}{\omega}{}_1^2 + \frac{1}{2}\overset{0}{\omega}{}_3^2, \quad \varepsilon_{33} = e_{33},$$

$$\varepsilon_{12} = e_{12} - \overset{0}{\omega}_1 \overset{0}{\omega}_2, \qquad \varepsilon_{13} = e_{13} - \overset{0}{\omega}_1 \overset{0}{\omega}_3, \qquad \varepsilon_{23} = e_{23} - \overset{0}{\omega}_2 \overset{0}{\omega}_3,$$

$$\chi_{11} = \varkappa_{11} + \overset{0}{\omega}_2 \overset{1}{\omega}_2 + \overset{0}{\omega}_3 \overset{1}{\omega}_3 - \frac{1}{2}k_1 \overset{0}{\omega}{}_2^2 - \frac{1}{2}(k_1 + 2k_2)\overset{0}{\omega}{}_3^2,$$

$$\chi_{22} = \varkappa_{22} + \overset{0}{\omega}_1 \overset{1}{\omega}_1 + \overset{0}{\omega}_3 \overset{1}{\omega}_3 - \frac{1}{2}k_2 \overset{0}{\omega}{}_1^2 - \frac{1}{2}(2k_1 + k_2)\overset{0}{\omega}{}_3^2,$$

$$\chi_{12} = \varkappa_{12} - \frac{1}{2}\overset{0}{\omega}_1 \overset{1}{\omega}_2 - \frac{1}{2}\overset{1}{\omega}_1 \overset{0}{\omega}_2, \qquad \chi_{13} = \varkappa_{13} - \frac{1}{2}\overset{0}{\omega}_1 \overset{1}{\omega}_3 - \frac{1}{2}\overset{1}{\omega}_1 \overset{0}{\omega}_3 + k_2 \overset{0}{\omega}_1 \overset{0}{\omega}_3,$$

$$\chi_{23} = \varkappa_{23} - \frac{1}{2}\overset{0}{\omega}_2 \overset{1}{\omega}_3 - \frac{1}{2}\overset{1}{\omega}_2 \overset{0}{\omega}_3 + k_1 \overset{0}{\omega}_2 \overset{0}{\omega}_3.$$

Позначивши $\varepsilon = \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{23}, \chi_{11}, \chi_{22}, \chi_{12}, \chi_{13}, \chi_{23}\}^\top$, наведені вище нелінійні співвідношення запишемо як

$$\varepsilon = e_{\mathrm{L}} + e_{\mathrm{N}}, \tag{2}$$

де e_{N} в матричній формі має вигляд [1]

$$e_{\mathrm{N}} = \frac{1}{2}(C_\Omega u)_{11}^\top E_\Omega C_\Omega u.$$

Тут $E_\Omega = (E_1, E_2, \ldots, E_{11})^\top$ – матриця-стовпець, компонентами якої є підібрані відповідним чином матриці E_i розміру 6×6 (див. [1]). Тоді деформаційні співвідношення теорії оболонок (2) визначаємо як

$$\varepsilon(u) = C_{\mathrm{L}} u + \frac{1}{2}(C_\Omega u)_{11}^\top E_\Omega C_\Omega u. \tag{3}$$

Розгорнутий вигляд матриць C_{L}, C_Ω та E_Ω можна знайти в праці [1]. Зауважимо, що, відкинувши другий доданок у формулі (3), отримаємо лінійні деформаційні співвідношення [3].

Матрична форма закону пружності для лінійно пружних оболонок має вигляд

$$\sigma = B\varepsilon, \tag{4}$$

де $\sigma = (N_{11}, N_{22}, N_{33}, S, N_{13}, N_{23}, M_{11}, M_{22}, H, M_{13}, M_{23})^\top$ – матриця-стовпець симетричних зусиль і моментів; B – матриця пружних сталих [3].

Рівняння рівноваги оболонок є наступними:

$$C_\sigma \sigma^* + P = 0, \tag{5}$$

де P – матриця-стовпець, що складається з компонент зовнішнього навантаження; C_σ – матриця диференціальних операторів; $\sigma^* = \left(N_{11}^*, N_{22}^*, N_{33}^*,\right.$ $\left.N_{12}^*, N_{21}^*, N_{13}^*, N_{31}^*, N_{23}^*, N_{32}^*, M_{11}^*, M_{22}^*, M_{12}^*, M_{21}^*, M_{13}^*, M_{23}^*\right)^\top$ – матриця-стовпець нововведених зусиль і моментів, які пов'язані з симетричними зусиллями і моментами залежністю [2]

$$\sigma^* = F\sigma. \tag{6}$$

Тут F – матриця, компоненти якої залежать від матриці-стовпця ω.

Систему (5) доповнюємо статичними

$$G_\sigma \sigma^* = \sigma_g, \qquad (\alpha_1, \alpha_2) \in \Omega_\sigma, \tag{7}$$

та кінематичними

$$G_u u = u_g, \qquad (\alpha_1, \alpha_2) \in \Omega_u \tag{8}$$

граничними умовами. Тут $\sigma_g = (N_n, N_s, N_z, M_n, M_s, M_z)^\top$ – матриця-стовпець крайових зусиль-моментів, а $u_g = (u_n^{\mathrm{b}}, u_s^{\mathrm{b}}, u_z^{\mathrm{b}}, \gamma_n^{\mathrm{b}}, \gamma_s^{\mathrm{b}}, \gamma_z^{\mathrm{b}})^\top$ – матриця-стовпець крайових зміщень. Через G_σ, G_u позначено матриці змінних коефіцієнтів.

2. Стаціонарність потенціальної енергії. Серед усіх геометрично можливих переміщень, що задовольняють умови (3)–(8), істинними будуть ті переміщення, які надають функціоналу повної потенціальної енергії

$$\ell(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega \varepsilon^\top(u) E_0 B \varepsilon(u)\, d\Omega - \int_\Omega u^\top P\, d\Omega - \int_{\Omega_\sigma} (G_u u)^\top \sigma_g\, d\Omega_\sigma \tag{9}$$

стаціонарного значення, тобто

$$\delta\ell(u) = 0\,. \tag{10}$$

У рівності (9) E_0 – матриця розміру 11×11 з елементами

$$E_{ij} = 0, \qquad i \ne j, \qquad\qquad E_{11} = E_{22} = E_{33} = E_{77} = E_{88} = 1\,,$$

$$E_{44} = E_{55} = E_{66} = E_{99} = E_{10,10} = E_{11,11} = 2\,.$$

З умови (10) стаціонарності функціонала повної потенціальної енергії отримуємо рівняння рівноваги (5) і статичні крайові умови (7).

3. Квазілінеаризація. Розвинемо в ряд вираз (9) для потенціальної енергії $\ell(u)$ в околі її i-го наближення до стаціонарного значення і, нехтуючи величинами, вище другого порядку, отримаємо

$$\ell(u_i + \Delta u) = \ell(u_i) + \delta\ell(u_i) + \frac{1}{2}\delta^2\ell(u_i)\,.$$

Тоді приріст потенціальної енергії

$$\Delta\ell(u_i;\Delta u) = \ell(u_i + \Delta u) - \ell(u_i) = \delta\ell(u_i) + \frac{1}{2}\delta^2\ell(u_i)$$

з урахуванням (9) запишемо так:

$$\begin{aligned}\Delta\ell(u_i;\Delta u) = &-\int_\Omega (\Delta u)^\top P\, d\Omega - \int_{\Omega_\sigma} (G_u \Delta u)^\top \sigma_g\, d\Omega_\sigma + \\ &+ \frac{1}{2}\int_\Omega (\varepsilon(u_i + \Delta u) - \varepsilon(u_i))^\top E_0 B(\varepsilon(u_i + \Delta u) - \varepsilon(u_i))\, d\Omega + \\ &+ \int_\Omega (\varepsilon(u_i + \Delta u) - \varepsilon(u_i))^\top E_0 B \varepsilon(u_i)\, d\Omega\,.\end{aligned}$$

Враховуючи, що

$$\varepsilon(u_i + \Delta u) - \varepsilon(u_i) = C_{\mathrm{L}}\Delta u + (C_\Omega u_i)_{11}^\top E_\Omega C_\Omega \Delta u + \frac{1}{2}(C_\Omega \Delta u)_{11}^\top E_\Omega C_\Omega \Delta u\,,$$

і нехтуючи величинами з порядком малості, вище другого, отримуємо для приросту потенціальної енергії остаточний вираз:

$$\begin{aligned}\Delta\ell(u_i;\Delta u) = &-\int_\Omega (\Delta u)^\top P\, d\Omega - \int_\Omega (G_u \Delta u)^\top \sigma_g\, d\Omega + \\ &+ \frac{1}{2}\int_\Omega \big(C_{\mathrm{L}}\Delta u + C_{\mathrm{N}}(u_i, \Delta u)\big)^\top E_0 B\big(C_{\mathrm{L}}\Delta u + C_{\mathrm{N}}(u_i, \Delta u)\big)\, d\Omega + \\ &+ \int_\Omega \big(C_{\mathrm{L}}\Delta u + C_{\mathrm{N}}(u_i, \Delta u)\big)^\top E_0 B\left(C_{\mathrm{L}} u_i + \frac{1}{2}C_{\mathrm{N}}(u_i, u_i)\right) d\Omega + \\ &+ \frac{1}{2}\int_\Omega \big(C_{\mathrm{N}}(\Delta u, \Delta u)\big)^\top E_0 B\big(C_{\mathrm{L}} u_i + C_{\mathrm{N}}(u_i, u_i)\big)\, d\Omega\,.\end{aligned} \tag{11}$$

Тут $C_{\mathrm{N}}(a, b) = (C_\Omega a)_{11}^\top E_\Omega C_\Omega b$.

Використовуючи скінченноелементну апроксимацію, шуканий вектор переміщень подамо у вигляді

$$u = \mathscr{N} q\,, \tag{12}$$

де q − матриця-стовпець невідомих вузлових переміщень і поворотів, $\mathscr{N}$ − блочно-діагональна матриця апроксимуючих поліномів.

Перетворимо підінтегральний вираз останнього інтеграла в формулі (11). Для цього введемо матрицю-стовпець

$$T(u_i) = (T_1, \ldots, T_{11})^\top = E_0 B\big(C_\mathrm{L} u_i + C_\mathrm{N}(u_i, u_i)\big)$$

і, використовуючи формули для апроксимації переміщень (12), отримаємо

$$\begin{aligned}\big(C_\mathrm{N}(\Delta\mathscr{N}q, \Delta\mathscr{N}q)\big)^\top E_0 B\big(C_\mathrm{L}\mathscr{N}q_i + C_\mathrm{N}(\mathscr{N}q_i, \mathscr{N}q_i)\big) &= \\ = \big(C_\mathrm{N}(\Delta\mathscr{N}q, \Delta\mathscr{N}q)\big)^\top T(\mathscr{N}q_i) &= \\ = (\Delta q)^\top \left(\sum_{k=1}^{11} T_k(\mathscr{N}q_i)(C_\Omega\mathscr{N})_{11}^\top E_k C_\Omega \mathscr{N}\right)\Delta q\,. &\end{aligned} \tag{13}$$

Тоді умова стаціонарності функціонала набуде вигляду

$$\delta\ell(u_i + \Delta u) = \delta\big(\Delta\ell(u_i; \Delta u)\big) = 0\,.$$

Звідси випливає умова стаціонарності квадратичної функції (11), яку запишемо як

$$\frac{\partial\Delta\ell(q_i; \Delta q)}{\partial\Delta q} = K_T(q_i)\Delta q + K(q_i)q_i - \mathscr{R} = 0\,. \tag{14}$$

Тут введено такі позначення:

$$K(q_i) = \int\limits_\Omega \big((C_\mathrm{L} + (C_\Omega\mathscr{N}q_i)_{11}^\top E_\Omega C_\Omega)\mathscr{N}\big)^\top E_0 B\left(\left(C_\mathrm{L} + \frac{1}{2}(C_\Omega\mathscr{N}q_i)_{11}^\top E_\Omega C_\Omega\right)\mathscr{N}\right) d\Omega$$

− матриця січної жорсткості; $K_T = K_U + G$ − матриця тангенціальної жорсткості, де

$$K_U(q_i) = \int\limits_\Omega \big((C_\mathrm{L} + (C_\Omega\mathscr{N}q_i)_{11}^\top E_\Omega C_\Omega)\mathscr{N}\big)^\top E_0 B\big((C_\mathrm{L} + (C_\Omega\mathscr{N}q_i)_{11}^\top E_\Omega C_\Omega)\mathscr{N}\big)\, d\Omega$$

− матриця переміщень і

$$G(q_i) = \int\limits_\Omega \sum_{k=1}^{11} T_k(\mathscr{N}q_i)(C_\Omega\mathscr{N})_{11}^\top E_k C_\Omega \mathscr{N}\, d\Omega$$

− геометрична матриця жорсткості або матриця початкових напружень;

$$\mathscr{R} = \int\limits_\Omega \mathscr{N}^\top P\, d\Omega + \int\limits_{\Omega_\sigma} (G_u\mathscr{N})^\top \sigma_g\, d\Omega_\sigma$$

− матриця-стовпець зовнішнього вузлового навантаження.

4. Початковий післякритичний стан. У випадку деформування оболонок під дією зовнішніх навантажень, пропорційних одному параметру λ, повні переміщення у початковому післякритичному стані u_* визначаємо як суму переміщень початкового (докритичного) стану u_0 і збурених переміщень u [7]:

$$u_* = u_0 + \alpha u, \qquad 0 < \alpha \ll 1\,.$$

Деформації в докритичному стані визначаємо за лінійними залежностями

$$e_\mathrm{L}(u_0) = C_\mathrm{L} u_0\,. \tag{15}$$

Інтегральні характеристики напружень у початковому стані визначаємо із закону пружності (4):

$$\sigma_0 = Be_{\mathrm{L}}(u_0).$$

Деформаційні співвідношення в початковому післякритичному стані визначаємо у вигляді суми початкових деформацій (15) і нелінійних деформацій, зумовлених збуреними переміщеннями:

$$\varepsilon_* = e_{\mathrm{L}}(u_0) + \alpha e_{\mathrm{L}}(u) + \alpha^2 e_{\mathrm{N}}(u).$$

Зусилля-моменти в цьому випадку подаємо наступним чином:

$$\sigma_* = B\varepsilon_* = B\big(e_{\mathrm{L}}(u_0) + \alpha e_{\mathrm{L}}(u) + \alpha^2 e_{\mathrm{N}}(u)\big) = \sigma_0 + \alpha\sigma_{\mathrm{L}}(u) + \alpha^2\sigma_{\mathrm{N}}(u).$$

Енергію деформації в початковому післякритичному стані запишемо так:

$$U(u) = \frac{1}{2}\int_{\Omega} \varepsilon_*^{\top}(u) E_0 B \varepsilon_*(u)\, d\Omega = \frac{1}{2}\int_{\Omega} \big(e_{\mathrm{L}}(u_0) + \alpha e_{\mathrm{L}}(u) + \alpha^2 e_{\mathrm{N}}(u)\big)^{\top} \times$$

$$\times E_0(\sigma_0 + \alpha\sigma_{\mathrm{L}}(u) + \alpha^2\sigma_{\mathrm{N}}(u))\, d\Omega =$$

$$= U_0 + \alpha U_1 + \alpha^2 U_2 + \ldots .$$

Тут

$$U_0 = \frac{1}{2}\int_{\Omega} e_{\mathrm{L}}^{\top}(u_0) E_0 \sigma_0\, d\Omega, \qquad U_1 = \int_{\Omega} e_{\mathrm{L}}^{\top}(u) E_0 \sigma_0\, d\Omega,$$

$$U_2 = \frac{1}{2}\int_{\Omega} \big(e_{\mathrm{L}}^{\top}(u) E_0 \sigma_{\mathrm{L}}(u) + 2e_{\mathrm{N}}^{\top}(u) E_0 \sigma_0\big)\, d\Omega.$$

Квадратичний функціонал U_2, який залежить від збурених переміщень, подамо у вигляді суми

$$U_2 = U_2^* + U_2^{**},$$

де

$$U_2^* = \frac{1}{2}\int_{\Omega} e_{\mathrm{L}}^{\top}(u) E_0 B e_{\mathrm{L}}(u)\, d\Omega, \qquad U_2^{**} = \int_{\Omega} C_{\mathrm{N}}^{\top}(u,u) E_0 \sigma_0\, d\Omega.$$

Оскільки функціонал U_0 визначає енергію докритичних деформацій, а функціонал U_1 містить тільки лінійні члени післякритичних переміщень, то

$$\delta^2(U_0) = \delta^2(U_1) = 0.$$

Функціонали U_2^* і U_2^{**} містять квадратичні члени від збурених переміщень, а їхня друга варіація приводить до рівняння стійкості.

Використовуючи скінченноелементну апроксимацію (12) і перетворення (13), функціонали U_2^* і U_2^{**} подамо у вигляді

$$U_2^* = \frac{1}{2}\int_{\Omega} q^{\top} (C_{\mathrm{L}}\mathcal{N})^{\top} E_0 B (C_{\mathrm{L}}\mathcal{N}) q\, d\Omega, \tag{16}$$

$$U_2^{**} = \int_{\Omega} q^{\top} \left(\sum_{k=1}^{11} (E_0\sigma_0)_k (C_{\Omega}\mathcal{N})_{11}^{\top} E_k C_{\Omega}\mathcal{N}\right) q\, d\Omega. \tag{17}$$

При варіюванні функціонала U_2^{**} інтегральні характеристики σ_0 вважаємо константами. Оскільки докритичний стан визначається за лінійною теорією, то інтегральні характеристики σ_0 змінюються пропорційно до параметра навантаження λ:

$$\sigma_0 \simeq \lambda \sigma_0 . \tag{18}$$

Враховуючи (18), з виразів (16) і (17) отримуємо рівняння стійкості

$$\int_\Omega (C_L \mathcal{N})^\top E_0 B C_L \mathcal{N}\, d\Omega + \lambda \int_\Omega \sum_{k=1}^{11} (E_0 \sigma_0)_k (C_\Omega \mathcal{N})_{11}^\top E_k C_\Omega \mathcal{N}\, d\Omega = 0 . \tag{19}$$

Використовуючи вирази (14), рівняння стійкості (19) запишемо у такому матричному вигляді:

$$K_U(0) + \lambda G(q_0) = 0 . \tag{20}$$

Тоді найменше власне значення рівняння (20) визначає критичний параметр навантаження λ^*, при якому оболонка з початкового стану рівноваги переходить у суміжний.

5. Чисельний приклад. Досліджували стійкість затиснутої по контуру круглої пластинки з радіусом R і товщиною h, яка знаходиться під дією радіальних рівномірно розподілених уздовж контуру стискуючих зусиль P. Вважали, що точки контуру можуть вільно зміщуватися в площині пластини, а її зігнута поверхня є осесиметричною. Аналітичний розв'язок цієї задачі за теорією Кірхгофа – Лява наведено у роботі [4].

Наведемо порівняння результатів чисельного розрахунку для цієї задачі критичного навантаження $P_{\text{кр}}$ у випадку, коли модуль Юнга матеріалу пластинки $E = 0.625 \cdot 10^{11}$ Н/м^2, коефіцієнт Пуассона $\nu = 0.22$ і $\dfrac{h}{R} = \dfrac{1}{20}$:

– за теорією Кірхгофа – Лява (аналітичний розв'язок [4])

$$P_{\text{кр}} \cdot 10^{-8} = 1.00439 ;$$

– за теорією Тимошенка – Міндліна (п'ятимодальний варіант)

$$P_{\text{кр}} \cdot 10^{-8} = 1.00210 ;$$

– за теорією Тимошенка – Міндліна (шестимодальний варіант)

$$P_{\text{кр}} \cdot 10^{-8} = 1.00159 .$$

З аналізу наведених результатів бачимо, що навантаження, знайдене за шестимодальною теорією оболонок зі скінченною зсувною жорсткістю, є меншим порівняно з обчисленими за іншими теоріями оболонок. Врахування обтиску зменшує жорсткість оболонки, тому для того, щоб оболонка втратила стійкість, достатньо меншого навантаження.

1. *Вагін П. П., Іванова Н. В.* Нелінійне деформування багатошарових оболонок. Постановка задачі / Львів. ун-т. – Львів, 1996. – 27 с. – Деп. в УкрІНТЕІ 20.12.96 № 285 Ук96.
2. *Вагін П. П., Іванова Н. В., Шинкаренко Г. А.* Про одну математичну модель динамічного деформування гнучких оболонок // Доп. НАН України. – 1999. – № 6. – С. 54–59.
3. *Вагін П. П., Шот І. Я.* Аналіз напружено-деформованого стану тонких оболонок, податливих на зсув та стиснення // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. математика та інформатика. – 2006. – Вип. 11. – С. 135–147.
4. *Вольмир А. С.* Устойчивость деформируемых систем. – Москва: Наука, 1967. – 984 с.
5. *Галимов К. З.* Теория оболочек с учетом поперечного сдвига. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1977. – 211 с.
6. *Григоренко Я. М., Влайков Г. Г., Григоренко А. Я.* Численно-аналитическое решение задач механики оболочек на основе различных моделей. – Киев: Академпериодика, 2006. – 472 с.
7. *Новожилов В. В.* Основы нелинейной теории упругости. – Москва–Ленинград: Гостехиздат, 1948. – 211 с.

8. *Рикардс Р. Б.* Метод конечных элементов в теории оболочек и пластин. – Рига: Зинатне, 1988. – 284 с.
9. *Ciarlet P. G.* Mathematical elasticity. – Vol. III: Theory of Shells. – Amsterdam: North-Holland, 2000. – 666 p.
10. *Libai A., Simmonds J. G.* The nonlinear theory of elastic shells. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1998. – 560 p.

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОГО РАВНОВЕСИЯ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК, ПОДАТЛИВЫХ НА СДВИГ И СЖАТИЕ

С использованием соотношений геометрически нелинейной теории тонких оболочек, податливых на сдвиг и сжатие (шестимодальный вариант), записаны ключевые уравнения для определения методом конечных элементов начального послекритического состояния. Особенность модели состоит в полудискретизации на основе кинематических гипотез Тимошенко – Миндлина вектора перемещений упругого тела по толщине с сохранением полного вектора поворотов нормали срединной поверхности. Численно решена задача об устойчивости защемленной по контуру круглой пластины, которая находится под действием радиальных сжимающих равномерно распределенных вдоль контура усилий. Проведен сравнительный анализ полученных численных решений с решениями, известными в литературе.

STUDY OF STABLE EQUILIBRIUM OF THIN SHELLS, COMPLIANT TO SHEAR AND PRESSURE

On the basis of relations of non-linear geometric theory of thin shells compliant to shear and pressure (a six-modal variant) the key equations for the determination of initial post-critical state by the method of finite elements are written. The peculiarity of the model is semidiscretization of the displacements vector of elastic body along the variable of thickness on the basis of Timoshenko – Mindlin kinematical hypotheses, with preservation of a complete rotation vector of median surface normal. The problem on stability of a circular plate clamped along its contour which is under the action of radial uniformly distributed compressive forces along the contour is solved in a numerical way. Comparative analysis of numerical solutions obtained and solutions known from the literature is made.

Львів. нац. ун-т ім. Івана Франка, Львів

Одержано
09.10.09