

СТАТИЧНІ ЗАДАЧІ ТЕРМОПРУЖНОСТІ ДЛЯ ШАРУВАТИХ ТЕРМОЧУТЛИВИХ ПЛИТ ЗА КУБІЧНОЇ ЗАЛЕЖНОСТІ КОЕФІЦІЄНТІВ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ВІД ТЕМПЕРАТУРИ

Викладено аналітично-числову методику розв'язування одновимірних статичних задач термопружності для шаруватих плит при різних способах нагріву з урахуванням кубічної залежності коефіцієнтів теплопровідності та довільного характеру залежності інших фізико-механічних характеристик від температури. При цьому задачі теплопровідності з використанням побудованого точного розв'язку допоміжної задачі зведено, незалежно від кількості шарів, до розв'язування одного або системи двох нелінійних алгебраїчних рівнянь. Досліджено температурні поля і напруження у чотиришарових плитах за складного теплообміну.

До визначення термопружного стану як однорідних, так і неоднорідних тіл, зокрема з плоскопаралельними межами, з урахуванням термочутливості (залежності фізико-механічних характеристик (ФМХ) від температури) привертана увага багатьох дослідників [4, 15–20]. У випадку навіть незв'язаних задач термопружності задачі теплопровідності залишаються нелінійними. Для їх розв'язання дуже часто застосовують підстановку Кірхгофа [1, 2, 5, 6, 9–12, 14, 16]. Це дає змогу частково або повністю лінеаризувати задачі і відповідно спростити їх розв'язання або отримати в окремих випадках точний розв'язок. Однак для шаруватих тіл повністю лінеаризувати задачі теплопровідності, в тому числі й найпростіші одновимірні, не вдається. Нелінійність зберігається в одній з умов теплового контакту. Очевидно, що побудова розв'язку задачі теплопровідності, а отже, і відповідної задачі термопружності, ускладниться як за конвективного або конвективно-променевого теплообміну з навколишнім середовищем, так і за урахування більш складної, ніж лінійна, температурної залежності коефіцієнтів теплопровідності. Тому розв'язують такі задачі, як правило, числовими або наближеними аналітичними методами чи їх поєднанням.

Нижче із застосуванням підходу [7] викладено аналітично-числову методику розв'язування одновимірних статичних задач термопружності для шаруватих плит за різних способів нагріву з урахуванням кубічної залежності коефіцієнтів теплопровідності та довільного характеру залежностей інших ФМХ від температури. Задачі теплопровідності з використанням побудованих за допомогою підстановки Кірхгофа і узагальнених функцій точних розв'язків відповідних рівнянь при спеціальних граничних умовах зведено, незалежно від кількості шарів, до розв'язування одного або системи двох нелінійних алгебраїчних рівнянь. Задачу термопружності розв'язано в напруженнях. Граничні умови на циліндричній поверхні задоволено інтегрально. Чисельно проаналізовано температурні поля і термопружний стан у чотиришарових плитах за променевого і конвективно-променевого теплообмінів.

Постановка задачі термопружності. Розглянемо віднесену до циліндричної системи координат \tilde{r} , φ , \tilde{z} вільну від силових навантажень круглу багатощарову плиту, складові ізотропні частини якої ідеально контактують, а ФМХ залежать від температури. Поверхні $\tilde{z} = 0$, $\tilde{z} = \tilde{z}_n$ можуть підтримуватися при заданій температурі, нагріватися заданим тепловим потоком або шляхом конвективного чи конвективно-променевого теплообмінів. Поверхня $\tilde{r} = \tilde{R}$ вважається теплоізолюваною. Визначимо стаціонарне температурне поле такої плити та зумовлені ним напруження у припущенні, що залежність коефіцієнтів теплопровідності від температури є кубічною

$$\lambda_t^{(i)}(t) = \lambda_0^{(i)} \Lambda_i(t) = \lambda_0^{(i)} (1 + \beta_i t + \mu_i t^2 + \eta_i t^3), \quad i = 1, \dots, n, \quad (1)$$

де n – кількість складових; $\lambda_0^{(i)}$, β_i , μ_i , $\eta_i = \text{const}$. Обмежень на характер залежностей інших характеристик не накладаємо.

Розв'язування задачі теплопровідності. Для знаходження одновимірного стаціонарного температурного поля використаємо систему рівнянь

$$\frac{d}{dz} \left[\lambda_t^{(i)}(t_i) \frac{dt_i}{dz} \right] = 0, \quad (2)$$

умови контакту на поверхнях поділу

$$\begin{aligned} [t_{j+1} - t_j]_{z=z_j} &= 0, \\ \left[\lambda_t^{(j+1)}(t) \frac{dt_{j+1}}{dz} - \lambda_t^{(j)}(t) \frac{dt_j}{dz} \right]_{z=z_j} &= 0, \quad j = 1, \dots, n-1, \end{aligned} \quad (3)$$

граничні умови

$$\begin{aligned} \left[a_1(t_{1k}) \frac{dt_{1k}}{dz} + \ell b_1(t_{1k}) \right]_{z=0} &= 0, \\ \left[a_n(t_{nk}) \frac{dt_{nk}}{dz} + \ell b_n(t_{nk}) \right]_{z=z_n} &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Тут $z = \tilde{z}/\ell$, $z_i = \tilde{z}_i/\ell$, ℓ – характерний лінійний розмір; функції $a_m(t)$, $b_m(t)$, $m = 1, \dots, n$, вибираємо відповідно до способу нагріву.

Для розв'язання задачі (2)–(4) застосуємо підхід [7], згідно з яким спочатку необхідно знайти точний розв'язок відповідної допоміжної задачі. У цьому випадку такою допоміжною задачею є системи рівнянь (2) з кубічними залежностями коефіцієнтів теплопровідності від температури (1) за умов контакту (3) і граничних умов

$$\left[\lambda_t^{(1)}(t_1) \frac{dt_1}{dz} \right]_{z=0} = -\ell q_0, \quad [t_n - t_c]_{z=z_n} = 0. \quad (5)$$

Розв'язок цієї допоміжної задачі знаходимо способом, який включає:

1°. Лінеаризацію вихідних систем рівнянь. Застосувавши до (2) підстановки Кірхгофа

$$\theta_i = \frac{1}{\lambda_0^{(i)}} \int_0^{t_i} \lambda_t^{(i)}(\zeta) d\zeta, \quad (6)$$

дістанемо такі системи рівнянь:

$$\frac{d}{dz} \left(\lambda_0^{(i)} \frac{d\theta_i}{dz} \right) = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (7)$$

2°. Формулювання умов контакту і крайових умов для змінних Кірхгофа. З (1), (6) для j -ї складової отримаємо

$$\frac{\eta_j}{4} t_j^4 + \frac{\mu_j}{3} t_j^3 + \frac{\beta_j}{2} t_j^2 + t_j = \theta_j. \quad (8)$$

Відповідно для $(j+1)$ -ї складової матимемо

$$\frac{\eta_{j+1}}{4} t_{j+1}^4 + \frac{\mu_{j+1}}{3} t_{j+1}^3 + \frac{\beta_{j+1}}{2} t_{j+1}^2 + t_{j+1} = \theta_{j+1}. \quad (9)$$

На основі (8), (9) з урахуванням рівності температур на поверхнях поділу одержимо першу умову контакту для змінних Кірхгофа

$$\theta_{j+1} - \theta_j = F_j(\theta_{j+1}), \quad z = z_j, \quad (10)$$

де

$$F_j(\theta_{j+1}) = \frac{\eta_{j+1} - \eta_j}{4} t_{j+1}^4(\theta_{j+1}) + \frac{\mu_{j+1} - \mu_j}{3} t_{j+1}^3(\theta_{j+1}) + \frac{\beta_{j+1} - \beta_j}{2} t_{j+1}^2(\theta_{j+1}). \quad (11)$$

Друга умова контакту з урахуванням (1), (6) матиме вигляд

$$\lambda_0^{(j+1)} \frac{d\theta_{j+1}}{dz} - \lambda_0^{(j)} \frac{d\theta_j}{dz} = 0, \quad z = z_j. \quad (12)$$

Застосовуючи підстановку Кірхгофа до граничних умов (5), одержуємо

$$\frac{d\theta_1}{dz} = -Q_0, \quad z = z_0, \quad \theta_n = \theta_c, \quad z = z_n, \quad (13)$$

$$\text{де } Q_0 = \frac{\ell q_0}{\lambda_0^{(1)}}, \quad \theta_c = \frac{\eta_n}{4} t_c^4 + \frac{\mu_n}{3} t_c^3 + \frac{\beta_n}{2} t_c^2 + t_c.$$

3°. Відшукування обернених залежностей $t_i = t_i(\theta_i)$. Для цього використаємо рівняння (8). Покажемо, що в інтервалі температур (T_{1i}, T_{2i}) , в якому задана залежність (1), може знаходитись не більше одного кореня рівняння (8).

Розіб'ємо числову пряму t_i на проміжки монотонності лівої частини рівняння (8) (оскільки рівняння четвертого степеня, то їх буде не більше чотирьох). Очевидно, що на кожному з цих проміжків може знаходитись лише один корінь рівняння (8). Оскільки функції $\Lambda_i(t_i)$ є похідними за t_i від лівої частини рівняння (8) і згідно з фізичним змістом

$$\Lambda_i(t_i) > 0, \quad (14)$$

то будемо розглядати лише проміжки, на яких відбувається зростання. Проміжки, на яких відбувається спадання, не перетинаються з інтервалом (T_{1i}, T_{2i}) , тому що там нерівність (14) не виконується, оскільки похідна від спадної функції від'ємна. Тому, якщо в інтервалі (T_{1i}, T_{2i}) існує корінь, то він буде єдиним на цьому інтервалі. Для його знаходження проведемо у рівнянні (8) заміну змінних

$$t_i = y_i - \frac{\mu_i}{3\eta_i}. \quad (15)$$

У результаті одержимо

$$y_i^4 + m_i y_i^2 + p_i y_i + q_i = 0, \quad (16)$$

де

$$m_i = 2 \left(\frac{\beta_i}{\eta_i} - \frac{\mu_i^2}{3\eta_i^2} \right), \quad p_i = \frac{4\mu_i}{3\eta_i} \left(\frac{2\mu_i^2}{9\eta_i^2} - \frac{\beta_i}{\eta_i^2} \right) + \frac{4}{\eta_i},$$

$$q_i = \frac{\mu_i^2}{9\eta_i^2} \left(\frac{2\beta_i}{\eta_i} - \frac{\mu_i^2}{3\eta_i^2} \right) - \frac{4}{\eta_i} \left(\frac{\mu_i}{3\eta_i} + \theta_i \right).$$

Корені рівняння (16) знаходяться серед коренів квадратних рівнянь

$$y_i^2 \pm x_i^{1/2} y_i + \frac{1}{2}(m_i + x_i + s_i) = 0,$$

$$y_i^2 \pm x_i^{1/2} y_i + \frac{1}{2}(m_i + x_i - s_i) = 0, \quad (17)$$

де $s_i = \sqrt{(m_i + x_i)^2 - 4q_i}$, а x_i – невід'ємний корінь кубічного рівняння

$$x_i^3 + 2m_i x_i^2 + (m_i^2 - 4q_i)x_i - p_i^2 = 0. \quad (18)$$

З восьми можливих коренів рівнянь (17)

$$y_i^{(1,2,3,4)} = \frac{1}{2} \left[\pm \sqrt{x_i} \pm \sqrt{-2m_i - x_i - 2s_i} \right],$$

$$y_i^{(5,6,7,8)} = \frac{1}{2} \left[\pm \sqrt{x_i} \pm \sqrt{-2m_i - x_i + 2s_i} \right]$$

вибираємо спочатку ті, що задовольняють рівняння (16). Потім з тих коренів, що залишилися, вибираємо такий, при якому температура, обчислена за формулою (15), міститься в інтервалі температур, у якому задано залежність коефіцієнтів теплопровідності.

4°. *Перехід до одного рівняння з узагальненими похідними на змінну Кірхгофа і побудова його розв'язку.* Введемо у розгляд функції

$$\theta = \theta_1(z) + \sum_{j=1}^{n-1} [\theta_{j+1}(z) - \theta_j(z)] S(z - z_j), \quad (19)$$

$$\lambda_0(z) = \lambda_0^{(1)} + \sum_{j=1}^{n-1} (\lambda_0^{(j+1)} - \lambda_0^{(j)}) S(z - z_j), \quad (20)$$

де $S(x)$ – функція Гевісайда.

Поступаючи аналогічно, як у [7, 13], дістанемо рівняння

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[\lambda_0(z) \frac{\partial \theta}{\partial z} \right] = \sum_{j=1}^{n-1} F_j(\theta_{j+1}) \Big|_{z=z_j} \frac{\partial}{\partial z} [\lambda_0(z) \delta(z - z_j)]. \quad (21)$$

Інтегруючи два рази рівняння (21), отримуємо

$$\theta = \sum_{j=1}^{n-1} F_j(\theta_{j+1}) \Big|_{z=z_j} S(z - z_j) + C_1 f(z) + C_2, \quad (22)$$

де

$$f(z) = z + \sum_{j=1}^{n-1} \left(\frac{\lambda_0^{(1)}}{\lambda_0^{(j+1)}} - \frac{\lambda_0^{(1)}}{\lambda_0^{(j)}} \right) (z - z_j) S(z - z_j).$$

Підставивши у (22) вирази для сталих інтегрування C_1, C_2 , визначені з граничних умов (13), одержимо

$$\theta(z) = \theta_c - Q_0[f(z) - f(z_n)] - \sum_{j=1}^{n-1} F_j(\theta_{j+1}) \Big|_{z=z_j} S(z_j - z). \quad (23)$$

Для знаходження значень $F_j(\theta_{j+1}) \Big|_{z=z_j}$, $j = 1, \dots, n-1$, надамо аргументу функції $\theta(z)$ в (23) послідовно значень $z = z_{n-1} + 0$, $z = z_{n-2} + 0, \dots$, $z = z_1 + 0$. В результаті дістанемо

$$\begin{aligned} \theta_n(z_{n-1}) &= \theta_c - Q_0[f(z_{n-1}) - f(z_n)], \\ \theta_{n-1}(z_{n-2}) &= \theta_c - Q_0[f(z_{n-2}) - f(z_n)] - F_{n-1}(\theta_n) \Big|_{z=z_{n-1}}, \\ &\dots\dots\dots, \\ \theta_{i+1}(z_i) &= \theta_c - Q_0[f(z_i) - f(z_n)] - \sum_{j=i+1}^{n-1} F_j(\theta_{j+1}) \Big|_{z=z_j}, \\ & \qquad \qquad \qquad i = n-3, n-4, \dots, 1. \end{aligned} \quad (24)$$

Використовуючи перше із співвідношень (24), визначимо той корінь рівняння (8), який потрапляє в інтервал (T_{1i}, T_{2i}) . Маючи це значення, на основі (11) знаходимо $F_{n-1}(\theta_n) \Big|_{z=z_{n-1}}$. Використовуючи далі друге із співвідношень (24), аналогічно знаходимо $F_{n-2}(\theta_{n-1}) \Big|_{z=z_{n-2}}$. Продовжуючи цей процес, знайдемо решту значень на границях поділу. З урахуванням цих значень в межах кожного шару змінні Кірхгофа на основі (23) визначатимуть-

ся за формулами

$$\theta_i(z) = \theta_c - Q_0[f(z) - f(z_n)] - \sum_{j=i}^{n-1} F_j(\theta_{j+1}) \Big|_{z=z_j}. \quad (25)$$

Перехід від змінних Кірхгофа (25) до температури з інтервалу (T_{1i}, T_{2i}) здійснюємо за формулами (15), де y_i – корінь рівняння (16). Таким чином, точні розв'язки допоміжних задач знайдено.

Вирази для цих розв'язків будуть розв'язками і вихідних задач, якщо значення теплового потоку q_0 і температури t_c зовнішньої поверхні будуть такими, які зумовить задана теплова дія. Ці значення знайдемо із системи двох нелінійних алгебраїчних рівнянь

$$\frac{a_1[t_1(q_0, t_c, 0)]}{\lambda_t^{(1)}[t_1(q_0, t_c, 0)]} q_0 = b_1[t_1(q_0, t_c, 0)], \quad \frac{a_n(t_c)}{\lambda_t^{(n)}(t_c)} q_0 = b_n(t_c), \quad (26)$$

яку отримаємо в результаті підстановки знайдених точних розв'язків у граничні умови (4).

Побудова розв'язку задач термопружності. Оскільки температурне поле змінюється тільки по товщині, то при такому температурному полі у багатошаровій плиті виникають такі напруження:

$$\sigma_{rr} = \sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_0(z), \quad \sigma_{zz} = \sigma_{rz} = \sigma_{\varphi z} = \sigma_{r\varphi} = 0. \quad (27)$$

Шляхом підстановки легко перекопати, що при напруженнях (27) рівняння рівноваги задовольняються тотожно, а рівняння сумісності деформацій в напруженнях задовольняються при [13]

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[\frac{1 - \nu(t, z)}{E(t, z)} \sigma_0(z) + \Theta(t, z) \right] = 0, \quad (28)$$

де

$$\begin{aligned} \nu(t, z) &= \nu_1(t_1) + \sum_{k=1}^{n-1} [\nu_{k+1}(t_{k+1}) - \nu_k(t_k)] S(z - z_k), \\ E(t, z) &= E_1(t_1) + \sum_{k=1}^{n-1} [E_{k+1}(t_{k+1}) - E_k(t_k)] S(z - z_k), \\ \Theta(t, z) &= \Theta^{(1)}(t_1) + \sum_{k=1}^{n-1} [\Theta^{(k+1)}(t_{k+1}) - \Theta^{(k)}(t_k)] S(z - z_k), \end{aligned}$$

$\nu_i(t)$ – коефіцієнт Пуассона, $E_i(t)$ – модуль пружності, $\Theta^{(i)}(t) = \int_0^t \alpha_t^{(i)}(x) dx$

сумарна теплова деформація i -го шару.

Інтегруючи рівняння (28), дістанемо

$$\sigma_0(z) = \frac{E(t, z)}{1 - \nu(t, z)} [C_1 + zC_2] - \frac{E(t, z)}{1 - \nu(t, z)} \Theta(t, z). \quad (29)$$

Сталі C_1 і C_2 , визначені з умов, що головний вектор і головний момент напружень σ_{rr} дорівнюють нулеві:

$$\int_0^{z_n} \sigma_{rr} dz = \int_0^{z_n} z \sigma_{rr} dz = 0,$$

мають вигляд

$$C_1 = \frac{d_1 a_{22} - d_2 a_{12}}{a_{11} a_{22} - a_{12}^2}, \quad C_2 = \frac{d_2 a_{11} - d_1 a_{12}}{a_{11} a_{22} - a_{12}^2},$$

де

$$\begin{aligned}
a_{11} &= \sum_{i=1}^n \int_{z_{i-1}}^{z_i} \frac{E_i(t_i)}{1 - \nu_i(t_i)} dz, & a_{12} &= \sum_{i=1}^n \int_{z_{i-1}}^{z_i} \frac{z E_i(t_i)}{1 - \nu_i(t_i)} dz, \\
a_{22} &= \sum_{i=1}^n \int_{z_{i-1}}^{z_i} \frac{z^2 E_i(t_i)}{1 - \nu_i(t_i)} dz, \\
d_1 &= \sum_{i=1}^n \int_{z_{i-1}}^{z_i} \frac{E_i(t_i) \Theta^{(i)}(t_i)}{1 - \nu_i(t_i)} dz, & d_2 &= \sum_{i=1}^n \int_{z_{i-1}}^{z_i} \frac{z E_i(t_i) \Theta^{(i)}(t_i)}{1 - \nu_i(t_i)} dz.
\end{aligned}$$

Числовий приклад. Досліджували у чотиришаровій плиті ($n = 4$) температуру та напруження $\sigma = \frac{\sigma_0}{E_1(0)\alpha_t^{(1)}(0)t_c^-}$ за таких граничних умов:

$$\begin{aligned}
t_1 &= t_c^-, & z &= 0, \\
\lambda_t^{(n)}(t_n) \frac{dt_n}{dz} + \ell \alpha(t_n - t_c^+) + \ell \gamma t_n^4 &= 0, & z &= z_n,
\end{aligned} \tag{30}$$

при $z_1 = z_4/3$, $z_2 = z_4/2$, $z_3 = 5z_4/6$, $\gamma = 1.67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}^{-4})$, $t_c^- = 2500 \text{ }^\circ\text{С}$, $t_c^+ = 20 \text{ }^\circ\text{С}$. Температурні залежності ФМХ першого і третього шарів відповідали молибдену [4, 14]:

$$\begin{aligned}
\lambda_t^{(1)}(t) &= (151.727 - 702.736 \cdot 10^{-4} t + 366.838 \cdot 10^{-7} t^2 - \\
&\quad - 7.59 \cdot 10^{-9} t^3) [\text{Вт}/(\text{м} \cdot \text{ }^\circ\text{С})], \\
E_1(t) &= (3.22 \cdot 10^{11} - 0.41 \cdot 10^8 t + 990.61 t^2 - 4.93 t^3) [\text{Па}], \\
\alpha_{t1}(t) &= (5.19 \cdot 10^{-6} + 1.91 \cdot 10^{-9} t - 3.696 \cdot 10^{-14} t^2 + 3.857 \cdot 10^{-17} t^3) [^\circ\text{С}^{-1}], \\
\nu_1 &= 0.337 + 0.96410^{-4} t - 0.112 \cdot 10^{-6} t^2 + 0.35 \cdot 10^{-10} t^3,
\end{aligned}$$

а другого і четвертого – вольфраму:

$$\begin{aligned}
\lambda_t^{(2)}(t) &= (163.003 - 109.639 \cdot 10^{-3} t + 465.965 \cdot 10^{-10} t^2 + \\
&\quad + 3.62 \cdot 10^{-7} t^3) [\text{Вт}/(\text{м} \cdot \text{ }^\circ\text{С})], \\
E_2(t) &= (4.04 \cdot 10^{11} - 0.45 \cdot 10^8 t + 18599.27 t^2 - 10.4 t^3) [\text{Па}], \\
\alpha_{t2}(t) &= (4.572 \cdot 10^{-6} + 1.152 \cdot 10^{-11} t + 6.064 \cdot 10^{-13} t^2 + 1.41 \cdot 10^{-17} t^3) [^\circ\text{С}^{-1}], \\
\nu_2 &= 0.256 + 0.273 \cdot 10^{-4} t + 0.525 \cdot 10^{-8} t^2 - 0.535 \cdot 10^{-11} t^3.
\end{aligned}$$

Для порівняння виконано розрахунки температури та напружень за таких квадратичних, лінійних і сталих апроксимацій коефіцієнтів теплопровідності

щоб порівняти результати з результатами, отриманими за допомогою методу скінченних елементів (МСЕ) для першого (третього) та другого (четвертого) шарів:

$$\begin{aligned}
\lambda_t^{(1)}(t) &= (146.146 - 425.175 \cdot 10^{-4} t + 850.591 \cdot 10^{-8} t^2) [\text{Вт}/(\text{м} \cdot \text{ }^\circ\text{С})], \\
\lambda_t^{(1)}(t) &= (137.550 - 214.653 \cdot 10^{-4} t) [\text{Вт}/(\text{м} \cdot \text{ }^\circ\text{С})], \\
\lambda_t^{(1)}(t) &= 110.987 [\text{Вт}/(\text{м} \cdot \text{ }^\circ\text{С})], \\
\lambda_t^{(2)}(t) &= (163.269 - 110.963 \cdot 10^{-3} t + 479.404 \cdot 10^{-7} t^2) [\text{Вт}/(\text{м} \cdot \text{ }^\circ\text{С})], \\
\lambda_t^{(2)}(t) &= (114.819 + 768.942 \cdot 10^{-5} t) [\text{Вт}/(\text{м} \cdot \text{ }^\circ\text{С})],
\end{aligned}$$

$$\lambda_t^{(2)}(t) = 124.335 [\text{Вт}/(\text{м} \cdot ^\circ\text{С})].$$

Система алгебраїчних рівнянь (26) мала вигляд

$$\begin{aligned} t_1(q_0, t_c, 0) - t_c^- &= 0, \\ q_0 - \alpha(t_c - t_c^+) - \gamma t_c^4 &= 0. \end{aligned} \quad (31)$$

Перед тим, як приступити до розв'язання (для кожного варіанту температурної залежності коефіцієнтів теплопровідності) системи нелінійних рівнянь (31), будували графіки лівих їх частин, як функцій шуканих величин. Наявність точки перегину лінії, що належить двом лівим частинам, з площиною $y = 0$ прямокутної системи координат t_c, q_0, y , підтверджувало існування і єдиність розв'язку системи рівнянь (31). Для його відшукання використали метод Ньютона. За початкові t_c, q_0 вибирали значення з діапазону їх зміни, який визначали на основі побудованих графіків. Зокрема, для кубічної залежності коефіцієнтів теплопровідності від температури такий графік наведено на рис. 1 при $\alpha = 3000 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot ^\circ\text{С})$. Згідно з ним $300 < t_c < 500 [^\circ\text{С}]$, $8 \cdot 10^5 < q_0 < 10^6 [\text{Вт}/\text{м}^2]$. Розв'язавши відповідну систему рівнянь, отримали $t_c = 310.81828 ^\circ\text{С}$, $q_0 = 8.72610702 \cdot 10^5 \text{ Вт}/\text{м}^2$. Для таких t_c, q_0 абсолютне значення похибки не перевищувало $0.1967 \cdot 10^{-8}$.

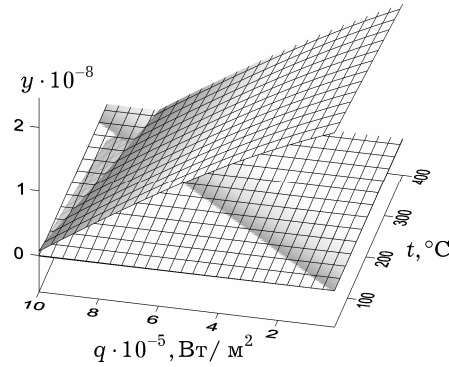


Рис. 1

Зауважимо, що для випадку квадратичної залежності коефіцієнтів теплопровідності, використали розв'язок допоміжної задачі, отриманий аналогічно, як у [8].

Розподіл температури та напружень по товщині плити при $\tilde{z}_4 = 0.265 \text{ м}$ ($\tilde{z}_1 = 0.0883 \text{ м}$, $\tilde{z}_2 = 0.1325 \text{ м}$, $\tilde{z}_3 = 0.2208 \text{ м}$) для випадку конвективно-променевого теплообміну ($\alpha = 3000 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot ^\circ\text{С})$) наведено на рис. 2, 3, а для променевого ($\alpha = 0$) – на рис. 4, 5. Штрихові лінії відповідають кубічній залежності коефіцієнтів теплопровідності. Криві 0, 1, 2 побудовано відповідно для сталих, лінійних та квадратичних апроксимацій коефіцієнтів теплопровідності матеріалів шарів плити.

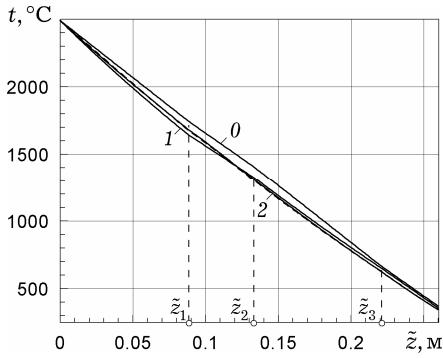


Рис. 2

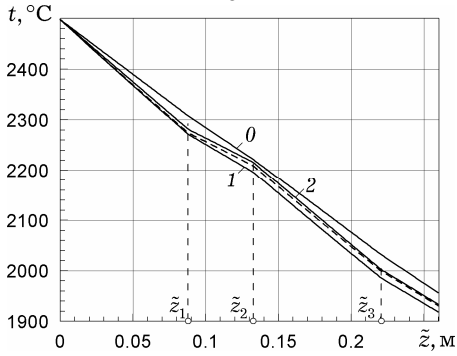


Рис. 4

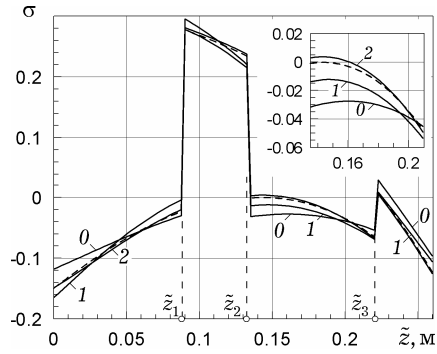


Рис. 3

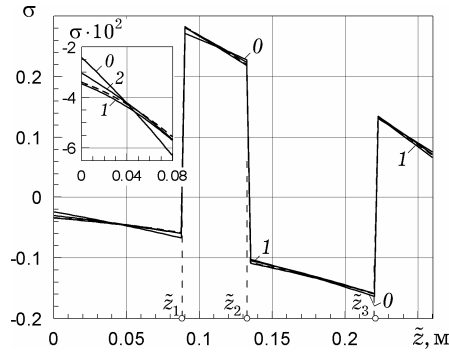


Рис. 5

З аналізу графіків випливає, що зі зменшенням порядку апроксимацій коефіцієнтів теплопровідності різниця температур, за винятком окремих областей, збільшується. При $\alpha = 0$ вона досягає 40°C (рис. 4), а при $\alpha = 3000 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot ^\circ\text{C})$ – 100°C (рис. 2). У випадку променевого теплообміну перепад температур на зовнішніх поверхнях плити значно менший, ніж при конвективно-променевому.

Напруження на поверхнях поділу розривні. На характер поведінки та їх величину впливає спосіб теплообміну. Так, за променевого теплообміну напруження в першому шарі монотонно спадають, а за конвективно-променевого – зростають (в обох випадках вони стискувальні). Відповідно – максимальні значення на внутрішній і зовнішній поверхнях. В останньому шарі за променевого теплообміну напруження скрізь розтягувальні, а за конвективно-променевого переходять від розтягу (в області, що прилягає до поверхні поділу) до стиску. У третьому шарі максимальні стискувальні напруження за променевого теплообміну майже в 2.7 рази більші, ніж при конвективно-променевому.

Вплив температурної залежності коефіцієнтів теплопровідності проявляється також по-різному. Найбільш істотне відхилення від напружень, обчислених за кубічної залежності, є при сталому коефіцієнті теплопровідності та при лінійній апроксимації. За квадратичної апроксимації це відхилення незначне. Проте характер поведінки напружень може якісно відрізнятися. Так, в третьому шарі (рис. 3) в області, що прилягає до межі поділу з другим шаром, за кубічної залежності вони стискувальні, а за квадратичної – розтягувальні.

Аналогічні дослідження проводили і для плити з товщиною $\tilde{z}_4 = 0.01 \text{ м}$. Характер розподілу температури у ній такий самий, як у випадку товщини $\tilde{z}_4 = 0.265 \text{ м}$. Однак кількісні характеристики можуть істотно відрізнятися. Зокрема, як і слід було очікувати, значно меншими є перепади температур. Якісна й кількісна поведінка напружень за різних способів теплообміну практично така ж, як у попередній плиті за променевого теплообміну.

Відмітимо, що з метою перевірки отриманого розв'язку допоміжної задачі теплопровідності проводили при наведених вище значеннях теплового потоку і температури поверхні розрахунки температур у чотиришаровій плиті за кубічної залежності коефіцієнтів теплопровідності, виходячи з інтегрального подання її розв'язку (див. Додаток). Систему інтегральних рівнянь розв'язували методом послідовних наближень. Числовий аналіз показав, що при п'яти наближеннях температури у контрольних точках відрізняються не більше ніж на 0.01% від температур, обчислених на основі розв'язку допоміжної задачі.

Висновки. Запропонована методика дає змогу будувати ефективні розв'язки одновимірних статичних задач термопружності для вільних від силових навантажень шаруватих плит для широкого спектру способів нагріву з урахуванням кубічної залежності коефіцієнтів теплопровідності та довільного характеру залежностей інших ФМХ від температури.

Додаток А. Інтегральне подання розв'язку задач теплопровідності для шаруватих термочутливих тіл простої геометричної форми.

Розглянемо шаруваті термочутливі плити, циліндри і кулі, в яких зовнішня поверхня першого шару нагрівається тепловим потоком $q_{0k} = \text{const}$, а зовнішня поверхня останнього шару підтримується при температурі $t_{ck} = \text{const}$. Для визначення температурного поля використовуємо рівняння теплопровідності

$$\frac{d}{dx} \left[x^k \lambda_t(t_k) \frac{dt_k}{dx} \right] = 0 \quad (\text{A1})$$

і граничні умови

$$\lambda_t^{(1)}(t_{1k}) \frac{dt_{1k}}{dx} = -q_{0k}, \quad x = x_0, \quad t_{nk} = t_{ck}, \quad x = x_n. \quad (\text{A2})$$

Тут $\lambda_t(t_k)$ – кусково-неперервні функції, які мають вигляд (20), а в межах i -го шару, $x_{i-1} < x < x_i$, $i = 1, \dots, n$, співпадають з коефіцієнтами теплопровідності $\lambda_t(t_{ik})$, на характер температурної залежності яких обмежень не накладається; індексами $k = 0, 1, 2$ позначено відповідні величини для плит, циліндрів і куль.

Задачі (A1), (A2) розв'язуватимемо методом функцій Гріна. Для цього застосуємо функції

$$G_k(x, \xi) = \frac{1}{\lambda_0^{(1)}} \{ [f_k(x_n) - f_k(x)] S(x - \xi) + [f_k(x_n) - f_k(\xi)] S(\xi - x) \}, \quad (\text{A3})$$

які задовольняють рівняння

$$\frac{d}{dx} \left[x^k \lambda_0(x) \frac{dG_k}{dx} \right] = -\delta(x - \xi) \quad (\text{A4})$$

і граничні умови

$$\lambda_0^{(1)} \frac{dG_k}{dx} = 0, \quad x = x_0, \quad G_k = 0, \quad x = x_n. \quad (\text{A5})$$

Тут $\lambda_0(x)$ – кусково-сталі функції, які мають вигляд (20), а в межах i -го шару співпадають з коефіцієнтами $\lambda_0^{(i)}$,

$$f_0(x) = x + \sum_{j=1}^{n-1} (x - x_j) H_j S(x - x_j),$$

$$f_1(x) = \ln x + \sum_{j=1}^{n-1} H_j \ln \frac{x}{x_j} S(x - x_j),$$

$$f_2(x) = -\frac{1}{x} - \sum_{j=1}^{n-1} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x_j} \right) H_j S(x - x_j), \quad H_j = \frac{\lambda_0^{(1)}}{\lambda_0^{(j+1)}} - \frac{\lambda_0^{(1)}}{\lambda_0^{(j)}}.$$

Після домноження рівнянь (A1), (A4) відповідно на $G_k(x, \xi)$ та $t_k(x)$ і інтегрування їх різниці по товщині тіл, матимемо

$$\begin{aligned} t_k(\xi) = & \left[G_k x^k \lambda_t(t_k) \frac{dt_k}{dx} - t_k x^k \lambda_0(x) \frac{dG_k}{dx} \right] \Big|_{x=x_n} - \\ & - \left[G_k x^k \lambda_t(t_k) \frac{dt_k}{dx} - t_k x^k \lambda_0(x) \frac{dG_k}{dx} \right] \Big|_{x=x_0} + \\ & + \int_0^{x_n} x^k \lambda_t(t_k) \frac{dt_k}{dx} x^k \lambda_0(x) \frac{dG_k}{dx} \left[\frac{1}{x^k \lambda_t(t_k)} - \frac{1}{x^k \lambda_0(x)} \right] dx. \quad (\text{A6}) \end{aligned}$$

Врахувавши граничні умови (A2), (A5) та співвідношення

$$x^k \lambda_t(t_k) \frac{dt_k}{dx} = -x_0^k q_{0k}, \quad x^k \lambda_0(x) \frac{dG_k}{dx} = -S(x - \xi),$$

$$G_k(x, \xi) \Big|_{x=x_0} = [f_k(x_n) - f_k(\xi)] \frac{1}{\lambda_0^{(1)}},$$

з (A6) одержимо

$$\begin{aligned} t_k(\xi) = & t_{ck} + [f_k(x_n) - f_k(\xi)] \frac{q_{0k} x_0^k}{\lambda_0^{(1)}} + \\ & + q_{0k} x_0^k \int_{\xi}^{x_n} \left[\frac{1}{x^k \lambda_t(t_k)} - \frac{1}{x^k \lambda_0(x)} \right] dx. \quad (\text{A7}) \end{aligned}$$

Оскільки

$$\int_{\xi}^{x_n} \frac{1}{x^k \lambda_0(x)} dx = \frac{f_k(x_n) - f_k(\xi)}{\lambda_0^{(1)}},$$

то (A7) набуде вигляду

$$t_k(\xi) = t_{ck} + \frac{q_{0k} x_0^k}{\lambda_0^{(1)}} \int_{\xi}^{x_n} \frac{\lambda_0^{(1)}}{x^k \lambda_t(t_k)} dx. \quad (\text{A8})$$

Звідси дістаємо

$$\begin{aligned} t_{nk}(x) = & t_{ck} + \frac{q_{0k} x_0^k}{\lambda_0^{(1)}} \int_x^{x_n} \frac{\lambda_0^{(1)}}{\zeta^k \lambda_t^{(n)}(t_{nk})} d\zeta, \\ t_{ik}(x) = & t_{i+1,k}(x_i) + \frac{q_{0k} x_0^k}{\lambda_0^{(1)}} \int_x^{x_i} \frac{\lambda_0^{(1)}}{\zeta^k \lambda_t^{(i)}(t_{ik})} d\zeta, \quad i = n-1, \dots, 1. \quad (\text{A9}) \end{aligned}$$

Безпосередньою підстановкою легко переконатися, що $t_{ik}(x)$, $i = 1, \dots, n$, визначені співвідношеннями (A9), задовольняють рівняння теплопровідності, записані для кожного шару, а також умови ідеального теплового контакту та граничні умови (A2).

Робота виконана за часткової фінансової підтримки в рамках наукового проекту за спільним конкурсом НАН України і РФФД (№ держреєстрації 0110U004143).

1. Беляев Н. М., Рядно А. А. Методы теории теплопроводности: В 2 ч. – Москва: Высш. шк., 1982. – Ч. 2. – 304 с.
2. Березовский А. А. Лекции по нелинейным краевым задачам математической физики: В 2 ч. – Киев: Наук. думка, 1976. – Ч. 2. – 292 с.

3. Гачкевич О. Р., Терлецький Р. Ф., Брухаль М. Б. Деякі проблеми математичного моделювання в термомеханіці тіл різної прозорості за теплового опромінення // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2008. – **51**, № 3. – С. 202–219.
4. Зиновьев В. Е. Теплофизические свойства металлов при высоких температурах: Справочник. – Москва: Металлургия, 1989. – 384 с.
5. Коздоба Л. А. Методы решения нелинейных задач теплопроводности. – Москва: Наука, 1975. – 226 с.
6. Коляно Ю. М. Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела. – Киев: Наук. думка, 1992. – 280 с.
7. Кушнір Р. М., Процюк Ю. Б. Температурні поля в шаруватих тілах канонічної форми за лінійної температурної залежності коефіцієнтів теплопровідності // Машинознавство. – 2009. – № 1. – С. 13–18.
8. Кушнір Р. М., Процюк Ю. Б. Термопружний стан шаруватих термочутливих тіл обертання за квадратичної залежності коефіцієнтів теплопровідності // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2010. – **46**, № 1. – С. 7–18.
9. Ломакин В. А. Теория упругости неоднородных тел. – Москва: Изд-во МГУ, 1976. – 367 с.
10. Постольник Ю. С., Огурцов А. П. Нелінійна прикладна термомеханіка. – Киев: НМЦ ВО МОНУ, 2000. – 280 с.
11. Подстригач Я. С., Коляно Ю. М. Неустановившиеся температурные поля и напряжения в тонких пластинках. – Киев: Наук. думка, 1972. – 308 с.
12. Подстригач Я. С., Ломакин В. А., Коляно Ю. М. Термоупругость тел неоднородной структуры. – Москва: Наука, 1984. – 368 с.
13. Процюк Б. В. Моделювання та визначення з використанням побудованих функцій Гріна термопружного стану шаруватих тіл: Автореф. дис. ... д-ра фіз.-мат. наук. – Львів, 2006. – 40 с.
14. Рыкалин Н. Н., Углов А. А., Смуров И. Ю. Расчет нелинейных задач лазерного нагрева металлов // Воздействие концентрированных потоков энергии на материалы. – Москва: Наука, 1985. – С. 20–36.
15. Carpinteri A., Paggi M. Thermo-elastic mismatch in nonhomogeneous beams // J. Eng. Math. – 2008. – **61**, No. 2-4. – P. 371–384.
16. Noda N. Thermal stresses in materials with temperature-dependent properties // Appl. Mech. Rev. – 1991. – **44**. – P. 383–397.
17. Ootao Y., Tanigawa O., Ishimaru O. Optimization of material composition of functionality graded plate for thermal stress relaxation using a genetic algorithm // J. Therm. Stresses. – 2000. – **23**. – P. 257–271.
18. Tanigawa Y., Akai T., Kawamura R. Transient heat conduction and thermal stress problems of a nonhomogeneous plate with temperature-dependent material properties // J. Therm. Stresses. – 1996. – **19**, No. 1. – P. 77–102.
19. Tanigawa Y., Ootao Y. Transient thermoelastic analysis of functionally graded plate with temperature-dependent material properties taking into account the thermal radiation // Nihon Kikai Gakkai Nenji Taikai Koen Ronbunshu. – 2002. – **2**. – P. 133–134.
20. Yangjian Xu, Daihui Tu. Analysis of steady thermal stress in a ZrO₂/FGM/Ti-6Al-4V composite ECBF plate with temperature-dependent material properties by NFEM // 2009-WASE Int. Conf. on Inform. Eng. – V. 02. – P. 433–436.

СТАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ СЛОИСТЫХ ТЕРМОЧУВСТВИТЕЛЬНЫХ ПЛИТ ПРИ КУБИЧЕСКОЙ ЗАВИСИМОСТИ КОЭФФИЦИЕНТОВ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ОТ ТЕМПЕРАТУРЫ

Изложена аналитико-численная методика решения одномерных статических задач термоупругости для слоистых плит при разных способах нагрева с учетом кубической зависимости коэффициентов теплопроводности и произвольного характера зависимости остальных физико-механических характеристик от температуры. При этом задачи теплопроводности, используя построенное точное решение вспомогательной задачи, сведено, независимо от количества слоев, к решению одного или систем двух нелинейных алгебраических уравнений. Исследованы температурные поля и напряжения в четырехслойных плитах при сложном теплообмене.

STATIC THERMOELASTICITY PROBLEMS FOR THERMOSENSITIVE PLATES WITH CUBIC DEPENDENCE OF HEAT CONDUCTIVITY COEFFICIENTS ON TEMPERATURE

Analytical-numerical method of solving one-dimensional static thermoelasticity problem for layered plates is presented for different ways of heating taking into account cubic dependence of heat conductivity coefficients and arbitrary character of dependence of other physical and mechanical characteristics on temperature. The problems of heat conductivity have been reduced to a system of two nonlinear algebraic equations regardless of the number of layers using the exact solution of the auxiliary problem. Temperature fields and stresses in a four-layered plate under complex heating conditions are investigated.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
19.03.10