

## ПЛОСКА КОНТАКТНА ЗАДАЧА ПРО ВДАВЛЮВАННЯ ШТАМПА В ПРУЖНИЙ КЛИН

*Розглядається контактна взаємодія штампa з прямолінійною основою та пружного клина. Одна з граней клину закріплена, а край штампa дотикається до вершини клина. З використанням методу Вінера – Гопфа отримано точний розв'язок задачі. Знайдено розподіли напружень в області контакту та на закріпленій грані клина, а також переміщення вільної межі клина.*

Задачі про контактну взаємодію штампів з пружним клином розглядалися, зокрема, в роботах [1–8, 10–12, 14, 15, 17, 20, 21]. У [14, 15] контактні задачі для пружної чверті площини, одна грань якої вільна або жорстко закріплена, а в іншу вдавлюється штамп, за допомогою інтегрального перетворення Фур'є зведено до систем потрійного та фредгольмового інтегральних рівнянь. Симетричне вдавлювання двох штампів, прилеглих до вершини клина, що еквівалентне вдавлюванню одного штампa у грань клина, коли інша його грань шарнірно закріплена, розглянуто в роботі [20]. Задачу зведено до функціонального рівняння Вінера – Гопфа, розв'язок якого отримано методом наближеної факторизації. Наближений розв'язок контактної задачі для клина з жорстко закріпленою гранню у випадках, коли область контакту або знаходиться на відстані, або межує з вершиною клина, отримано методом ортогональних поліномів в роботах [7, 8]. У [6] перша із двох останніх задач досліджена наближено методом колокації. Асимптотичним методом контактні задачі для клина із різними крайовими умовами на одній із граней розв'язано в роботах [1–5]. Точні розв'язки задач про симетричний контакт пружного клина з жорсткими опорами або з насадженням на нього штампом отримано в роботах [10–12, 17] методом Вінера – Гопфа.

У цій роботі розглянуто контакт штампa з прямолінійною основою і пружного клина із жорстко закріпленою гранню у випадку, коли край штампa дотикається до вершини клина. Методом Вінера – Гопфа отримано аналітичний розв'язок задачі. На відміну від попередніх досліджень, окрім розподілу контактних напружень, вивчено також розподіл напружень на закріпленій грані та переміщення точок вільної грані клина.

**Постановка задачі.** Нехай штамп із прямолінійною основою вдавлюється у пружний клин  $0 \leq r < \infty$ ,  $0 \leq \vartheta \leq \alpha$  ( $0 < \alpha < \pi/2$ ), нижня грань  $\vartheta = 0$  якого жорстко закріплена (рис. 1а). Вдавлююча нормальна сила  $P$  прикладена до правого краю штампa  $r = \ell$  (де  $\ell$  – довжина основи штампa), а лівий край  $r = 0$  дотикається до вершини клина. Сили тертя в області контакту  $0 \leq r \leq \ell$  не враховуються. В результаті деформації клина основа штампa повертається на деякий кут  $\varepsilon$ . Для забезпечення щільного прилягання основи штампa до грані клина необхідно до штампa прикласти момент  $M$ , значення якого заздалегідь невідомо. Цю задачу будемо називати задачею (а).

Цю ж задачу можна розглядати в іншій постановці. Нехай на правий край штампa діє нормальна сила  $P_0$ , а лівий край закріплений (рис. 1б). В результаті взаємодії штампa з пружним клином у точці  $r = 0$  закріплення штампa виникає нормальна сила реакції опори  $x_0 P_0$ , де  $x_0$  – невідомий коефіцієнт. Відповідно цю задачу будемо називати задачею (б).

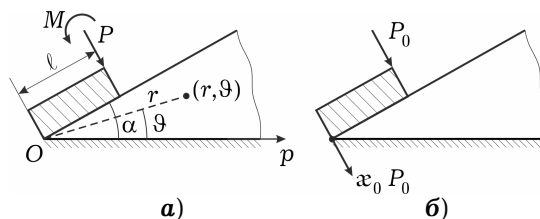


Рис. 1

Обидві постановки задачі виявляються еквівалентними, оскільки момент  $M$  можна замінити парою сил  $\alpha P$  з плечем  $\ell$ . Тоді маємо наступний зв'язок між параметрами задачі у постановках (а) і (б):

$$M = \alpha P \ell, \quad P_0 = (1 - \alpha)P, \quad \alpha_0 = \alpha / (1 - \alpha). \quad (1)$$

Змішані крайові умови на гранях клина мають вигляд

$$\begin{aligned} u_{\vartheta} \Big|_{\vartheta=\alpha} &= -\varepsilon r, & \tau_{r\vartheta} \Big|_{\vartheta=\alpha} &= 0, & 0 \leq r \leq \ell, \\ \sigma_{\vartheta} \Big|_{\vartheta=\alpha} &= 0, & \tau_{r\vartheta} \Big|_{\vartheta=\alpha} &= 0, & \ell < r < \infty, \\ u_r \Big|_{\vartheta=0} &= 0, & u_{\vartheta} \Big|_{\vartheta=0} &= 0, & 0 \leq r < \infty. \end{aligned} \quad (2)$$

Невідомі параметри задачі – кут повороту штамп  $\varepsilon$  і момент  $M$  (у постановці (а)) або  $\varepsilon$  і  $\alpha_0$  (у постановці (б)) – визначаємо з умов рівноваги штамп

$$\int_0^{\ell} \sigma_{\vartheta} \Big|_{\vartheta=\alpha} dr = -P, \quad \int_0^{\ell} r \sigma_{\vartheta} \Big|_{\vartheta=\alpha} dr = M - P \ell. \quad (3)$$

**Інтегральне рівняння.** Введемо невідому функцію контактних напружень

$$g(r) = \frac{1}{2G} \sigma_{\vartheta} \Big|_{\vartheta=\alpha}, \quad 0 < r < \ell. \quad (4)$$

Перетворення Мелліна [18] функції  $g(r)$  з огляду на третю з крайових умов (2) має вигляд

$$a(s) = \int_0^{\ell} g(y) y^s dy. \quad (5)$$

Розв'язок основної змішаної задачі для клина, коли на грані  $\vartheta = \alpha$  задано нормальні напруження і відсутні дотичні напруження, а на грані  $\vartheta = 0$  – нульові переміщення, отримаємо за допомогою інтегрального перетворення Мелліна. На гранях клина маємо

$$u_{\vartheta} \Big|_{\vartheta=\alpha} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} M(s) a(s) r^{-s} ds, \quad u_r \Big|_{\vartheta=\alpha} = \frac{1}{\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} M^*(s) a(s) r^{-s} ds,$$

$$\frac{1}{2G} \sigma_{\vartheta} \Big|_{\vartheta=\alpha} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} a(s) r^{-s-1} ds,$$

$$\frac{1}{2G} \sigma_{\vartheta} \Big|_{\vartheta=0} = \frac{1}{\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \hat{M}(s) a(s) r^{-s-1} ds,$$

$$\frac{1}{2G} \tau_{r\vartheta} \Big|_{\vartheta=0} = \frac{1}{\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \hat{M}^*(s) a(s) r^{-s-1} ds, \quad -1 < c < \delta_1,$$

$$M(s) = 2(m-1) \frac{\lambda(s)}{s\Delta(s)}, \quad M^*(s) = \frac{\lambda^*(s)}{s\Delta(s)},$$

$$\hat{M}(s) = 2(m-1) \frac{\hat{\lambda}(s)}{\Delta(s)}, \quad \hat{M}^*(s) = 2(m-1) \frac{\hat{\lambda}^*(s)}{\Delta(s)},$$

$$\lambda(s) = (3m-4) \sin 2s\alpha - ms \sin 2\alpha,$$

$$\lambda^*(s) = (3m-4)(m-2) \sin^2 s\alpha - ms(ms+2m-2) \sin^2 \alpha,$$

$$\hat{\lambda}(s) = 2(m-1) \cos \alpha \cos s\alpha - (ms-m+2) \sin \alpha \sin s\alpha,$$

$$\hat{\lambda}^*(s) = (m-2) \cos \alpha \sin s\alpha - (ms+2m-2) \sin \alpha \cos s\alpha,$$

$$\Delta(s) = (3m-4)m(\cos 2s\alpha - 1) - 2m^2 s^2 \sin^2 \alpha + 8(m-1)^2, \quad (6)$$

де  $\delta_1$  – найменший корінь рівняння  $\Delta(s) = 0$  із півплощини  $\operatorname{Re} s > 0$ ;  $m$  – число Пуассона.

Розв'язок (6) задовольняє всі крайові умови (2), крім першої. Підставимо в цю умову вираз для колових переміщень із (6) з урахуванням (4), (5). Після заміни змінних

$$r = \ell e^{-\xi}, \quad y = \ell e^{-\eta} \quad (7)$$

для нової невідомої функції

$$\varphi(\eta) = g(\ell e^{-\eta}) e^{-\eta} \quad (8)$$

отримаємо інтегральне рівняння з різницеvim ядром на півосі:

$$\int_0^{\infty} k(\xi - \eta) \varphi(\eta) d\eta = f(\xi), \quad 0 \leq \xi < \infty. \quad (9)$$

Тут

$$k(\xi - \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{K}(\tau) e^{-i\tau(\xi - \eta)} d\tau,$$

$$\mathcal{K}(z) = \frac{M(-iz)}{2(m-1)} = \frac{\lambda(iz)}{iz\Delta(iz)},$$

$$f(\xi) = -\frac{\varepsilon}{2(m-1)} e^{-\xi}.$$

**Розв'язання інтегрального рівняння методом Вінера – Гопфа.** Розпо-  
всюдимо рівняння (9) на всю числову вісь і застосуємо до нього інтегральне  
перетворення Фур'є. Відносно функцій комплексної змінної

$$\Phi^+(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \varphi(\xi) e^{iz\xi} d\xi,$$

$$\Phi^-(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{iz\xi} d\xi \int_0^{\infty} k(\xi - \eta) \varphi(\eta) d\eta, \quad (10)$$

аналітичних відповідно у півплощинах  $\text{Im } z > c^+$  і  $\text{Im } z < c^-$  ( $c^+ < 0$ ,  $c^- > 0$ ),  
отримуємо функціональне рівняння Вінера – Гопфа [9]

$$\mathcal{K}(z)\Phi^+(z) - \Phi^-(z) = F^+(z), \quad -\infty < \text{Re } z < \infty, \quad c^+ < \text{Im } z < c^-,$$

$$F^+(z) = \frac{\varepsilon}{2i\sqrt{2\pi}(m-1)} \frac{1}{z+i}. \quad (11)$$

Факторизуємо коефіцієнт  $\mathcal{K}(z)$  рівняння (11), тобто подамо його у ви-  
гляді

$$\mathcal{K}(z) = \mathcal{K}^+(z)\mathcal{K}^-(z), \quad (12)$$

де  $\mathcal{K}^+(z)$  і  $\mathcal{K}^-(z)$  – функції, аналітичні відповідно у півплощинах  $\text{Im } z > c^+$   
і  $\text{Im } z < c^-$  і не дорівнюють там нулевi. Факторизацію виконаємо у нескін-  
ченних добутках [10]

$$\mathcal{K}^+(z) \equiv \mathcal{K}(0)\mathcal{K}^-(-z) = \mathcal{K}(0) \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{is_n}\right) \left(1 + \frac{z}{i\delta_n}\right)^{-1}, \quad (13)$$

де  $s_n$  і  $\delta_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , – відповідно корені рівнянь  $\lambda(s) = 0$  і  $\Delta(s) = 0$  із  
півплощини  $\text{Re } s > 0$ .

Після факторизації функціональне рівняння запишемо у такому ви-  
гляді:

$$\mathcal{K}^+(z)\Phi^+(z) - \frac{\Phi^-(z)}{\mathcal{K}^-(z)} = \frac{F^+(z)}{\mathcal{K}^-(z)}, \quad c^+ < \text{Im } z < c^-. \quad (14)$$

Праву частину рівняння (14) подамо у вигляді різниці функцій:

$$\frac{F^+(z)}{\mathcal{K}^-(z)} = f^+(z) - f^-(z), \quad (15)$$

аналітичних відповідно у півплощинах  $\text{Im } z > c^+$  і  $\text{Im } z < c^-$ . Функцію  $f^+(z)$  при цьому визначаємо через інтеграл типу Коші уздовж дійсної осі, який знаходимо за теорією лишків:

$$\begin{aligned} f^+(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F^+(\zeta) d\zeta}{\mathcal{K}^-(\zeta)(\zeta - z)} = \\ &= \frac{\varepsilon}{2i\sqrt{2\pi(m-1)}\mathcal{K}^-(-i)} \frac{1}{z+i}, \quad \text{Im } z > c^+. \end{aligned} \quad (16)$$

Враховуючи (15), функціональне рівняння (14) набуває вигляду

$$\mathcal{K}^+(z)\Phi^+(z) - f^+(z) = \frac{\Phi^-(z)}{\mathcal{K}^-(z)} - f^-(z), \quad c^+ < \text{Im } z < c^-, \quad (17)$$

в якому ліва і права частини аналітично продовжують одна одну на всю комплексну площину і є цілою функцією, яка згідно з умовами на нескінченності  $\mathcal{K}^+(z) = O(z^{-1/2})$ ,  $\Phi^+(z) = o(1)$ ,  $f^+(z) = O(z^{-1})$ ,  $|z| \rightarrow \infty$ , тотожно дорівнює нулеві. На цій підставі із (17) отримуємо розв'язок функціонального рівняння (11):

$$\Phi^+(z) = \frac{f^+(z)}{\mathcal{K}^+(z)}, \quad \Phi^-(z) = \mathcal{K}^-(z)f^-(z). \quad (18)$$

Розв'язок інтегрального рівняння (9) отримуємо оберненим перетворенням Фур'є першої з рівностей (10) у такому вигляді:

$$\begin{aligned} \varphi(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^+(t) e^{-i\xi t} dt = \\ &= \frac{\varepsilon}{4\pi(m-1)\mathcal{K}^-(-i)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t\Delta(it)\mathcal{K}^-(t)}{(t+i)\lambda(it)} e^{-i\xi t} dt. \end{aligned} \quad (19)$$

**Напруження і переміщення на межі клина.** Перетворюючи інтеграл із (19) за теорією лишків, одержуємо вираз для контактних напружень

$$\begin{aligned} \frac{1}{2G\varepsilon} \sigma_{\vartheta} \Big|_{\vartheta=\alpha} &= -\frac{2}{m-2} \frac{m \cos^2 \alpha - 1}{\sin 2\alpha} - \frac{1}{2(m-1)\mathcal{K}^-(-i)} \times \\ &\times \sum_{k=1}^{\infty} \frac{s_k \Delta(s_k) \mathcal{K}^-(-is_k)}{(s_k-1)\lambda'(s_k)} \left(\frac{r}{\ell}\right)^{s_k-1}, \quad 0 \leq r < \ell. \end{aligned} \quad (20)$$

Аналіз формули (20) свідчить, що існує критичний кут  $\alpha_* = \arccos(1/\sqrt{m})$  (коли  $m = 10/3$ , тоді  $\alpha_* = 56.8^\circ$ ), при якому контактні напруження перетворюються в нуль у вершині клина, а при  $\alpha_* < \alpha < \pi/2$  стають додатними. Отже, при переході через критичний кут  $\alpha_*$  розхилу клина розв'язок задачі втрачає зміст. Виявлена суперечливість розв'язку в інтервалі кутів  $\alpha_* < \alpha < \pi/2$  вказує на наявність відставання основи штампа від поверхні клина, що не передбачено постановкою задачі.

Використовуючи лему Ватсона [19]

$$\int_0^{\infty} \xi^{\rho-1} \varphi_1(\xi) e^{iz\xi} d\xi \sim \Gamma(\rho) \varphi_1(0) (-iz)^{-\rho}, \quad |z| \rightarrow \infty, \quad (21)$$

із (10) і (18) за допомогою заміні (4), (8) знаходимо асимптотичну поведінку контактних напружень поблизу правого краю штамп

$$\sigma_{\vartheta} \Big|_{\vartheta=\alpha} \sim -\frac{\varepsilon G}{(m-1)\mathcal{K}^{-}(-i)} \sqrt{\frac{m\ell}{\pi\mathcal{K}(0)(\ell-r)}}, \quad r \rightarrow \ell - 0. \quad (22)$$

Підставивши вираз для  $a(s)$  із (5) у перше і друге співвідношення (6), виконавши заміни (7), (8) та змінюючи порядок інтегрування, з урахуванням (10) отримаємо наступні вирази для переміщень у точках верхньої грані клина:

$$\begin{aligned} u_{\vartheta} \Big|_{\vartheta=\alpha} &= \frac{\ell}{i\sqrt{2\pi}} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Phi^{+}(is)M(s)e^{s\xi} ds, \\ u_r \Big|_{\vartheta=\alpha} &= \frac{\sqrt{2}\ell}{i\sqrt{\pi}} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Phi^{+}(is)M^{*}(s)e^{s\xi} ds. \end{aligned} \quad (23)$$

Перетворивши інтегралі із (23) за теорією лишків з урахуванням розв'язку (18), (16), знаходимо

$$\begin{aligned} u_{\vartheta} \Big|_{\vartheta=\alpha} &= \frac{\varepsilon\ell}{\mathcal{K}^{-}(-i)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda(\delta_k)}{\delta_k(\delta_k+1)\Delta'(\delta_k)\mathcal{K}^{+}(i\delta_k)} \left(\frac{r}{\ell}\right)^{-\delta_k}, \\ u_r \Big|_{\vartheta=\alpha} &= \frac{\varepsilon\ell}{(m-1)\mathcal{K}^{-}(-i)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{*}(\delta_k)}{\delta_k(\delta_k+1)\Delta'(\delta_k)\mathcal{K}^{+}(i\delta_k)} \left(\frac{r}{\ell}\right)^{-\delta_k}, \quad \ell < r < \infty, \\ u_r \Big|_{\vartheta=\alpha} &= \varepsilon r \operatorname{tg} \alpha + \frac{\varepsilon\ell}{(m-1)\mathcal{K}^{-}(-i)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{*}(-s_k)\mathcal{K}^{-}(-is_k)}{(s_k-1)\lambda'(s_k)} \left(\frac{r}{\ell}\right)^{s_k}, \quad 0 < r < \ell. \end{aligned} \quad (24)$$

Із (23) аналогічно до (22) отримуємо асимптотичну поведінку колових переміщень точок вільної межі клина поблизу краю штамп:

$$u_{\vartheta} \Big|_{\vartheta=\alpha} = -\varepsilon\ell + \frac{2\varepsilon}{\mathcal{K}^{-}(-i)} \sqrt{\frac{\ell(r-\ell)}{\pi m\mathcal{K}(0)}} + O((r-\ell)^{3/2}), \quad r \rightarrow \ell + 0. \quad (25)$$

Аналогічно до (23) із четвертої та п'ятої рівностей (6) за допомогою розв'язку (18), (16) отримуємо напруження на закріпленій грані клина:

$$\begin{aligned} \sigma_{\vartheta} \Big|_{\vartheta=0} &= \frac{2G\varepsilon}{\mathcal{K}^{-}(-i)} \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{\lambda}(-it)}{(t+i)\Delta(it)\mathcal{K}^{+}(t)} \left(\frac{r}{\ell}\right)^{it-1} dt, \\ \tau_{r\vartheta} \Big|_{\vartheta=0} &= \frac{2G\varepsilon}{\mathcal{K}^{-}(-i)} \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{\lambda}^{*}(-it)}{(t+i)\Delta(it)\mathcal{K}^{+}(t)} \left(\frac{r}{\ell}\right)^{it-1} dt. \end{aligned} \quad (26)$$

На відміну від інтегралів із (23), які мають повільну збіжність і тому перетворені до швидко збіжних нескінченних сум (24), інтегралі із (26) збігаються експоненціально і можуть бути ефективно обчислені за найпростішими квадратурними формулами.

З умов рівноваги штамп (3) знаходимо кут повороту штамп і прикладений до нього момент:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= k \frac{P}{2G\ell}, \quad M = \varkappa P\ell, \\ k &= -\varepsilon \left( \int_0^{\infty} \varphi(\xi) d\xi \right)^{-1} = -\frac{\varepsilon}{\sqrt{2\pi}\Phi^{+}(0)} = 2(m-1)\mathcal{K}^{+}(i), \\ \varkappa &= 1 + \frac{k}{\varepsilon} \int_0^{\infty} \varphi(\xi) e^{-\xi} d\xi = 1 + \frac{k}{\varepsilon} \sqrt{2\pi}\Phi^{+}(i) = 1 - \frac{1}{2\mathcal{K}^{-}(-i)}. \end{aligned} \quad (27)$$

У випадку напівнескінченного штампа ( $\ell \rightarrow \infty$ ) перша з крайових умов (2) розповсюджується на всю піввісь  $0 \leq r < \infty$ , а третя з умов (2) виключається із розгляду, тобто на всій верхній грані  $\vartheta = \alpha$  пружного клина маємо умови гладкого контакту. У цьому випадку задача має елементарний розв'язок, який знаходимо за методикою [13]:

$$\begin{aligned}\sigma_{\vartheta} &= -2G\varepsilon \left( \frac{m}{m-2} \operatorname{ctg} 2\alpha + \frac{\cos 2(\alpha - \vartheta)}{\sin 2\alpha} \right), \\ \tau_{r\vartheta} &= 2G\varepsilon \frac{\sin 2(\alpha - \vartheta)}{\sin 2\alpha}, \\ u_{\vartheta} &= -2\varepsilon \frac{\sin \vartheta \cos (2\alpha - \vartheta)}{\sin 2\alpha} r, \\ u_r &= 2\varepsilon \frac{\sin \vartheta \sin (2\alpha - \vartheta)}{\sin 2\alpha} r.\end{aligned}\quad (28)$$

Співвідношення (28) встановлюють асимптотичну поведінку поблизу вершини пружного клина ( $r \rightarrow 0$ ) розв'язку розглядуваної контактної задачі (2) для скінченного штампа.

**Результати обчислень** напружень і переміщень на межі пружного клина для випадку числа Пуассона  $m = 10/3$  зображено на рис. 2-6. Криві відповідають різним значенням кута розхилу клина  $\alpha$ . Коефіцієнти  $k$  і  $x$  зі співвідношень (27), які визначають кут повороту  $\varepsilon$  і момент  $M$ , прикладений до штампа, відповідно дорівнюють  $k = 0.541$ ,  $x = 0.396$  для  $\alpha = \pi/4$  і  $k = 0.328$ ,  $x = 0.445$  - для  $\alpha = \pi/6$ .

Розподіл безрозмірних контактних напружень  $\bar{\sigma} = \frac{\sigma_{\vartheta}}{2G\varepsilon} \Big|_{\vartheta=\alpha}$  подано на рис. 2.

На правому краю штампа ( $r/\ell = 1$ ) контактні напруження необмежені, а у вершині клина ( $r/\ell = 0$ ) - скінченні і згідно з формулою (20) змінюються з необмеженим градієнтом, так що  $\sigma_{\vartheta} - \sigma_{\vartheta}|_{r=0} = O(r^{s_1-1})$  при  $r \rightarrow 0$  ( $\vartheta = \alpha$ ). Значення кореня  $s_1$  при різних значеннях  $\alpha$  є

такими:  $s_1 = 1.899$ , якщо  $\alpha = \pi/6$ ;  $s_1 = 1.421$ , якщо  $\alpha = \pi/4$ ;  $s_1 = 1.240$ , якщо  $\alpha = \alpha_* = 56.8^\circ$ ;  $s_1 = 1.083$ , якщо  $\alpha = 5\pi/12$ .

Для кутів  $\alpha \geq \pi/4$  контактний тиск різко змінюється в околі вершини клина, для кута ж  $\alpha = \pi/6$  перепад тиску стає непомітним, а сам тиск - майже незмінним на більшій частині області контакту ( $0 \leq r/\ell \leq 0.75$ ). При  $\alpha = \alpha_*$  контактні напруження у вершині клина ( $r/\ell = 0$ ) стають нульовими, а при  $\alpha > \alpha_*$  стають додатними у виключно малому околі вершини клина ( $0 \leq r/\ell < \delta$ ), що вказує на відставання лівого краю штампа від межі клина. Так, при  $\alpha = 5\pi/12$  маємо, що  $\bar{\sigma}|_{r/\ell=0} = 2.331$ ,  $\delta = 0.018$ .

На рис. 3, 4 показано безрозмірні колові  $\bar{u}_{\vartheta} = \frac{u_{\vartheta}}{\varepsilon\ell} \Big|_{\vartheta=\alpha}$  і радіальні  $\bar{u}_r = \frac{u_r}{\varepsilon\ell} \Big|_{\vartheta=\alpha}$  переміщення точок верхньої грані пружного клина. Як видно із рис. 4, граничні точки пружного клина зміщуються у напрямку від вершини

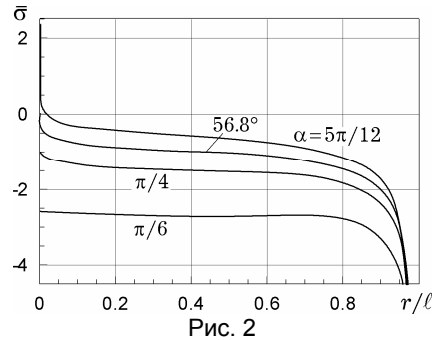


Рис. 2

клина. Їх рух значно стримується в околі правого краю штамп (  $r/l = 1$  ), де поздовжня деформація  $\varepsilon_r = \partial u_r / \partial r$  розтягу ( $\varepsilon_r > 0$ ) змінюється необмеженою деформацією стиску ( $\varepsilon_r \rightarrow -\infty$ ,  $r/l \rightarrow 1 - 0$ ).

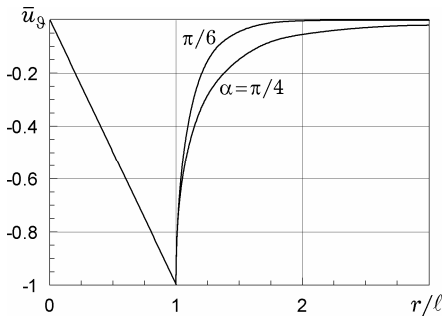


Рис. 3

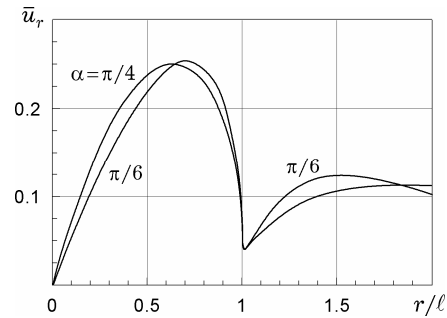


Рис. 4

Розподіли безрозмірних нормальних  $\hat{\sigma} = \frac{\sigma_{\vartheta}}{2G\varepsilon} \Big|_{\vartheta=0}$  і дотичних  $\hat{\tau} = \frac{\tau_{r\vartheta}}{2G\varepsilon} \Big|_{\vartheta=0}$

напружень на жорстко закріпленій грані клина зображено на рис. 5, 6. Значення напружень у вершині клина ( $r/l = 0$ ) узгоджуються з розв'язком (28) задачі для напівнескінченного штамп. Необмежені нормальні напруження під правим краєм штамп ( $r/l = 1$ ) на верхній грані клина при переході на нижню закріплену грань швидко спадають і відповідно складають 0.5 і 0.56 для  $\alpha = \pi/4$  і  $\alpha = \pi/6$  від усталеного значення напружень всередині області контакту. Відповідне відношення в задачі про вдавлювання штамп в пружну смугу дорівнює 0.6 [16].

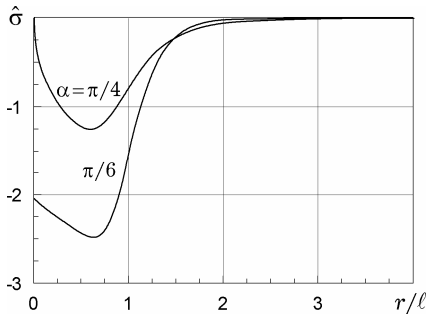


Рис. 5

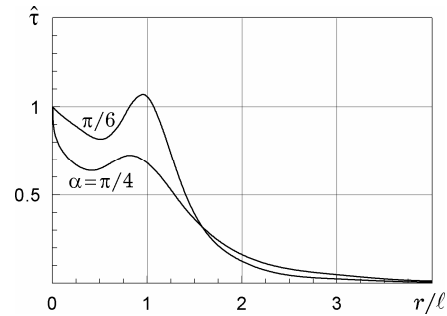


Рис. 6

**Висновки.** У задачі про вдавлювання штамп в пружний клин у випадку, коли край штамп дотикається до вершини клина, за допомогою методу Вінера – Гопфа і факторизації коефіцієнта функціонального рівняння у нескінченних добутках отримано точний аналітичний розв'язок. Крім розподілу контактних напружень, проаналізовано також напруження і переміщення уздовж усієї межі пружного клина. З'ясовано, що існує певне критичне значення кута розхилу клина, при перевищенні якого основа штамп втрачає контакт з пружним клином у малому околі його вершини. У цьому випадку побудований розв'язок втрачає зміст, і постановка задачі потребує уточнення.

1. Александров В. М. К контактным задачам для упругого клина с одной заземленной гранью // Изв. АН АрмССР. Механика. – 1968. – 21, № 2. – С. 17–27.
2. Александров В. М. Контактные задачи для упругого клина // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1967. – № 2. – С. 120–131.
3. Александров В. М. Контактные задачи для упругого плоского клина // Контактные задачи и их инженерные приложения. – Москва: НИИмаш, 1969.

4. Александров В. М. Об одной контактной задаче для упругого клина // Изв. АН АрмССР. Механика. – 1967. – 20, № 1. – С. 3–13.
5. Александров В. М., Копасенко В. В. Контактная задача для упругого клина с жестко защемленной гранью // Прикл. механика. – 1968. – 4, № 7. – С. 75–82.
6. Бронштейн М. И. Решение контактной задачи для штампа на клиновидном основании // Основания, фундаменты и механика грунтов. – 1968. – Вып. 4. – С. 2–4.
7. Лутченко С. А. О вдавливании штампов в боковую поверхность упругого основания в виде клина // Прикл. механика. – 1966. – 2, № 12. – С. 61–66.
8. Лутченко С. А., Попов Г. Я. О некоторых плоских контактных задачах теории упругости для клина // Прикл. механика. – 1970. – 6, № 3. – С. 64–71.
9. Нобл Б. Метод Винера – Хопфа. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1962. – 280 с.
10. Острик В. И., Улитко А. Ф. Метод Винера – Хопфа в контактных задачах теории упругости. – Киев: Наук. думка, 2006. – 328 с.
11. Острик В. І. Задачі фрикційного контакту пружного клина і конуса з жорсткою насадкою // Вісн. Київ. ун-ту. Сер. Фіз.-мат. науки. – 2002. – Вип. 4. – С. 119–126.
12. Острик В. Контакт з тертям пружного клина з жорсткими опорами // Машинознавство. – 1999. – № 5. – С. 28–32.
13. Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости. – Москва: Наука, 1975. – 576 с.
14. Тоноян В. С. Об одной плоской контактной задаче для упругой четвертьплоскости // Докл. АН АрмССР. – 1963. – 37, № 3. – С. 121–130.
15. Тоноян В. С. Плоская контактная задача для упругой четвертьплоскости с неподвижной вертикальной кромкой // Докл. АН АрмССР. – 1963. – 37, № 5. – С. 249–258.
16. Улитко А. Ф., Острик В. И. Смешанная задача теории упругости для полосы на жестком основании // Тр. III Всерос. конф. по теории упругости с междунар. участием. – Ростов-на-Дону: Новая книга, 2004. – С. 372–375.
17. Улітко А. Ф., Острик В. І. Контакт пружного і жорсткого клинів з урахуванням сил тертя // Вісн. Київ. ун-ту. Сер. Фіз.-мат. науки. – 1999. – Вип. 3. – С. 129–137.
18. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. – Ленинград: Наука, 1968. – 402 с.
19. Федорюк М. В. Асимптотика: Интегралы и ряды. – Москва: Наука, 1987. – 544 с.
20. Matczynski M. Elastic wedge with discontinuous boundary conditions // Arch. Mech. Stosowanej. – 1963. – 15, No. 6. – P. 833–855.
21. Shahani A. R., Adibnazari S., Naderi D. Non-symmetrical plane contact of a wedge indenter // J. Mech. Eng. Sci. – 2007. – 221, No. 11. – P. 1233–1239.

#### ПЛОСКАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА О ВДАВЛИВАНИИ ШТАМПА В УПРУГИЙ КЛИН

*Рассматривается контактное взаимодействие штампа с прямолинейным основанием и упругого клина. Одна из граней клина закреплена. Край штампа соприкасается с вершиной клина. С использованием метода Винера – Хопфа получено точное решение задачи. Найдены распределения напряжений в области контакта и на закрепленной грани клина, а также перемещения свободной границы клина.*

#### PLANE CONTACT PROBLEM OF INDENTATION PUNCH INTO ELASTIC WEDGE

*The contact interaction of punch with linear foundation and elastic wedge is considered. One face of the wedge is fixed. The edge of the punch touches the top of the wedge. Using the method of Wiener – Hopf an exact solution of the problem is obtained. The distribution of stresses in the contact region and fixed face of the wedge, as well as the displacements of free boundary of the wedge are found.*

Ин-т прикл. фізики НАН України, Суми

Одержано  
06.02.09