УДК 539.3

В. А. Галазюк[2], Г. Т. Сулим[1,2]

ФУНДАМЕНТАЛЬНА СИСТЕМА РОЗВ'ЯЗКІВ ОСЕСИМЕТРИЧНОЇ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ ТІЛА З ПЛОСКОЮ ПЕЛЕНОЮ ОБ'ЄМНИХ МОМЕНТНИХ ДИПОЛІВ І СИЛ

Побудовано фундаментальну систему розв'язків рівнянь осесиметричної задачі теорії пружності для необмеженого тіла з пеленою нормальних до вибраної площини об'ємних сил і моментних диполів, яка є математичною моделлю певного типу внутрішнього межового шару. За допомогою таких шарів вдається формулювати деякі обернені задачі пружності, а отже, і споріднені задачі керування напружено-деформованим станом на відповідних поверхнях. Сформульовано і розв'язано узагальнену задачу Кельвіна, згідно з якою у площині розподіленого нормального навантаження знайдено закон розподілу моментних диполів (параметрів пелени), який відповідним натягом забезпечує задані для точок площини вертикальні переміщення, зокрема, нульові.

На основі означення сингулярних матеріальних поверхонь розриву польових характеристик нульового та першого порядку [9] дослідимо варіант такої поверхні як математичної моделі плоскої пелени розподілених за певними, окресленими двома *твірними функціями*, законами об'ємних моментних диполів і об'ємних, нормальних до площини розподілу, сил, які подаються через інтеграли Ганкеля. Цим розподілам поставлено у відповідність фундаментальну систему розв'язків рівнянь статики пружного тіла у циліндричній системі координат, згідно з якою радіальне переміщення, об'ємна деформація і нормальні напруження мають стрибки при переході через площину пелени [6, 10], а дотичне напруження містить доданок, який є зосередженим тільки у цій площині. Таку площину (матеріальну сингулярну поверхню нульового та першого порядку) за означенням [9] будемо вважати внутрішнім межовим шаром (internal boundary layer), який є матеріальним носієм певних, відмінних від окреслених рівняннями лінійної теорії пружності, властивостей і за допомогою якого можна моделювати деякі типи планарних дефектів будови ідеального пружного матеріалу.

Побудовані розв'язки поля переміщень і всіх інших польових характеристик напружено-деформованого стану в циліндричній системі координат записані через інтеграли Ганкеля і містять наперед невідомі твірні функції густин розподілу об'ємних моментних диполів і об'ємних сил. Належний їх вибір дає можливість отримати розв'язки певного класу осесиметричних задач механіки деформівного твердого тіла.

Зазначимо, що фундаментальна система розв'язків рівнянь статики з пеленою дотичних до площини об'ємних сил і безмоментних диполів у циліндричній системі координат побудована у праці [3].

1. Фундаментальна система розв'язків другого типу рівнянь статики у циліндричній системі координат. В однорідному ізотропному пружному просторі введемо циліндричну систему координат $r = R\alpha$, β, $z = R\gamma$ з початком у точці O, де R − деякий характерний лінійний розмір (радіус щілини чи включення). Вважаємо, що під дією прикладеного навантаження у просторі реалізується осесиметричний відносно осі γ напружено-деформований стан. Ненульові компоненти $Ru_\alpha(\alpha,\gamma)$ і $Ru_\gamma(\alpha,\gamma)$ вектора пружного переміщення $\mathbf{u}(\alpha,\gamma)$, який визначається розв'язками рівнянь Ляме з об'ємною силою $\mathbf{F}$, а також їх частинні похідні $\varphi_\alpha(\alpha,\gamma) = \partial_\alpha u_\gamma$ і $\varphi_\gamma(\alpha,\gamma) = \partial_\gamma u_\alpha$ (пружні кути повороту лінійних елементів, паралельних до осей α і γ відповідно) означимо у просторі $\mathbb{R}^3$ і підпорядкуємо умовам симетрії та антисиметрії відносно координатної площини $\gamma = 0$:

$$u_\alpha(\alpha, -\gamma) = -u_\alpha(\alpha, \gamma), \qquad u_\gamma(\alpha, -\gamma) = u_\gamma(\alpha, \gamma),$$

$$\varphi_\alpha(\alpha, -\gamma) = \varphi_\alpha(\alpha, \gamma), \qquad \varphi_\gamma(\alpha, -\gamma) = \varphi_\gamma(\alpha, \gamma). \tag{1}$$

Через ∂_α і ∂_γ позначаємо оператори диференціювання за α і γ відповідно.

Знайдемо такі компоненти вектора $\mathbf{u}$, які, задовольняючи умови (1), є розв'язками рівнянь статики пружного середовища з розподіленою у площині $\gamma = 0$ пеленою об'ємних моментних диполів і перпендикулярних до цієї площини об'ємних сил

$$k^2\partial_\alpha\theta + 2\partial_\gamma\omega_\beta = -\delta'(\gamma)X_\alpha(\alpha),$$

$$k^2\partial_\gamma\theta - 2\alpha^{-1}\partial_\alpha(\alpha\omega_\beta) = -\delta(\gamma)X_\gamma(\alpha), \tag{2}$$

які є рівняннями Ляме у компонентній формі в осесиметричному випадку. Тут безрозмірні функції густини розподілу диполів і сил задані інтегралами Ганкеля

$$X_\alpha(\alpha) = 2\int_0^\infty \left[(k^2+1)A(\xi) - \xi B(\xi)\right] J_1(\xi\alpha)\, d\xi, \tag{3}$$

$$X_\gamma(\alpha) = 2\int_0^\infty \left[(k^2-1)A(\xi) + \xi B(\xi)\right] \xi J_0(\xi\alpha)\, d\xi. \tag{4}$$

У співвідношеннях (2)–(4) позначено: $k^2 = (\lambda + 2\mu)/\mu$, де λ і μ – сталі Ляме; $\delta(\gamma)$ і $\delta'(\gamma)$ – δ-функція Дірака та її похідна; $J_0(\xi\alpha)$, $J_1(\xi\alpha)$ – функції Бесселя першого роду; $A(\xi)$, $B(\xi)$ – невідомі наперед твірні функції для густин $X_\alpha(\alpha), X_\gamma(\alpha)$.

Зауважимо, що можна ввести розмірні густини розподілу об'ємних моментних диполів $g_\alpha^D(\alpha)$ та об'ємних сил $g_\gamma^F(\alpha)$ співвідношеннями

$$g_\alpha^D(\alpha) = -\mu R^{-1} X_\alpha(\alpha),$$

$$g_\gamma^F(\alpha) = \mu R^{-1} X_\gamma(\alpha),$$

які мають розмірність $Н/м^3$.

Використовуючи правило диференціювання узагальнених функцій [2] $(\operatorname{sgn}\gamma)' = 2\delta(\gamma)$ і $f(\gamma)\delta'(\gamma) = f(0)\delta'(\gamma) - f'(0)\delta(\gamma)$, безпосередньою підстановкою переконуємося, що розв'язки рівнянь у частинних похідних (2) з правими частинами (3) і (4) стосовно функцій

$$\theta(\alpha, \gamma) \equiv \operatorname{div}\mathbf{u} = \alpha^{-1}\partial_\alpha(\alpha u_\alpha) + \partial_\gamma u_\gamma,$$

$$2\omega_\beta(\alpha, \gamma) \equiv (\operatorname{rot}\mathbf{u})_\beta = \partial_\gamma u_\alpha - \partial_\alpha u_\gamma = \varphi_\gamma(\alpha, \gamma) - \varphi_\alpha(\alpha, \gamma), \tag{5}$$

є такими:

$$\theta(\alpha, \gamma) = -2\operatorname{sgn}\gamma \int_0^\infty \xi A(\xi) e^{-\xi|\gamma|} J_0(\xi\alpha)\, d\xi, \tag{6}$$

$$\omega_\beta(\alpha, \gamma) = -\frac{1}{2}\delta(\gamma)X_\alpha(\alpha) + k^2 \int_0^\infty \xi A(\xi) e^{-\xi|\gamma|} J_1(\xi\alpha)\, d\xi. \tag{7}$$

За відомими функціями $\theta(\alpha, \gamma)$ і $\omega_\beta(\alpha, \gamma)$ із системи рівнянь (5) першого порядку визначимо компоненти вектора переміщень:

$$u_\alpha(\alpha,\gamma) = -\operatorname{sgn}\gamma \int_0^\infty \left[(k^2+1)A(\xi) - \xi B(\xi)\right] e^{-\xi|\gamma|} J_1(\xi\alpha)\, d\xi +$$

$$+ (k^2-1)\gamma \int_0^\infty \xi A(\xi) e^{-\xi|\gamma|} J_1(\xi\alpha)\, d\xi\,, \tag{8}$$

$$u_\gamma(\alpha,\gamma) = \int_0^\infty \xi B(\xi) e^{-\xi|\gamma|} J_0(\xi\alpha)\, d\xi + (k^2-1)|\gamma| \int_0^\infty \xi A(\xi) e^{-\xi|\gamma|} J_0(\xi\alpha)\, d\xi\,, \tag{9}$$

та вирази для пружних кутів повороту:

$$\varphi_\alpha(\alpha,\gamma) = -\int_0^\infty \xi^2 B(\xi) e^{-\xi|\gamma|} J_1(\xi\alpha)\, d\xi - (k^2-1)|\gamma| \int_0^\infty \xi^2 A(\xi) e^{-\xi|\gamma|} J_1(\xi\alpha)\, d\xi\,,$$

$$\varphi_\gamma(\alpha,\gamma) = -2\delta(\gamma) \int_0^\infty \left[(k^2+1)A(\xi) - \xi B(\xi)\right] J_1(\xi\alpha)\, d\xi +$$

$$+ \int_0^\infty \xi\left[2k^2 A(\xi) - \xi B(\xi)\right] e^{-\xi|\gamma|} J_1(\xi\alpha)\, d\xi -$$

$$- (k^2-1)|\gamma| \int_0^\infty \xi^2 A(\xi) e^{-\xi|\gamma|} J_1(\xi\alpha)\, d\xi\,. \tag{10}$$

За законом Гука обчислимо також компоненти тензора напружень:

$$\sigma_{\alpha\alpha}(\alpha,\gamma) = -\mu \operatorname{sgn}\gamma \left\{ \int_0^\infty \left[3(k^2-1)A(\xi) - \xi B(\xi)\right] \xi e^{-\xi|\gamma|} J_0(\xi\alpha)\, d\xi - \right.$$

$$- \int_0^\infty \left[(k^2+1)A(\xi) - \xi B(\xi)\right] \xi e^{-\xi|\gamma|} J_2(\xi\alpha)\, d\xi -$$

$$\left. - (k^2-1)\gamma \int_0^\infty \xi^2 A(\xi) e^{-\xi|\gamma|} \left[J_0(\xi\alpha) - J_2(\xi\alpha)\right] d\xi \right\},$$

$$\sigma_{\gamma\gamma}(\alpha,\gamma) = 2\mu \left\{ \operatorname{sgn}\gamma \int_0^\infty \xi\left[A(\xi) - \xi B(\xi)\right] e^{-\xi|\gamma|} J_0(\xi\alpha)\, d\xi - \right.$$

$$\left. - (k^2-1)\gamma \int_0^\infty \xi^2 A(\xi) e^{-\xi|\gamma|} J_0(\xi\alpha)\, d\xi \right\},$$

$$\sigma_{\beta\beta}(\alpha,\gamma) = (3\lambda + 2\mu)\theta(\alpha,\gamma) - (\sigma_{\alpha\alpha}(\alpha,\gamma) + \sigma_{\gamma\gamma}(\alpha,\gamma))\,, \tag{11}$$

$$\sigma_{\alpha\gamma}(\alpha,\gamma) = \mu\left[\varphi_\alpha(\alpha,\gamma) + \varphi_\gamma(\alpha,\gamma)\right] =$$

$$= 2\mu \left\{ \int_0^\infty \xi\left[k^2 A(\xi) - \xi B(\xi)\right] e^{-\xi|\gamma|} J_1(\xi\alpha)\, d\xi - \frac{1}{2}\delta(\gamma) X_\alpha(\alpha) - \right.$$

$$\left. - (k^2-1)|\gamma| \int_0^\infty \xi^2 A(\xi) e^{-\xi|\gamma|} J_1(\xi\alpha)\, d\xi \right\}. \tag{12}$$

Отже, відповідно до виразів (6), (8), (11) об'ємна деформація $\theta(\alpha,\gamma)$, радіальне переміщення $u_\alpha(\alpha,\gamma)$ і нормальні напруження $\sigma_{\alpha\alpha}(\alpha,\gamma)$, $\sigma_{\beta\beta}(\alpha,\gamma)$ і $\sigma_{\gamma\gamma}(\alpha,\gamma)$ можуть мати стрибок при переході через площину $\gamma = 0$, про що свідчить множник $\operatorname{sgn}\gamma$. Таким чином, за означенням [9] поверхня $\gamma = 0$ є сингулярною матеріальною поверхнею нульового і разом з тим першого порядку – внутрішнім межовим шаром, який обмежений поверхнями $\gamma = \pm 0$.

Його механічним проявом є стрибки радіальних переміщень і нормальних напружень, а охарактеризована функціями $X_\alpha(\alpha)$ та $X_\gamma(\alpha)$ пелена моментних диполів (3) і об'ємних сил (4) є його математичною моделлю.

Відмітимо, що у формулах (6), (8), (11) стрибки характеристик напружено-деформованого стану задаються твірними функціями $A(\xi)$ і $B(\xi)$, які у конкретних задачах визначаються розв'язками інтегральних рівнянь першого роду і залежать від певних параметрів. Вибір цих параметрів дає можливість будувати фізично несуперечливі математичні моделі механічних явищ і процесів.

2. Механічний зміст моментних диполів. Відповідно до подання (8) на поверхнях означеного рівняннями (2) межового шару $\gamma = \pm 0$ матимемо, що

$$u_\alpha(\alpha, \pm 0) = \mp \int_0^\infty \left[(k^2+1)A(\xi) - \xi B(\xi)\right] J_1(\xi\alpha)\, d\xi ,$$

а тому із закону розподілу (3) моментних диполів випливає рівність

$$u_\alpha(\alpha, +0) - u_\alpha(\alpha, -0) = -X_\alpha(\alpha) = g_\alpha^D(\alpha)\mu^{-1}R , \tag{13}$$

яка окреслює однозначну залежність між густиною розподілу моментних диполів і стрибком радіальних переміщень. При цьому у випадку відсутності об'ємних сил, $X_\gamma(\alpha) = 0$, згідно із (4) маємо залежність між твірними функціями

$$(k^2-1)A(\xi) + \xi B(\xi) = 0$$

і тоді

$$g_\alpha^D(\alpha)R = -4k^2\mu \int_0^\infty A(\xi) J_1(\xi\alpha)\, d\xi . \tag{14}$$

Отже, за відсутності об'ємних сил зовнішнє навантаження межового шару може бути зреалізоване моментними диполями за законом (14). Тоді радіальне переміщення $u_\alpha(\alpha,\gamma)$, об'ємна деформація $\theta(\alpha,\gamma)$, а також нормальні напруження $\sigma_{\alpha\alpha}(\alpha,\gamma)$, $\sigma_{\beta\beta}(\alpha,\gamma)$ і $\sigma_{\gamma\gamma}(\alpha,\gamma)$ матимуть стрибки при переході через площину $\gamma = 0$. Розподіл диполів породжує зв'язані між собою стрибки векторів переміщень (13) і напружень

$$\sigma_{\gamma\gamma}(\alpha, +0) - \sigma_{\gamma\gamma}(\alpha, -0) = R\frac{1}{\alpha}\frac{d}{d\alpha}\left[\alpha g_\alpha^D(\alpha)\right] = 4\mu k^2 \int_0^\infty \xi A(\xi) J_0(\xi\alpha)\, d\xi .$$

У випадку відсутності у межовому шарі моментних диполів, $X_\alpha(\alpha) = 0$, твірні функції зв'язані залежністю

$$(k^2+1)A(\xi) = \xi B(\xi) ,$$

а тому межовий шар реалізує пелена об'ємних сил, розподілених за законом

$$g_\alpha^F(\alpha)R = 4k^2\mu \int_0^\infty \xi A(\xi) J_0(\xi\alpha)\, d\xi .$$

При цьому відповідно до залежності (13) стрибок радіальних переміщень дорівнює нулеві і залишаються ненульовими тільки стрибки об'ємної деформації $\theta(\alpha,\gamma)$ і нормальних напружень $\sigma_{\alpha\alpha}(\alpha,\gamma)$, $\sigma_{\beta\beta}(\alpha,\gamma)$ і $\sigma_{\gamma\gamma}(\alpha,\gamma)$. Це означає, що розподіл нормальної до площини $\gamma = 0$ об'ємної сили зумовлює протилежний за знаком стрибок нормальної складової вектора напружень

$$\sigma_{\gamma\gamma}(\alpha,+0)-\sigma_{\gamma\gamma}(\alpha,-0) = -4\mu k^2\int\limits_0^\infty \xi A(\xi)J_0(\xi\alpha)\,d\xi = -g_\gamma^F(\alpha)R\,.$$

У цьому випадку площина $\gamma = 0$ внутрішнього межового шару стає матеріальною поверхнею розриву параметрів поля першого порядку.

Зауважимо, що розподіл на поверхні межового шару крайових дислокацій зумовлює стрибки на ньому виключно переміщень, а тому незалежні між собою стрибки векторів напружень і переміщень можна формувати або за допомогою зв'язаних між собою розподілів сил і силових моментних диполів, або незалежних розподілів сил і крайових дислокацій [8].

3. Класична задача Кельвіна. Розв'язок класичної задачі Кельвіна [1, 11, 12] про дію зосередженої об'ємної сили P у початку циліндричної системи координат, яка спрямована в напрямку осі γ, отримаємо за такого розподілу об'ємних моментних диполів і об'ємних сил:

$$X_\alpha(\alpha) = 0, \qquad X_\gamma(\alpha) = \frac{Q\delta(\alpha)}{2\pi\alpha}, \tag{15}$$

де

$$2\pi\int\limits_0^\infty \alpha X_\gamma(\alpha)\,d\alpha = Q, \qquad Q = \frac{P}{R^2\mu}\,.$$

Відповідно до виразів (3) і (4) умови (15) виконуються, якщо

$$(k^2+1)A(\xi) = \xi B(\xi), \qquad \int\limits_0^\infty \xi A(\xi)J_0(\xi\alpha)\,d\xi = \frac{Q}{8\pi k^2}\cdot\frac{\delta(\alpha)}{\alpha}, \tag{16}$$

причому перші з умов (15) і (16) неявно зумовлюють радіальну нерозтягливість внутрішнього межового шару, оскільки згідно з формулою (8) матимемо $u_\alpha(\alpha,\pm 0) = 0$ $\forall\alpha\in[\alpha,\infty)$.

За означенням

$$\int\limits_0^\infty \xi J_0(\xi\alpha)\,d\xi = \frac{\delta(\alpha)}{\alpha}$$

дельта-функції Дірака у полярній системі координат інтегральне рівняння (16) буде виконуватися, коли

$$A(\xi) = \frac{Q}{8\pi k^2}, \qquad \xi B(\xi) = \frac{Q(k^2+1)}{8\pi k^2}\,.$$

Тому за відомими твірними функціями $A(\xi)$ і $B(\xi)$ і формулами (8)–(12) можна визначити усі просторові характеристики напружено-деформованого стану у задачі Кельвіна. Зокрема, переміщення будуть такими:

$$u_\alpha(\alpha,\gamma) = \frac{Q(k^2-1)}{8\pi k^2}\,\gamma\int\limits_0^\infty \xi e^{-\xi|\gamma|}J_1(\xi\alpha)\,d\xi = \frac{Q(k^2-1)}{8\pi k^2}\cdot\frac{\alpha|\gamma|\operatorname{sgn}\gamma}{\sqrt{(\alpha^2+\gamma^2)^3}}, \tag{17}$$

$$u_\gamma(\alpha,\gamma) = \frac{Q(k^2-1)}{8\pi k^2}\left\{(k^2+1)\int\limits_0^\infty e^{-\xi|\gamma|}J_0(\xi\alpha)\,d\xi + {}\right.$$

$$\left. {}+(k^2-1)|\gamma|\int\limits_0^\infty \xi e^{-\xi|\gamma|}J_0(\xi\alpha)\,d\xi\right\} =$$

$$= \frac{Q(k^2-1)}{8\pi k^2}\left\{\frac{k^2+1}{k^2-1}\cdot\frac{1}{\sqrt{(\alpha^2+\gamma^2)}} + \frac{|\gamma|^2}{\sqrt{(\alpha^2+\gamma^2)^3}}\right\}. \tag{18}$$

Якщо у виразах (17) і (18) перейти до розмірних компонент $u_r = Ru_\alpha(\alpha,\gamma)$, $u_z = Ru_\gamma(\alpha,\gamma)$, циліндричних координат $r = R\alpha$, $z = R\gamma$ і врахувати, що $(k^2-1)/k^2 = (\lambda+\mu)/(\lambda+2\mu)$, $(k^2+1)/k^2 = (\lambda+3\mu)/(\lambda+2\mu)$, то матимемо

$$u_r(r,z) = \frac{P(\lambda+\mu)}{8\pi\mu(\lambda+2\mu)} \frac{r|z|\operatorname{sgn} z}{\sqrt{(r^2+z^2)^3}},$$

$$u_z(r,z) = \frac{P(\lambda+\mu)}{8\pi\mu(\lambda+2\mu)} \left\{ \frac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu} \frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}} + \frac{|z|^2}{\sqrt{(r^2+z^2)^3}} \right\}. \qquad (19)$$

Вирази (19) повністю співпадають з відомим результатом (8.7а) з [1].

Покажемо, що з погляду механіки деформівного твердого тіла, зважаючи на сингулярність розв'язку класичної задачі Кельвіна, виникають певні застереження. Для цього за розв'язками (6) і (7) знайдемо функції

$$\theta(\alpha,\gamma) = -\frac{Q\operatorname{sgn}\gamma}{4\pi k^2}\int_0^\infty \xi e^{-\xi|\gamma|} J_0(\xi\alpha)\,d\xi = -\frac{Q}{4\pi k^2}\cdot\frac{|\gamma|\operatorname{sgn}\gamma}{\sqrt{(\alpha^2+\gamma^2)^3}},$$

$$\omega_\beta(\alpha,\gamma) = \frac{Q}{8\pi}\int_0^\infty \xi e^{-\xi|\gamma|} J_1(\xi\alpha)\,d\xi = \frac{Q\alpha}{8\pi\sqrt{(\alpha^2+\gamma^2)^3}}, \qquad (20)$$

які визначають зміну елементарного об'єму і його локальний жорсткий поворот в результаті деформації. Для зручності аналізу виразів (20) введемо сферичну систему координат $\alpha = \rho\sin\varphi$, $\gamma = \rho\cos\varphi$ $(0 \le \rho < \infty,\ 0 \le |\varphi| \le \pi)$, де кут φ відкладаємо від додатного напрямку осі γ. Тоді отримаємо

$$\theta(\alpha,\gamma) = -\frac{Q}{4\pi k^2}\frac{\cos\varphi}{\rho^2},$$

$$\omega_\beta(\alpha,\gamma) = \frac{Q}{8\pi}\frac{\sin\varphi}{\rho^2}.$$

Отже, граничні значення цих виразів при $\rho \to 0$ залежать від кута φ і необмежено зростають, хоча з погляду механіки деформівного твердого тіла вони у будь-якій точці не повинні залежати від напрямку граничного переходу у цю точку.

Крім того, записавши переміщення уздовж радіуса у сферичній системі координат

$$u_\rho(\rho,\varphi) = u_\alpha(\rho,\varphi)\sin\varphi + u_\gamma(\rho,\varphi)\cos\varphi,$$

за формулами (17) і (18) одержимо

$$u_\rho(\rho,\varphi) = \frac{Q}{4\pi}\frac{\cos\varphi}{\rho}.$$

Безмежність цього переміщення при $\rho \to 0$ у проміжку $0 \le \varphi < \pi/2$ зумовлює фізично неможливе взаємопроникнення точок континууму [7] у певній області навколо цієї точки.

4. Узагальнена задача Кельвіна з умовою відсутності вертикальних зміщень площини навантаження. Узагальненою задачею Кельвіна назвемо несингулярну задачу, коли навантаження безмежного простору здійснюється за допомогою неперервних розподілів моментних диполів і сил за законом

$$X_\alpha(\alpha) = \alpha G(\alpha^2) = u_\alpha^- - u_\alpha^+,$$

$$X_\gamma(\alpha) = \frac{Q}{4\pi p} e^{-\alpha^2/4p}, \qquad p > 0, \qquad (21)$$

де $G(\alpha^2)$ – неперервна функція, яка визначає стрибок радіальних переміщень $u_\alpha(\alpha,\pm 0)$ на поверхнях $\gamma = \pm 0$ межового шару; розподілена сила

$X_\gamma(\alpha)$ є неперервною функцією змінної α і має сталу інтегральну інтенсивність $2\pi\int\limits_0^\infty X_\gamma(\alpha)\alpha\,d\alpha = Q$. Параметр $p > 0$ визначає ступінь локалізації розподілу об'ємної сили $X_\gamma(\alpha)$: при $p = 0$ функція $X_\gamma(\alpha) = 0$ $\forall\alpha \in (0,\infty)$, а в точці $\alpha = 0$ вона має особливість типу p^{-1}. Для кожного $p > 0$ існує область $0 \le \alpha \le \alpha_0$, де розподіл $X_\gamma(\alpha)$ є близьким до рівномірного, а поза нею швидко спадає при $\alpha \to \infty$. Тому параметр p можна вважати зведеною механічною характеристикою внутрішнього межового шару, який об'ємну силу сталої інтегральної інтенсивності Q, що діє у певній скінченній внутрішній області тіла, трансформує (розмазує) за певним законом (у цьому випадку – (21)) у площині $\gamma = 0$. Така ситуація відображає різницю між механікою континууму, де кожний вплив із певної точки поширюється до безмежно віддаленої, та механікою реальних тіл, де усі впливи на певній відстані перестають бути відчутними, а до нескінченності і не доходять.

Функцію $G(\alpha^2)$ виберемо таким чином, щоб при заданій об'ємній силі $g_\gamma^F(\alpha) = \mu R^{-1} X_\gamma(\alpha)$ (параметрів Q і p) вертикальні переміщення (9) площини $\gamma = 0$ дорівнювали деяким заданим. Для визначеності вимагатимемо, щоб вони були нульовими. З погляду механіки, цього можна досягнути належним додатковим довантаженням площини $\gamma = 0$ (формуванням межового шару) за допомогою розподілених (поряд із силовими) також і моментних силових диполів $X_\alpha(\alpha)$. Оскільки відповідно до виразу (9) $u_\gamma(\alpha,0) = 0$ за умови $B(\xi) = 0$, то у цьому випадку згідно з поданнями (3) і (4) функції розподілів $X_\alpha(\alpha)$, $X_\gamma(\alpha)$ визначаються лише однією твірною функцією $A(\xi)$:

$$X_\alpha(\alpha) = 2(k^2+1)\int\limits_0^\infty A(\xi) J_1(\xi\alpha)\,d\xi\,,$$

$$X_\gamma(\alpha) = 2(k^2-1)\int\limits_0^\infty A(\xi)\xi J_0(\xi\alpha)\,d\xi = \frac{Q}{4\pi p}e^{-\alpha^2/4p}. \tag{22}$$

За формулою обернення інтегрального перетворення Ганкеля із співвідношень (22) знайдемо, що

$$A(\xi) = \frac{Q}{4\pi}\cdot\frac{e^{-p\xi^2}}{k^2-1}\,,$$

$$X_\alpha(\alpha) = \alpha G(\alpha) = \frac{Q}{\pi}\cdot\frac{k^2+1}{k^2-1}\frac{1}{\alpha}(1-e^{-\alpha^2/4p})\,,$$

$$g_\alpha^D(\alpha) = -\mu R^{-1} X_\alpha(\alpha)\,. \tag{23}$$

Отже, відсутність вертикальних переміщень точок площини $\gamma = 0$ під дією нормальних сил $g_\gamma^F(\alpha) = \mu R^{-1} X_\gamma(\alpha) = \mu R^{-1}\dfrac{Q}{4\pi p}e^{-\alpha^2/4p}$ в узагальненій задачі Кельвіна (21) забезпечується розподілом у цій площині моментних диполів $g_\alpha^D(\alpha)$ за законом (23).

Тепер за відомими твірними функціями $A(\xi)$ (23) і $B(\xi) = 0$, а також розв'язками (8), (9), (11) обчислимо компоненти вектора пружного переміщення і тензора напружень:

$$u_\alpha(\alpha,\gamma) = -\frac{Q(k^2+1)\operatorname{sgn}\gamma}{4\pi(k^2-1)} \int_0^\infty e^{-p\xi^2-\xi|\gamma|} J_1(\xi\alpha)\, d\xi + \\ + \frac{Q\gamma}{4\pi} \int_0^\infty \xi e^{-p\xi^2-\xi|\gamma|} J_1(\xi\alpha)\, d\xi\,,$$

$$u_\gamma(\alpha,\gamma) = \frac{Q}{4\pi}|\gamma| \int_0^\infty \xi e^{-p\xi^2-\xi|\gamma|} J_0(\xi\alpha)\, d\xi\,,$$

$$\sigma_{\gamma\gamma}(\alpha,\gamma) = \frac{2\mu Q\operatorname{sgn}\gamma}{4\pi(k^2-1)} \left\{ \int_0^\infty \xi e^{-p\xi^2-\xi|\gamma|} J_0(\xi\alpha)\, d\xi - \right. \\ \left. - (k^2-1)|\gamma| \int_0^\infty \xi^2 e^{-p\xi^2-\xi|\gamma|} J_0(\xi\alpha)\, d\xi \right\},$$

$$\sigma_{\alpha\alpha}(\alpha,\gamma) = -\frac{\mu Q\operatorname{sgn}\gamma}{4\pi} \left\{ 3\int_0^\infty \xi e^{-p\xi^2-\xi|\gamma|} J_0(\xi\alpha)\, d\xi - \right. \\ - \frac{k^2+1}{k^2-1} \int_0^\infty \xi e^{-p\xi^2-\xi|\gamma|} J_2(\xi\alpha)\, d\xi - \\ \left. - |\gamma| \int_0^\infty \xi^2 e^{-p\xi^2-\xi|\gamma|} \left[J_0(\xi\alpha) - J_2(\xi\alpha) \right] d\xi \right\},$$

$$\sigma_{\alpha\gamma}(\alpha,\gamma) = \frac{\mu Q}{2\pi(k^2-1)} \left\{ k^2 \int_0^\infty \xi e^{-p\xi^2-\xi|\gamma|} J_1(\xi\alpha)\, d\xi - \frac{1}{2}\delta(\gamma) X_\alpha(\alpha) - \right. \\ \left. - (k^2-1)|\gamma| \int_0^\infty \xi^2 e^{-p\xi^2-\xi|\gamma|} J_1(\xi\alpha)\, d\xi \right\}. \qquad (24)$$

Для довільного значення параметра $p > 0$ інтеграли у виразах (24) можна знайти чисельним інтегруванням, проте на поверхнях $\gamma = \pm 0$ межового шару їх легко обчислити аналітично [4] і знайти такі явні закони їх розподілу:

$$u_\alpha(\alpha, \pm 0) = \mp \frac{Q(k^2+1)}{2\pi(k^2-1)} \frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha^2/4p})\,, \qquad (25)$$

$$\theta(\alpha, \pm 0) = \mp \frac{Q}{4\pi p(k^2-1)} e^{-\alpha^2/4p}\,,$$

$$\omega_\beta(\alpha, \pm 0) = \frac{Qk^2\alpha e^{-\alpha^2/4p}}{32p\sqrt{\pi p}(k^2-1)} \left[I_0\left(\frac{\alpha^2}{8p}\right) - I_1\left(\frac{\alpha^2}{8p}\right) \right], \qquad (26)$$

$$\sigma_{\gamma\gamma}(\alpha, \pm 0) = \pm \frac{\mu Q}{4\pi p(k^2-1)} e^{-\alpha^2/4p}\,,$$

$$\sigma_{\alpha\gamma}(\alpha, \pm 0) = 2\mu\omega_\beta(\alpha, \pm 0)\,,$$

$$\sigma_{\alpha\alpha}(\alpha, \pm 0) = \mp \frac{3Q\mu e^{-\alpha^2/4p}}{8\pi p} \left\{ 1 - \frac{(k^2+1)\sqrt{\pi}}{3(k^2-1)\sqrt{p}} \alpha e^{\alpha^2/8p} \times \right. \\ \left. \times \left[I_{1/2}\left(\frac{\alpha^2}{8p}\right) - I_{3/2}\left(\frac{\alpha^2}{8p}\right) \right] \right\}, \qquad (27)$$

де $I_\nu(x)$ – модифіковані функції Бесселя першого роду порядку ν.

Аналіз характеристик (25)–(27) напружено-деформованого стану вказує на те, що за умови $p > 0$ усі вони є обмеженими в точці максимуму навантаження і спадають на нескінченності. При $p = 0$ маємо ефект взаємопроникнення, оскільки $u_\gamma(\alpha,\gamma) = \dfrac{Q}{4\pi}\dfrac{\gamma^2}{(\alpha^2+\gamma^2)^{3/2}}$.

5. Розв'язок Снеддона і Терезави рівнянь статики для півпростору. Якщо припустити, що областю визначення розв'язків (6)–(12) є півпростір $0 \le \alpha < \infty$, $0 \le \gamma < \infty$, тоді $\operatorname{sgn}\gamma = 1$, $|\gamma| = \gamma$ і для компонент $u_\alpha(\alpha,\gamma)$ і $u_\gamma(\alpha,\gamma)$ вектора $\mathbf{u}$ одержимо, що

$$u_\alpha(\alpha,\gamma) = -\int_0^\infty \left[(k^2+1)A(\xi) - \xi B(\xi)\right] e^{-\xi\gamma} J_1(\xi\alpha)\,d\xi + {} + (k^2-1)\gamma\int_0^\infty \xi A(\xi) e^{-\xi\gamma} J_1(\xi\alpha)\,d\xi,$$

$$u_\gamma(\alpha,\gamma) = \int_0^\infty \xi B(\xi) e^{-\xi\gamma} J_0(\xi\alpha)\,d\xi + (k^2-1)\gamma\int_0^\infty \xi A(\xi) e^{-\xi\gamma} J_0(\xi\alpha)\,d\xi. \qquad (28)$$

Ці формули повністю співпадають з формулами (10.16), (10.17) [7], якщо використати явний вираз введеної там бігармонічної функції $G(\xi,\gamma)$.

Компоненти тензора напружень будуть такими:

$$\sigma_{\alpha\alpha}(\alpha,\gamma) = -\mu\left\{\int_0^\infty \left[3(k^2-1)A(\xi) - \xi B(\xi)\right]\xi e^{-\xi\gamma} J_0(\xi\alpha)\,d\xi - {} - \int_0^\infty \left[(k^2+1)A(\xi) - \xi B(\xi)\right]\xi e^{-\xi\gamma} J_2(\xi\alpha)\,d\xi - {} - (k^2-1)\gamma\int_0^\infty \xi^2 A(\xi) e^{-\xi\gamma}\left[J_0(\xi\alpha) - J_2(\xi\alpha)\right] d\xi\right\},$$

$$\sigma_{\gamma\gamma}(\alpha,\gamma) = 2\mu\left\{\int_0^\infty \xi\left[A(\xi) - \xi B(\xi)\right] e^{-\xi\gamma} J_0(\xi\alpha)\,d\xi - {} - (k^2-1)\gamma\int_0^\infty \xi^2 A(\xi) e^{-\xi\gamma} J_0(\xi\alpha)\,d\xi\right\},$$

$$\sigma_{\beta\beta}(\alpha,\gamma) = (3\lambda+2\mu)\theta(\alpha,\gamma) - (\sigma_{\alpha\alpha}(\alpha,\gamma) + \sigma_{\gamma\gamma}(\alpha,\gamma)),$$

$$\sigma_{\alpha\gamma}(\alpha,\gamma) = 2\mu\left\{\int_0^\infty \xi\left[k^2 A(\xi) - \xi B(\xi)\right] e^{-\xi\gamma} J_1(\xi\alpha)\,d\xi - {} - (k^2-1)\gamma\int_0^\infty \xi^2 A(\xi) e^{-\xi\gamma} J_1(\xi\alpha)\,d\xi\right\}. \qquad (29)$$

Якщо на межі $\gamma = 0$ півпростору дотичні напруження $\sigma_{\alpha\gamma}(\alpha,0) = 0$, то відповідно до виразів (29) існує зв'язок $k^2 A(\xi) = \xi B(\xi)$ і в цьому випадку одержимо

$$u_\alpha(\alpha,\gamma) = -\int_0^\infty A(\xi) e^{-\xi\gamma} J_1(\xi\alpha)\,d\xi + (k^2-1)\gamma\int_0^\infty \xi A(\xi) e^{-\xi\gamma} J_1(\xi\alpha)\,d\xi,$$

$$u_\gamma(\alpha,\gamma) = k^2\int_0^\infty A(\xi) e^{-\xi\gamma} J_0(\xi\alpha)\,d\xi + (k^2-1)\gamma\int_0^\infty \xi A(\xi) e^{-\xi\gamma} J_0(\xi\alpha)\,d\xi, \qquad (30)$$

$$\sigma_{\gamma\gamma}(\alpha,\gamma) = -2\mu(k^2-1)\left\{\int_0^\infty \xi A(\xi) e^{-\xi\gamma} J_0(\xi\alpha)\,d\xi + \gamma\int_0^\infty \xi^2 A(\xi) e^{-\xi\gamma} J_0(\xi\alpha)\,d\xi\right\},$$

$$\sigma_{\alpha\gamma}(\alpha,\gamma) = -2\mu(k^2-1)\gamma\int_0^\infty \xi^2 A(\xi) e^{-\xi\gamma} J_1(\xi\alpha)\,d\xi\,, \tag{31}$$

де невідома функція $A(\xi)$ визначається крайовими умовами на межі $\gamma = 0$. Формули (30), (31) співпадають з аналогічними поданнями (10.34)–(10.37) [7].

Зазначимо, що для твірної функції $A(\xi) = \dfrac{P}{4\pi\mu(k^2-1)}$ вирази (30) і (31) дають розв'язок задачі Буссінеска, оскільки при цьому на межі $\gamma = 0$ компоненти тензора напружень

$$\sigma_{\gamma\gamma}(\alpha,0) = \frac{P}{2\pi}\frac{\delta(\alpha)}{\alpha},$$

$$\sigma_{\alpha\gamma}(\alpha,0) = 0$$

є крайовими умовами цієї задачі.

6. Висновки. На основі математичної моделі поверхонь розриву нульового порядку параметрів напружено-деформованого стану як пелени розподілених на площині об'ємних моментних диполів і об'ємних сил побудовано фундаментальні розв'язки другого типу відповідних осесиметричних рівнянь статики пружного тіла.

Запропоновані розв'язки (6)–(12) дають можливість легко обчислювати при переході через площину навантаження $\gamma = 0$ стрибки радіальних переміщень $u_\alpha(\alpha,\pm 0)$ і нормальних напружень $\sigma_{\gamma\gamma}(\alpha,\pm 0)$, $\sigma_{\alpha\alpha}(\alpha,\pm 0)$, $\sigma_{\beta\beta}(\alpha,\pm 0)$ у випадку навантаження диполями $X_\alpha(\alpha)$ і стрибки нормальних напружень $\sigma_{\gamma\gamma}(\alpha,\pm 0)$ – у випадку навантаження розподіленими силами $X_\gamma(\alpha)$.

Сформульовано некласичну задачу Кельвіна з умовою відсутності нормальних переміщень площини навантаження і виявлено, що така деформація можлива за відповідного натягу поверхонь внутрішнього межового шару нормальними напруженнями $\sigma_{\alpha\alpha}(\alpha,\pm 0)$. Таку властивість межового шару моделює спільна дія розподілених сил і диполів.

Завдяки технологіям керування властивостями поверхонь [5], а в подальшому і межових шарів створюються принципові можливості керування формозміною тіла межовими шарами.

1. *Божидарник В. В., Сулим Г. Т.* Елементи теорії пружності. – Львів: Світ, 1994. – 560 с.
2. *Владимиров В. С.* Обобщенные функции в математической физике. – Москва: Наука, 1979. – 318 с.
3. *Галазюк В. А., Сулим Г. Т.* Про один клас фундаментальних розв'язків статичної задачі теорії пружності в циліндричних координатах // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2000. – **43**, № 1. – С. 84–93.
4. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – Москва: Наука, 1971. – 1100 с.
5. *Наумовец А. Г.* Использование поверхностных фазовых переходов для управления свойствами поверхностей // Прогресивні матеріали і технології: В 2 т. – Київ: Академперіодика, 2003. – Т. 2. – С. 319–351.
6. *Рвачов М. О.* Про розрив переміщень в суцільному пружному просторі // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1983. – № 10. – С. 39–41.
7. *Снеддон И.* Преобразование Фурье. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1955. – 667 с.
8. *Сулим Г.* Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями. – Львів: Досл.-вид. центр НТШ, 2007. – 716 с.

9. *Трусделл К.* Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. – Москва: Мир, 1975. – 592 с.
10. *Kossecka E.* Surface distributions of double forces // Arch. Mech. Stosow. – 1971. – **23**, No. 3. – P. 313–328.
11. *Thomson W.* Note on the integration of the equations of equilibrium of an elastic solid // Cambridge and Dublin Math. J. – 1848. – P. 97–99. (See also: *Sir Williams Thomson* // In: Mathematical and Physical Papers. Vol. 1. – Cambridge: Univ. Press, 1882. – xiii+558 p.)
12. *Thomson W.* On a mechanical representation of electric, magnetic, and galvanic forces // Cambridge and Dublin Math. J. – 1847. – Vol. II. – P. 76–80. (See also: *Sir Williams Thomson* // In: Mathematical and Physical Papers. Vol. 1. – Cambridge: Univ. Press, 1882. – xiii+558 p.)

ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ СИСТЕМА РЕШЕНИЙ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ТЕЛА С ПЛОСКОЙ ПЕЛЕНОЙ ОБЪЕМНЫХ МОМЕНТНЫХ ДИПОЛЕЙ И СИЛ

Построена фундаментальная система решений уравнений осесимметричной задачи теории упругости для неограниченного пространства с пеленой нормальных к выбранной плоскости объемных сил и моментных диполей, которая является математической моделью внутреннего погранслоя. С помощью таких слоев удается формулировать некоторые обратные задачи теории упругости, а следовательно, родственные задачи управления напряженно-деформированным состоянием на соответствующих поверхностях. Сформулирована и решена обобщенная задача Кельвина, в соответствии с которой в плоскости распределенного нормального нагружения найден закон распределения моментных диполей (параметров пелены), который соответствующим натяжением обеспечивает заданные для точек плоскости вертикальные перемещения, в частности, нулевые.

FUNDAMENTAL SYSTEM OF SOLUTIONS OF AXISYMMETRIC ELASTICITY THEORY PROBLEM FOR BODY WITH PLANE SHEET OF VOLUME MOMENT DIPOLES AND FORCES

A fundamental system of solutions of equations for axisymmetric elasticity theory problem for an unbounded body with a sheet of normal to a chosen plane volume forces and moment dipoles which is a mathematical model of internal boundary layer is constructed. Using such layers some inverse the elasticity theory problems and therefore related problems of control of stress-strain state on corresponding surfaces can be formulated. The generalized Kelvin's problem is formulated and solved. According to this problem the law of distribution of moment dipoles (the sheet parameters) ensuring the given vertical displacements of the plane points by designated tension, in particular, zero are found.

[1] Львів. нац. ун-т ім. Івана Франка, Львів,
[2] Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано 24.02.09