

ЧИСЛОВЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ПРОЦЕСІВ ТЕРОПЛАСТИЧНОГО ДЕФОРМУВАННЯ ОСЕСИМЕТРИЧНИХ ТІЛ З УРАХУВАННЯМ РОЗВАНТАЖЕННЯ

Досліджено термопружнопластичний стан ізотропного однорідного середовища під дією температурних навантажень. Розглянуто математичну модель пластичної текучості. Запропоновано методіку побудови безумовно стійкої числової схеми методу скінченних елементів для розв'язування таких задач. Показано процес поширення первинної і вторинної зон розвантаження у тілі. Наведено розподіл інтенсивності пластичної деформації у кутовій точці тіла за часом. Досліджено результати, отримані без врахування залежності межі текучості від температури та із врахуванням такої залежності.

Дослідженню термопластичного деформування у тілах обертання присвячено ряд праць, огляд яких наведено у [1, 6–8, 9, 12]. Використанню методу скінченних елементів і методів Ньютона – Рафсона – Канторовича для розв'язування просторових задач про визначення термопружнопластичного напружено-деформованого стану присвячено роботи [3, 5, 11, 12]. Методики обчислення таких задач розроблено із використанням явної схеми покрокового інтегрування, яка є чисельно нестійкою і вимагає дуже малих кроків. У праці [10] розроблено системний підхід для числового обчислення процесів пластичної текучості та побудови числової схеми ітераційного процесу Ньютона. У працях [2, 13] для розв'язування задач силового пружнопластичного деформування застосовується неявна чисельно стійка схема проміжної точки. У запропонованій роботі ця схема використовується для покращення точності й ефективності визначення термопластичних деформацій.

Метою цієї роботи є також дослідження характеру розвантаження в осесиметричному товстостінному тілі обертання при різних залежностях межі пружності від температури. Для цього розв'язується нестационарна задача теплопровідності [4] із використанням методу Ньютона – Канторовича. На основі отриманих температурних полів задача термопластичного деформування зводиться до послідовності нелінійних краєвих задач, кожна з яких лінеаризується методом Ньютона. Розв'язування лінеаризованої задачі здійснюється на основі схем метода скінченних елементів. Скінченні елементи будуються відносно деякої базової поверхні. Це дозволяє просто вирішувати проблему ідентифікації просторових скінченних елементів. На основі описаної методіки розв'язана задача дослідження поширення пластичних зон і зон розвантаження в осесиметричному товстостінному тілі обертання. Отримані результати свідчать про достовірність та ефективність запропонованої методіки.

1. Постановка задачі і основні співвідношення. Розглянемо процес деформування твердого ізотропного тіла, яке знаходиться в об'ємі V , обмежене поверхнею S та піддається дії силових і теплових навантажень, які не призводять до втрати його стійкості. Використаємо математичну модель, що ґрунтується на теорії нелінійної незв'язаної теплопровідності при нестационарному тепловому процесі і теорії неізотермічного пружнопластичної текучості. При цьому будемо враховувати залежність теплофізичних і механічних властивостей матеріалу від температури. Припустимо, що процеси термосилового деформування проходять достатньо повільно, що дозволяє використовувати квазістатичні співвідношення термодинаміки. Рівновагу тіла будемо визначати, виходячи із принципу віртуальних робіт. Математичним виразом цього принципу є варіаційне співвідношення

$$\int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV = \int_V Q_i \delta u_i dV + \int_{S_\sigma} \sigma_{vi} \delta u_i dS,$$

де \mathbf{u} – вектор переміщень; $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$ і $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ – тензори деформацій і напружень відповідно; \mathbf{Q} – вектор густини масових сил; $\boldsymbol{\sigma}_{vi} = \sigma_{ji} \mathbf{v}_j$ – вектор густини поверхневих навантажень; \mathbf{v} – орт нормалі до S . У випадку малих деформацій зв'язок між компонентами ε_{ij} тензора деформацій і вектора переміщень u_i для довільної триортогональної криволінійної системи координат записується у вигляді співвідношень Коші

$$\varepsilon_{ks}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{H_k H_s} \left(H_s \frac{\partial u_s}{\partial \alpha_k} - u_s \frac{\partial H_s}{\partial \alpha_k} + H_k \frac{\partial u_k}{\partial \alpha_s} - u_k \frac{\partial H_k}{\partial \alpha_s} \right) + \sum_{p=1}^3 \left(\frac{H_s}{H_k} G_{pk}^s + \frac{H_k}{H_s} G_{ps}^k \right) \frac{u_p}{H_p} \right].$$

Тут H_i – параметри Ляме; G_{mk}^s – символи Кристофеля, серед яких відмінними від нуля є такі: $G_{ii}^i = \frac{1}{H_i} \frac{\partial H_i}{\partial \alpha_i}$, $G_{ii}^k = -\frac{H_i}{H_k^2} \frac{\partial H_i}{\partial \alpha_k}$, $G_{ij}^i = \frac{\partial(\ln H_i)}{\partial \alpha_j}$.

Фізичні співвідношення запишемо у вигляді узагальненого закону Гука

$$\sigma_{ij}(\mathbf{u}, T) = a_{ijkl}(T) \varepsilon_{ks}^e(\mathbf{u}, T). \quad (1)$$

Тут $a_{ijkl}(T)$ – компоненти матриці пружних констант матеріалу \mathbf{A} при температурі T ; $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^e$ – пружна складова тензора деформацій, яку можна подати як різницю $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^e = \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} - \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{th}$, де $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$ – пластична складова, $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{th}$ – температурна складова. Для запису математичної моделі пластичності подамо співвідношення (1) у вигляді

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(\mathbf{u} + \delta \mathbf{u}, T + \delta T) &= \\ &= a_{ijkl}(T + \delta T) (\varepsilon_{ks}^e(\mathbf{u}, T) + \delta \varepsilon_{ks}(\mathbf{u} + \delta \mathbf{u}) - \\ &- \delta \varepsilon_{ks}^p(\mathbf{u} + \delta \mathbf{u}, T + \delta T) - \delta \varepsilon_{ks}^{th}(\mathbf{u}, T + \delta T)) = \\ &= a_{ijkl}(T + \delta T) ([\mathbf{A}^{-1}(T)]_{ksp} \sigma_{pt}(\mathbf{u}, T) + \delta \varepsilon_{ks}(\mathbf{u} + \delta \mathbf{u}) - \\ &- \delta \varepsilon_{ks}^p(\mathbf{u} + \delta \mathbf{u}, T + \delta T) - \delta \varepsilon_{ks}^{th}(\mathbf{u}, T + \delta T)), \end{aligned} \quad (2)$$

де $\delta \varepsilon_{ks}^{th}(\mathbf{u}, T + \delta T) = \delta_{ks} \alpha^{th} \delta T$ – приріст тензора деформації за рахунок зміни температурного поля від T до $T + \delta T$; α^{th} – коефіцієнт лінійного теплового розширення. Уведемо позначення

$$\sigma_{ij}^+(\mathbf{u}, T, \delta T) = a_{ijkl}(T + \delta T) ([\mathbf{A}^{-1}(T)]_{ksp} \sigma_{pt}(\mathbf{u}, T) - \delta \varepsilon_{ks}^{th}(\mathbf{u}, T + \delta T)).$$

Тоді (2) можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(\mathbf{u} + \delta \mathbf{u}, T + \delta T) &= \sigma_{ij}^+(\mathbf{u}, T, \delta T) + \\ &+ a_{ijkl}(T + \delta T) (\delta \varepsilon_{ks}(\mathbf{u} + \delta \mathbf{u}) - \delta \varepsilon_{ks}^p(\mathbf{u} + \delta \mathbf{u}, T + \delta T)). \end{aligned}$$

Нескінченно малий приріст пластичної складової тензора деформації визначається згідно з законом пластичного текучості

$$\begin{aligned} \delta \varepsilon_{ks}^p(\mathbf{u} + \delta \mathbf{u}, T + \delta T) &= \\ &= \begin{cases} \delta \lambda \frac{\partial F(\hat{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{u} + \delta \mathbf{u}, T + \delta T), T + \delta T)}{\partial \sigma_{ks}}, & \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij}^p > 0, \\ 0, & \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij}^p \leq 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (3)$$

Тут

$$F(\sigma, T) = \left(\frac{1}{2} [(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{11} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2] + 6\sigma_{12}^2 + 6\sigma_{13}^2 + 6\sigma_{23}^2 \right)^{1/2} - \sigma_*(T),$$

$\sigma_*(T)$ – межа текучості при температурі T . Рівняння $F(\sigma, T) = 0$ визначає поверхню пластичного текучості.

2. Лінеаризація задачі термопластичності. Весь процес навантаження розділимо на ряд достатньо малих етапів, кількість і тривалість яких дозволяє із необхідною точністю описати процес деформування як ряд послідовних рівноважних станів. Розв’язок задачі за часом будемо шукати у точках $0 < t_0 < t_1 < \dots < t_m < t_{m+1} < \dots < t_M = \tau$. Нехай задача теплопровід-

ності уже розв’язана [4], і відомий розподіл поля температури $T^{(m)}$ у моменти часу t_m . Припустимо далі, що розв’язана і задача про деформування тіла у момент часу t_m і в попередні моменти. Тоді у тілі, яке знаходиться у стані рівноваги, присутні переміщення точок $\mathbf{u}^{(m)}$, повні деформації $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(m)}$ і напруження $\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{(m)}$, які виникли під дією температурного поля $T^{(m)}$, масових сил $\mathbf{Q}^{(m)}$ і поверхневих навантажень $\boldsymbol{\sigma}_v^{(m)}$ на частині поверхні S_σ . Переміщення $\mathbf{u}^{(m)}$ також задовольняють головні крайові умови на частині поверхні S_u . Нехай далі за час $\Delta t_m = t_{m+1} - t_m$ на тіло подіяли додаткові масові сили $\mathbf{Q}^{(m)}$, поверхневі навантаження $\boldsymbol{\sigma}_v^{(m)}$ і точки тіла змінили свою температуру на $T^{(m)}$. Під дією цих факторів тіло змінило свою конфігурацію, у ньому виникли додаткові переміщення $\mathbf{u}^{(m)}$, деформації $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(m)}$ і напруження $\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{(m)}$.

Рівновагу тіла після довантаження будемо визначати, виходячи із принципу віртуальних робіт

$$\begin{aligned} \int_V (\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{(m)} + \boldsymbol{\sigma}^{(m)}) \delta \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^{(m)} dV &= \\ &= \int_V (\hat{Q}_i^{(m)} + Q_i^{(m)}) \delta u_i^{(m)} dV + \int_{S_\sigma} (\hat{\sigma}_{vi}^{(m)} + \sigma_{vi}^{(m)}) \delta u_i^{(m)} dS. \end{aligned} \quad (4)$$

Для визначення малих скінченних приростів пластичних деформацій використаємо метод проміжної точки [2, 13]. Суть цього методу полягає у тому, що при переході від нескінченно малих величин до скінченних приростів права частина (3) записується у деякій проміжній точці

$$\varepsilon_{ks}^{p(m)} = \lambda^{(m)} \frac{\partial F(\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{(m)} + \theta \hat{\boldsymbol{\sigma}}^{(m)}, \hat{T}^{(m)} + T^{(m)})}{\partial \sigma_{ks}}. \quad (5)$$

Доповнимо це співвідношення узагальненим законом Гука

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{ij}^{(m+1)} = \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{ij}^{+(m)} + \boldsymbol{\sigma}_{ij}^{(m)} = \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{ij}^{+(m)} + a_{ijkl} (\hat{T}^{(m)} + T^{(m)}) (\varepsilon_{ks}^{(m)}(\mathbf{u}^{(m)}) - \varepsilon_{ks}^{p(m)}), \quad (6)$$

де

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{ij}^{+(m)} = a_{ijkl} (\hat{T}^{(m)} + T^{(m)}) \left([\mathbf{A}^{-1}(\hat{T}^{(m)})]_{ksp} \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{pt}^{(m)} - \varepsilon_{ks}^{th}(\hat{T}^{(m)}) \right).$$

Для лінеаризації співвідношення (5) застосуємо метод Ньютона – Канторовича, суть якого полягає у послідовному наближенні розв'язку нелінійної задачі послідовністю лінійних задач. Нехай $\mathbf{u}^{(mq)}$, $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(mq)}$, $\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{(mq)}$ і $\lambda^{(mq)}$ – деякі наближення шуканих полів $\mathbf{u}^{(m)}$, $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(m)}$, $\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{(m)}$ і $\lambda^{(m)}$ на q -й ітерації. Тоді значення цих величин на $(q+1)$ -й ітерації запишемо як

$$\begin{aligned}\mathbf{u}^{(m,q+1)} &= \mathbf{u}^{(mq)} + \Delta\mathbf{u}^{(mq)}, & \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(m,q+1)} &= \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(mq)} + \Delta\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(mq)}, \\ \hat{\boldsymbol{\sigma}}^{(m,q+1)} &= \hat{\boldsymbol{\sigma}}^{(mq)} + \Delta\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{(mq)}, & \lambda^{(m,q+1)} &= \lambda^{(mq)} + \Delta\lambda^{(mq)},\end{aligned}\quad (7)$$

де $\Delta\mathbf{u}^{(mq)}$, $\Delta\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(mq)}$, $\Delta\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{(mq)}$, $\Delta\lambda^{(mq)}$ є величинами вищого порядку малості порівняно з $\mathbf{u}^{(mq)}$, $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(mq)}$, $\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{(mq)}$ і $\lambda^{(mq)}$ відповідно.

Підставивши (7) в (5) і (6), отримаємо

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ks}^{p(mq)} + \Delta\varepsilon_{ks}^{p(mq)} &= \\ &= (\lambda^{(mq)} + \Delta\lambda^{(mq)}) \frac{\partial F\left(\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{(m)} + \theta\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{(mq)} + \theta\Delta\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{(mq)}, \hat{T}^{(m)} + T^{(m)}\right)}{\partial\sigma_{ks}}, \\ \sigma_{ij}^{(mq)} + \Delta\sigma_{ij}^{(mq)} &= \sigma_{ij}^{(mq)} + a_{ijks}(\hat{T}^{(m)} + T^{(m)}) (\Delta\varepsilon_{ks}^{(mq)}(\Delta\mathbf{u}^{(mq)}) - \Delta\varepsilon_{ks}^{p(mq)}).\end{aligned}\quad (8)$$

Припустимо, що $\Delta\mathbf{u}^{(mq)}$ відоме. Розклавши $\frac{\partial F}{\partial\sigma_{ks}}$ у ряд Тейлора в околі

точки $(\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{(m)} + \theta\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{(mq)}, \hat{T}^{(m)} + T^{(m)})$ і залишивши тільки члени порядку $O(\Delta\mathbf{u})$, отримаємо

$$\begin{aligned}\Delta\varepsilon_{ks}^{p(mq)} &= -\varepsilon_{ks}^{p(mq)} + (\lambda^{(mq)} + \Delta\lambda^{(mq)}) \frac{\partial F\left(\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{(m)} + \theta\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{(mq)}, \hat{T}^{(m)} + T^{(m)}\right)}{\partial\sigma_{ks}} + \\ &+ \lambda^{(mq)} \frac{\partial^2 F\left(\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{(m)} + \theta\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{(mq)}, \hat{T}^{(m)} + T^{(m)}\right)}{\partial\sigma_{ks}\partial\sigma_{pt}} \theta\Delta\sigma_{pt}^{(mq)}.\end{aligned}$$

Тепер рівняння (8) можна подати так:

$$\begin{aligned}\Delta\sigma_{pt}^{(mq)} \left(\delta_{ip}\delta_{jt} + \theta a_{ijk}(\hat{T}^{(m)} + T^{(m)})\lambda^{(mq)} \frac{\partial^2 F\left(\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{(m)} + \theta\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{(mq)}, \hat{T}^{(m)} + T^{(m)}\right)}{\partial\sigma_{ks}\partial\sigma_{pt}} \right) &= \\ &= a_{ijk}(\hat{T}^{(m)} + T^{(m)}) \left(\Delta\varepsilon_{ks}^{(mq)}(\Delta\mathbf{u}^{(mq)}) + \varepsilon_{ks}^{p(mq)} - \right. \\ &\left. - (\lambda^{(mq)} + \Delta\lambda^{(mq)}) \frac{\partial F\left(\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{(m)} + \theta\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{(mq)}, \hat{T}^{(m)} + T^{(m)}\right)}{\partial\sigma_{ks}} \right).\end{aligned}\quad (9)$$

Підставивши $\Delta\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{(mq)}$ із (9) у рівняння поверхні текучості

$$F\left(\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{(m)} + \hat{\boldsymbol{\sigma}}^{(mq)} + \Delta\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{(mq)}, \hat{T}^{(m)} + T^{(m)}\right) = 0, \quad (10)$$

отримаємо нелінійне алгебраїчне рівняння для визначення $\Delta\lambda^{(mq)}$. Розв'яжемо це рівняння методом Ньютона. Після цього із (9) можна визначити $\Delta\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{(mq)}$. Для знаходження переміщення $\Delta\mathbf{u}^{(mq)}$ звернемося до варіаційного

рівняння (4). Перепишемо його наступним чином:

$$\int_V (\overset{\circ}{\sigma}_{ij}^{(m)} + \sigma_{ij}^{(mq)} + \Delta\sigma_{ij}^{(mq)}) \delta\varepsilon_{ij}^{(m)} dV = \int_V (\overset{\circ}{Q}_i^{(m)} + Q_i^{(mq)}) \delta u_i^{(m)} dV + \int_{S_\sigma} (\overset{\circ}{\sigma}_{vi}^{(m)} + \sigma_{vi}^{(mq)}) \delta u_i^{(m)} dS. \quad (11)$$

Повна лінеаризація варіаційного рівняння (11) ускладнюється необхідністю обчислення матриці дотичних жорсткостей на кожній ітерації. Тому скористаємося методом Ньютона – Рафсона, згідно з яким замінимо $\Delta\hat{\sigma}^{(mq)}$ на $\Delta\tilde{\sigma}^{(mq)}$, де

$$\Delta\tilde{\sigma}_{ij}^{(mq)} = a_{ijk} (\overset{\circ}{T}^{(m)} + T^{(mq)}) (\Delta\varepsilon_{ks}^{(mq)} (\Delta\mathbf{u}^{(mq)})).$$

У цьому випадку варіаційне рівняння (11) є рівнянням для знаходження $\Delta\mathbf{u}^{(mq)}$. Проте для переходу до наступної ітерації $\Delta\lambda^{(mq)}$ визначаємо із рівняння (10), а потім $\Delta\hat{\sigma}^{(mq)}$ – з рівняння (9). Далі, $\hat{\sigma}^{(m,q+1)} = \hat{\sigma}^{(mq)} + \Delta\hat{\sigma}^{(mq)}$ і можна здійснити ітерацію $q+1$. Ітерації припиняємо при виконанні умов

$\|\Delta\mathbf{u}^{(mq)}\|_2 \leq \beta \|\overset{\circ}{\mathbf{u}}^{(m)} + \mathbf{u}^{(mq)}\|_2$, де β – точність розв’язку задачі. У випадку, якщо ітераційний процес розбігається, необхідно повернутися до значень $\overset{\circ}{\mathbf{u}}^{(m)}$, $\overset{\circ}{\hat{\sigma}}^{(m)}$ і здійснювати довантаження дрібнішими кроками.

3. Схема методу скінченних елементів для розв’язування задач термопластичності. Для числового розв’язання лінеаризованої задачі побудуємо множину просторових скінченних елементів із комбінованими апроксимаціями. Припустимо, що зайнята товстостінним тілом область V має форму деякого околу базової поверхні Ω , яка віднесена до криволінійної ортонормованої системи координат α_1, α_2 . При цьому товщина тіла вираховується уздовж координати α_3 за напрямом нормалі до поверхні Ω . Бокова поверхня області V є лінійчатою поверхнею, яка складається із відрізків, напрямки яких визначаються величинами $\beta_1 = \text{ctg } \varphi_1$, $\beta_2 = \text{ctg } \varphi_2$. Тут φ_1, φ_2 – кути нахилу відрізків бокової поверхні у напрямках α_1, α_2 – ліній на Ω .

Розіб’ємо область Ω на криволінійні чотирикутники Ω_e , $e = 1, \dots, N$, кожен із яких визначений за допомогою восьми вузлових точок у вершинах і на його сторонах. Зауважимо, що значення величин β_1, β_2 на бокових поверхнях об’єму V визначаються однозначно, виходячи із форми зрізу товстостінного тіла. Всередині тіла ці значення потрібно доозначити таким чином, щоб отримані при цьому просторові елементи не обмежувались поверхнями, які перетинаються під дуже гострими кутами. Внаслідок цього об’єм V розрізається на шестигранники V_e (рис. 1).

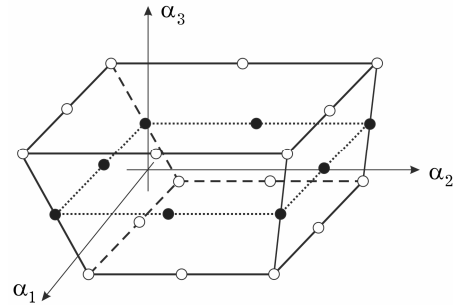


Рис. 1

Розіб’ємо кожний із таких шестигранників на L частин за товщиною тіла. Отримаємо множину скінченних елементів $V_{e\ell}$, $e = 1, \dots, N$, $\ell = 1, \dots, L$. Відобразимо внутрішність куба $\Xi = \{(\xi_1, \xi_2, \xi_3) : -1 \leq \xi_i \leq 1, i = 1, 2, 3\}$ на область $V_{e\ell}$ за допомогою перетворення

$$\alpha_p(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \sum_{\substack{k_1, k_2 = -1, 0, 1 \\ k_1^2 + k_2^2 \neq 0}} \alpha_{pk_1k_2\ell-1} \Phi_{k_1k_2}^\circ(\xi_1, \xi_2) \frac{1 - \xi_3}{2} + \\ + \sum_{\substack{k_1, k_2 = -1, 0, 1 \\ k_1^2 + k_2^2 \neq 0}} \alpha_{pk_1k_2\ell} \Phi_{k_1k_2}^\circ(\xi_1, \xi_2) \frac{1 + \xi_3}{2},$$

де $\alpha_{pk_1k_2\ell-1}$ і $\alpha_{pk_1k_2\ell}$ – значення координати α_p , $p = 1, 2$, на нижній і верхній поверхнях скінченного елемента $V_{e\ell}$. При цьому

$$\alpha_{pk_1k_2k_3} = \alpha_{pk_1k_2}^\circ - \beta_{pk_1k_2} \alpha_{3k_1k_2k_3}, \quad k_3 = \ell - 1, \ell, \\ \alpha_{3k_1k_20} < \alpha_{3k_1k_21} < \dots < \alpha_{3k_1k_2\ell-1} < \alpha_{3k_1k_2\ell} < \dots < \alpha_{3k_1k_2L}.$$

Тут $(\alpha_{1k_1k_2}^\circ, \alpha_{2k_1k_2}^\circ)$ – координати вузла (k_1, k_2) криволінійного чотирикутника Ω_e на базовій поверхні; $\Phi_{k_1k_2}^\circ(\xi_1, \xi_2)$ – біквдратичні базові функції

$$\Phi_{k_1k_2}^\circ = -\frac{1}{4}(1 + k_1\xi_1)(1 + k_2\xi_2)(1 - k_1\xi_1 - k_2\xi_2), \quad k_1, k_2 = -1, 1, \\ \Phi_{0k_2}^\circ = \frac{1}{2}(1 - \xi_1^2)(1 + k_2\xi_2), \quad k_2 = -1, 1, \\ \Phi_{k_10}^\circ = \frac{1}{2}(1 + k_1\xi_1)(1 - \xi_2^2), \quad k_1 = -1, 1,$$

$\beta_{pk_1k_2}$ – котангенс кута нахилу деякої прямої, яка проходить через точку $(\alpha_{1k_1k_2}^\circ, \alpha_{2k_1k_2}^\circ)$ до p -ї координатної лінії на базовій поверхні. Отримаємо просторові скінченні елементи, на краях яких вибрано 16 вузлових точок. Зазначимо, що, на відміну від геометрії базової поверхні, яка задається аналітичним шляхом, геометрія лицевих поверхонь тіла зі змінною товщиною моделюється деякими поверхнями другого порядку. Проте ця апроксимація побудована у криволінійній системі координат. Тому вона не породжує суттєвих похибок. Запропонована методика побудови скінченно-елементної сітки, по-перше, дозволяє врахувати скісні зрізи тіла, які не враховуються при застосуванні гіпотез теорії оболонок. По-друге, при такій побудові сітки усі вузлові значення шуканих функцій асоціюються із вузлом на базовій поверхні, що дозволяє просто вирішувати проблему ідентифікації просторових скінченних елементів.

Компоненти $u_p^{(m)}$ вектора переміщень $\mathbf{u}^{(m)}$ на елементі $V_{e\ell}$ подамо у вигляді

$$u_p^{(m)}(\boldsymbol{\alpha}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)) = \sum_{\substack{k_1, k_2 = -1, 0, 1 \\ k_1^2 + k_2^2 \neq 0}} q_{pk_1k_2\ell-1}^{e(m)} \Phi_{k_1k_2}^\circ(\xi_1, \xi_2) \frac{1 - \xi_3}{2} + \\ + \sum_{\substack{k_1, k_2 = -1, 0, 1 \\ k_1^2 + k_2^2 \neq 0}} q_{pk_1k_2\ell}^{e(m)} \Phi_{k_1k_2}^\circ(\xi_1, \xi_2) \frac{1 + \xi_3}{2}.$$

Тут $u_{p,k_1k_2\ell}^{e(m)}$ – значення функції $u_p^{(m)}$ у вузлових точках елемента $V_{e\ell}$. У такому ж вигляді подамо і шукані функції:

$$\Delta u_p^{(m)}(\boldsymbol{\alpha}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)) = \\ = \sum_{\substack{k_1, k_2 = -1, 0, 1 \\ k_1^2 + k_2^2 \neq 0}} q_{pk_1k_2\ell-1}^{e(m)} \Phi_{k_1k_2}^\circ(\xi_1, \xi_2) \frac{1 - \xi_3}{2} +$$

$$+ \sum_{\substack{k_1, k_2 = -1, 0, 1 \\ k_1^2 + k_2^2 \neq 0}} q_{pk_1k_2\ell}^{e(m)} \Phi_{k_1k_2}^\circ(\xi_1, \xi_2) \frac{1 + \xi_3}{2},$$

де $q_{p,k_1k_2\ell}^{e(m)}$ – невідомі значення функції $\Delta u_p^{(m)}$ у вузлових точках елемента V_{el} . Апроксимації для функцій $u_p^{(m)}$ і $\delta u_p^{(m)}$ підставимо у варіаційне рівняння (11) та отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення вузлових значень $q_{p,k_1k_2\ell}^{e(m)}$.

4. Числові результати. Дослідимо напружено-деформований стан тіла обертання, яке складається із двох частин, геометрія яких описується радіус-векторами

$$\mathbf{R}^{(1)} = \begin{bmatrix} (0.3 + \alpha_3) \cos \alpha_2 \\ (0.3 + \alpha_3) \sin \alpha_2 \\ -\alpha_1 \end{bmatrix}, \quad \begin{cases} -0.015 \leq \alpha_3 \leq 0.015, \\ 0 \leq \alpha_2 < 2\pi, \\ -0.065 \leq \alpha_1 \leq -\alpha_3, \end{cases}$$

$$\mathbf{R}^{(2)} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \cos \alpha_2 \\ \alpha_1 \sin \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}, \quad \begin{cases} -0.015 \leq \alpha_3 \leq 0.015, \\ 0 \leq \alpha_2 < 2\pi, \\ 0.3 + \alpha_3 \leq \alpha_1 \leq 0.365. \end{cases}$$

На рис. 2 зображено частини тіла в локальних координатах.

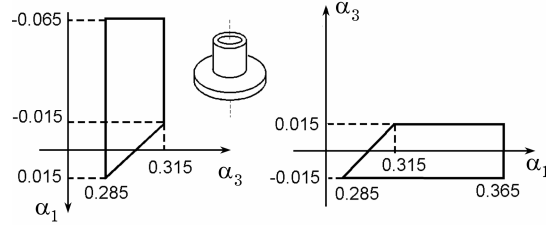


Рис. 2

Механічні і теплофізичні характеристики матеріалу є такими:

- модуль пружності $E = (98066.5(2.14 - 0.000871 \cdot T))$ [МПа];
- коефіцієнт Пуассона $\mu = 7.57 \cdot 10^{-5} \cdot T + 0.289$;
- межа текучості

$$\sigma_* = \begin{cases} (180 - 0.2 \cdot T) \text{ [МПа]}, & 73 \leq T < 603, \\ (114 - 0.8(T - 603)) \text{ [МПа]}, & 603 \leq T < 693, \\ (42 - 0.2(T - 693)) \text{ [МПа]}, & 693 \leq T \leq 873, \end{cases} \quad (12)$$

- коефіцієнт лінійного температурного розширення

$$\alpha = \left(11.9 + \frac{5}{1200} T \right) \cdot 10^{-6} \text{ [K}^{-1}\text{]};$$

- густина маси тіла $\rho = 7860 \text{ кг/м}^3$;
- теплоємність одиниці маси матеріалу при незмінному об'ємі $c_v = (0.251046 \cdot (T - 373) + 468.619) \text{ [Дж/(кг} \cdot \text{K)]}$;
- коефіцієнт теплопровідності $\lambda = (-0.04742(T - 373) + 65.7835) \text{ [Дж/м} \cdot \text{K} \cdot \text{с]}$;
- коефіцієнт теплообміну на поверхні S $\alpha = 800 \text{ Дж/(м}^2 \cdot \text{K} \cdot \text{с)}$.

Припустимо, що у початковий момент часу тіло знаходиться у стані рівноваги і у ньому відсутні переміщення, деформації і напруження. Температура тіла однакова для всіх точок і становить $T|_{t=0} = 273 \text{ K}$. На межі $\Gamma^{(1)} = \mathbf{R}^{(1)}(-0.065, \alpha_2, \alpha_3)$, $0 \leq \alpha_3 < 2\pi$, $-0.015 \leq \alpha_3 \leq 0.015$, тіло закріплене таким чином, що не допускаються переміщення уздовж α_1 . Крім того, тіло є вільним від силових навантажень.

Нехай нижня лицева поверхня тіла $\alpha_3 = -0.015$ знаходиться в умовах конвективного теплообміну із зовнішнім середовищем, температура якого становить $T|_{\text{sur}} = 873 \text{ К}$. Інші поверхні тіла теплоізолювані. Така задача є осесиметричною за координатою α_2 . Для її числового розв'язання побудуємо $N = 32$ скінченних елементи за α_1 , $L = 64$ елементи – за α_3 і задамо крок за часом $\Delta t = 0.05 \text{ с}$. Параметр проміжної точки $\theta = 0.5$.

На рис. 3 зображено процес поширення зони пластичної деформації в часі від $t = 25.60 \text{ с}$ до $t = 140 \text{ с}$.

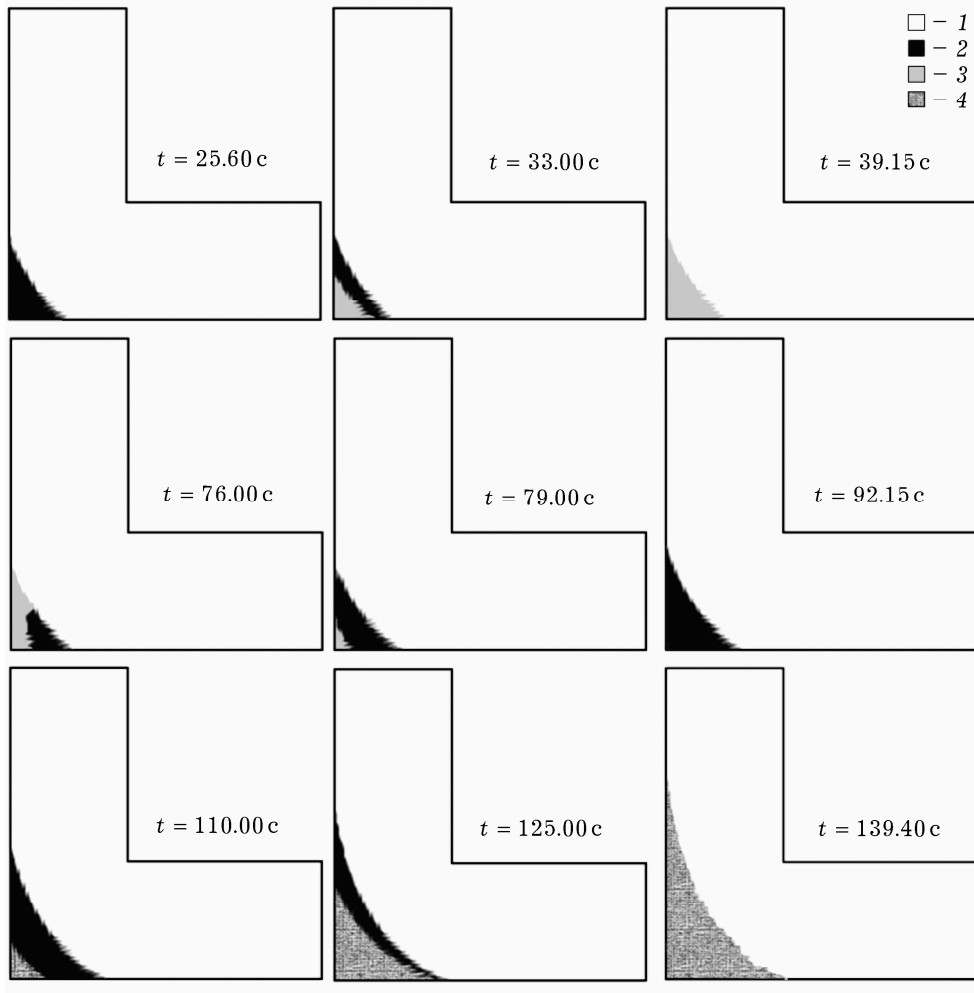


Рис. 3

Тут 1 – пружна зона; 2 – зона виникнення пластичних деформацій; 3 – зона первинного розвантаження; 4 – зона вторинного розвантаження. До моменту $t = 25.6 \text{ с}$ у тілі виникає зона пластичності завдяки збільшенню значень колових напружень σ_{22} (інші напруження при цьому є незначними). У наступні моменти часу градієнт температурного прогріву за товщиною зменшується і внаслідок цього у тілі починається розвантаження (зона 3). Подальше зростання температури призводить до того, що значення межі текучості зменшується і в тілі з моменту $t = 71.4 \text{ с}$ виникають вторинні пластичні деформації. Із моменту $t = 92.15 \text{ с}$ починається фаза вторинного розвантаження (зона 4) і продовжується до моменту $t = 139.40 \text{ с}$. У подальшому процес виходить на стаціонарний режим. При цьому всі точки тіла покидають поверхню пластичності.

На рис. 4 наведено розподіл інтенсивності пластичних деформацій ε_{int} за часом у кутовій точці $\mathbf{R}^{(2)}(0.28566, 0.0, -0.01490)$.

Крива 1 відповідає випадку, коли величина межі текучості постійна і становить $\sigma_* = 180$ МПа. Залежність інших механічних і теплофізичних характеристик матеріалу від температури при цьому зберігається. Крива 2 зображає результат у випадку залежності межі текучості від температури у вигляді (12). Як видно з рисунка, з моменту часу $t = 20.0$ с спостерігається суттєва різниця між двома моделями. У момент часу $t = 92.15$ с вторинна зона пластичності доходить до кутової точки, і значення нагромадженої інтенсивності пластичних деформацій на кривій 2 трохи збільшується до моменту $t = 100$ с. Надалі з кутової точки починається вторинне розвантаження, і тому значення інтенсивності пластичних деформацій у цій точці більше не змінюється.

На рис. 5 зображено кільцеві напруження σ_{22} уздовж лінії спряження частин тіла у випадку моделі з урахуванням залежності межі текучості від температури

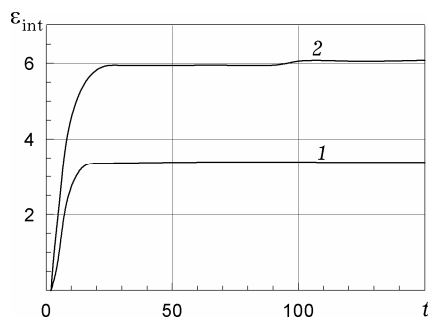


Рис. 4

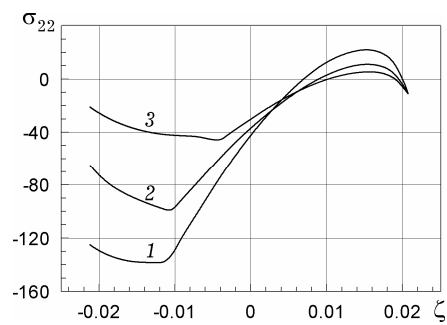


Рис. 5

Координата $\zeta = \sqrt{2} \alpha_3$ визначає положення точок на цій лінії. Криві 1–3 відповідають розподілу напружень σ_{22} у моменти часу $t = 33, 79, 125$ с відповідно. Максимальні значення напружень становлять: $\sigma_{22} = -138.02$ МПа у момент $t = 33$ с; $\sigma_{22} = -99.19$ МПа в момент $t = 79$ с; $\sigma_{22} = -45.91$ МПа в момент $t = 125$ с. Зауважимо, що у процесі прогріву тіла значення максимального кільцевого напруження зменшується і прямує до деякого стаціонарного значення.

1. Галишин А. З. Расчет осесимметричного термоупруго-пластического напряженно-деформированного состояния оболочек вращения с разветвленным меридианом // Прикл. механика. – 1984. – **20**, № 1. – С. 66–71.
2. Кисиль Р. И., Муха И. С. Безусловно устойчивые численные схемы для решения задач нелинейного деформирования твердых тел // Прикл. механика. – 1996. – **32**, № 6. – С. 66–73.
3. Лелюх Ю. И., Шевченко Ю. Н. О конечно-элементном решении пространственных задач термовязкоупругопластичности // Прикл. механика. – 2006. – **42**, № 5. – С. 16–25.
4. Неспляк Д. М., Муха І. С. Дослідження процесів нелінійної теплопровідності у товстостінних складених тілах // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2007. – **50**, № 2. – С. 176–182.
5. Савченко В. Г., Шевченко Ю. Н. Пространственные задачи термовязкопластичности // Прикл. механика. – 2000. – **36**, № 11. – С. 3–38.
6. Шевченко Ю. Н. Термопластичность при переменных нагружениях. – Киев: Наук. думка, 1970. – 288 с.
7. Шевченко Ю. Н., Бабешко М. Е., Пискун В. В., Прохоренко И. В., Савченко В. Г. Решение осесимметричной задачи термопластичности для тонкостенных и толстостенных тел вращения на ЕС ЭВМ. – Киев: Наук. думка, 1980. – 196 с.

8. Шевченко Ю. Н., Бабешко М. Е., Пискун В. В., Прохоренко И. В., Савченко В. Г., Стрюк В. К., Терехов Р. Г. Решение осесимметричных задач термопластичности на ЭЦВМ // Прикл. проблемы прочности и пластичности. – 1975. – Вып. 1. – С. 67–76.
9. Шевченко Ю. Н., Бабешко М. Е., Пискун В. В., Савченко В. Г. Пространственные задачи термопластичности. – Киев: Наук. думка, 1980. – 264 с.
10. Kassiotis Ch., Ibrahimbegovic A., Matthies H. G., Brank B. Stable splitting scheme for general form of associated plasticity including different scales of place and time // Comput. Meth. Appl. Mech. Eng. – 2010. – **199**, No. 21-22. – P. 1254–1264.
11. Lelyukh Yu. I. Analyzing methods to allow for the damage of material in thermo-viscoelastoplastic deformation // Int. Appl. Mech. – 2007. – **43**, No. 12. – P. 1396–1405.
 Те саме: Лелюх Ю. И. Анализ методов учета повреждаемости материала при термовязкоупругопластическом деформировании // Прикл. механика. – 2007. – **43**, № 12. – С. 110–121.
12. Savchenko V. G. A method to study the nonaxisymmetric plastic deformation of solids of revolution with allowance for the stress mode // Int. Appl. Mech. – 2008. – **44**, No. 9. – P. 975–981.
 Те саме: Савченко В. Г. Метод исследования неосесимметричного неупругого деформирования тел вращения с учетом вида напряженного состояния // Прикл. механика. – 2008. – **44**, № 9. – С. 26–35.
13. Simo J. C., Taylor R. K. Consistent tangent operators for rate-independent elastoplasticity // Comput. Meth. Appl. Mech. Eng. – 1985. – **48**. – P. 101–118.

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ТЕРМОПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ТЕЛ С УЧЕТОМ РАЗГРУЗКИ

Исследовано термоупругопластическое состояние изотропной однородной среды под действием температурных нагрузок. Рассмотрена математическая модель пластического течения. Предложена методика построения безусловно устойчивой численной схемы метода конечных элементов для решения таких задач. Показан процесс распространения первичной и вторичной зон разгрузки в теле. Приведено распределение интенсивности пластической деформации в угловой точке тела во времени. Исследованы результаты, полученные без учета зависимости предела текучести от температуры и с учетом такой зависимости.

NUMERICAL ANALYSIS OF PROCESSES OF THERMOPLASTIC DEFORMATION OF AXISYMMETRIC BODIES WITH REGARD FOR UNLOADING

The thermoelastoplastic state of isotropic homogeneous solid under thermal loading is analyzed. A mathematical model of yielding flow is studied. The procedure of construction of unconditionally stable numerical scheme of FEM to solve such problems is proposed. The process of the primary and secondary unloading zones propagation in the body is shown. The time distribution of plastic strain intensity at the angular point of the body is presented. The results obtained neglecting dependence of the yield function on temperature and accounting such dependence are studied.

Львів. нац. ун-т ім. Івана Франка, Львів

Одержано
19.01.10