

ПОЧАТКОВА СТАДІЯ ПЛАСТИЧНОГО ВІДШАРОВУВАННЯ ПРЯМОКУТНОГО ВКЛЮЧЕННЯ ЗА УМОВИ ОДНОБІЧНОГО КОНТАКТУ З СЕРЕДОВИЩЕМ

Досліджено початкову стадію квазістатичного розвитку пластичних деформацій в околі вершин жорсткого прямокутного включення, одна пара граней якого не контактує із середовищем. Деформація зумовлена зсувними зусиллями, діючими на нескінченності паралельно до цієї пари граней включення. Досліджено випадки пластичних деформацій, локалізованих у смугах, що розвиваються від вершин включення, і континуально розподілених. Отримано характеристики пластичних зон для навантажень, набагато менших від границі текучості.

Дослідження напружено-деформованого стану в околі включень скінченних розмірів необхідне для вивчення закономірностей деформування елементів конструкцій. Воно важливе для механіки руйнування як доповнення теорії тонких включень [1, 7, 8] та механіки композиційних матеріалів [9]. Необхідно також враховувати майже неминучу наявність недосконалостей контакту включення з середовищем в результаті експлуатаційного чи технологічного процесів. Крім того, на відміну від тіла з вирізами, у тілі з включенням концентрацію напружень зумовлюють не лише кутові точки, а й точки, у яких контакт з середовищем зазнає якісних змін. Досліджуючи напружено-деформований стан тіла з включенням, слід передбачати можливість зміни його контакту з середовищем у процесі навантаження і, перш за все, появи та розвитку міжфазного пластичного відшарування.

Задачі дослідження напружено-деформованого стану тіла з включеннями, що допускають його пластичне відшарування, залишаються досі недостатньо вивченими [6].

Дослідимо пластичне відшарування за умов антиплоскої деформації жорсткого прямокутного включення $-a \leq x \leq a$, $-b \leq y \leq b$, $-\infty \leq z \leq +\infty$ у безмежному ідеально пружно-пластичному середовищі. Розглянемо випадок неповного механічного контакту середовища і включення. Нехай до навантаження вертикальні грані $x = \pm a$, $-b \leq y \leq b$, $-\infty \leq z \leq +\infty$ включення перебували у ідеальному контакті з середовищем, а горизонтальні грані $-a \leq x \leq a$, $y = \pm b$, $-\infty \leq z \leq +\infty$ взагалі не контактували. Середовище деформується під впливом квазістатично монотонно зростаючого зсувного навантаження $\tau_{xz} = 0$, $\tau_{yz} = \tau_\infty$, що діє на нескінченності, паралельно до вільних від напружень граней призми. Прикладене навантаження вважатимемо достатньо малим і для аналізу розвитку пластичних деформацій скористаємося лінійною моделлю пластичної зони (ЛМПЗ) [5].

Розглянемо дві можливі схеми розвитку пластичних деформацій: локалізованих у смугах, що виходять з вершин включення, і континуальну – з неперервним розподілом в околі вершин включення.

Тонкосмугова схема розвитку пластичних деформацій передбачає вибір припущення про кількість смуг та їх взаємне розміщення [4]. Приймемо, що від кожної вершини розвиваються по дві пластичні смуги: вертикальна довжини d_1 , яка призводить до проковзування середовища по поверхні включення, і навскісна довжини

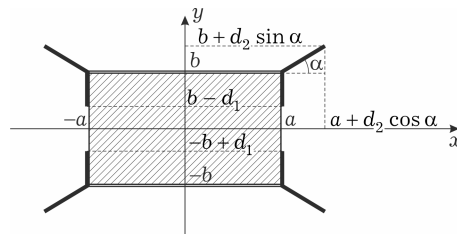


Рис. 1. Схема задачі

d_2 , яка утворює кут $\pi - \alpha$ з вільною від напружень гранню включення (див. рис. 1; потовщені лінії – це пластичні смуги).

Згідно з ЛМПЗ наближене розв'язання пружно-пластичної задачі для тіла з гострокінцевим концентратором напружень включає такі етапи.

1°. Розв'язати задачу в пружній постановці і визначити залежну від навантаження і геометричних параметрів концентратора асимптотику напружень в околі його вершини.

2°. Розв'язати відповідні допоміжні задачі, що не містять параметрів з розмірністю довжини, у пружній і пружно-пластичній постановках.

3°. Узгодити пружні розв'язки основної і допоміжної задач, забезпечуючи асимптотичну еквівалентність напружень в околі вершини концентратора. Узгодити пружний та пружно-пластичний розв'язки допоміжних задач, забезпечуючи асимптотичну еквівалентність напружень на нескінченності.

За наближений розв'язок основної пружно-пластичної задачі приймають розв'язок допоміжної пружно-пластичної задачі, узгоджений з її пружним розв'язком, який, у свою чергу, узгоджений з пружним розв'язком основної задачі.

Дослідження розвитку пластичних деформацій на основі ЛМПЗ потребує розв'язку пружної задачі.

Пружна задача. Наведемо постановку задачі у напруженнях. У зв'язку з симетрією задачі переміщення $w(x, y)$ є парною функцією за першим і непарною – за другим аргументом, тому його достатньо визначати в першому квадранті поза включенням (область $\mathcal{D} = \{x, y \mid (x > a \wedge y > 0) \vee (x > 0 \wedge y > b)\}$). В області \mathcal{D} тіло перебуває в пружному стані, а утворена компонентами тензора напружень функція

$$\tau^{(e)}(\zeta) = \tau_{yz}(x, y) + i\tau_{xz}(x, y), \quad \zeta = x + iy,$$

є аналітичною і задовольняє на межі області \mathcal{D} такі крайові умови:

$$\operatorname{Im} \tau^{(e)}(\zeta) = 0, \quad \zeta = iy, \quad y > b,$$

$$\operatorname{Re} \tau^{(e)}(\zeta) = 0, \quad \zeta = x + ib, \quad 0 \leq x < a,$$

$$\operatorname{Im} \tau^{(e)}(\zeta) = 0, \quad \zeta = a + iy, \quad 0 \leq y < b,$$

$$\operatorname{Im} \tau^{(e)}(\zeta) = 0, \quad \zeta = x, \quad x > a,$$

$$\lim_{\zeta \rightarrow \infty} \tau^{(e)}(\zeta) = \tau_{\infty}. \quad (1)$$

Рівності (1) послідовно виражають: симетричність переміщення відносно осі ординат; відсутність механічного контакту вздовж горизонтальних граней включення; відсутність переміщення на частині вертикальних граней включення; антисиметричність переміщення відносно осі абсцис; величину діючого навантаження.

Функція $\tau^{(e)}(\zeta)$ є однолистою в області \mathcal{D} і внаслідок співвідношень (1) точки границі цієї області відображаються в точки дійсної або уявної осей комплексної площини $\tau = \tau_{yz} + i\tau_{xz}$. Тому (1) зводиться до задачі конформного відображення. Тут, однак, слід зробити суттєве зауваження щодо образу області \mathcal{D} . З умов (1) випливає, що образи усіх кутових точок (див. рис. 2) A ($\zeta = \infty$), B ($\zeta = ib$), C ($\zeta = a + ib$), D ($\zeta = a$) області \mathcal{D} відомі. У результаті образи ділянок AB , BC , CD , DA не можуть бути прямолінійними, оскільки це суперечило би теоремі існування і єдиності конформного відображення [2]. Отже, не на кожній з прямолінійних ділянок границі області \mathcal{D} напруження змінюються монотонно. Можна показати, що напру-

ження $\tau_{yz}(x, 0)$, $x \in (a, +\infty)$, є немонотонним і приймає у деякій точці $x_0 \in (a, +\infty)$ максимальне значення, яке позначимо через τ_0 .

Функція $\tau^{(e)}(\zeta)$ реалізує конформне відображення області \mathcal{D} площини ζ на область \mathcal{G} площини τ (рис. 2).

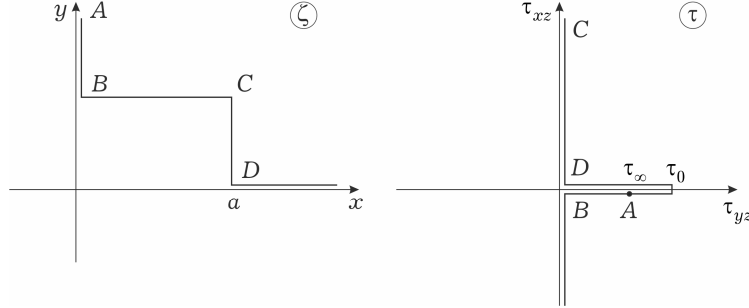


Рис. 2. Області конформного відображення

За певної довжини τ_0 розрізу існуватиме єдине відображення $\tau^{(e)}(\zeta)$, для якого чотири пари точок на межах областей \mathcal{D} і \mathcal{G} фіксовані, а функція $\tau^{(e)}(\zeta)$ задовольнятиме умови (1).

Шукатимемо відображення $\tau^{(e)}(\zeta)$ у параметричній формі:

$$\tau = \tau^{(e)}(t), \quad \zeta = \zeta(t) \quad t \in \mathcal{H}, \quad (2)$$

де t – допоміжна комплексна площина, а область \mathcal{H} – її верхня половина, визначатиме шукане відображення $\tau^{(e)}(\zeta)$.

Зафіксуємо точки A , B і C на межі області \mathcal{H} так, як показано на рис. 3.

Функцію $\zeta = \zeta(t)$ знайдемо за допомогою перетворення Крістоффеля – Шварца:

$$\zeta = ib + \frac{a}{\int_0^1 |F_{\zeta^{(e)}}(\eta)| d\eta} \int_0^t F_{\zeta^{(e)}}(\eta) d\eta, \quad (3)$$

де

$$F_{\zeta^{(e)}}(t) = t^{-1/2}(t-1)^{1/2}(t-t_D)^{-1/2},$$

$t_D > 1$ – дійсний параметр, вибором якого забезпечуємо потрібне співвідношення довжин R_{BC} і R_{CD} сторін BC і CD фігури \mathcal{D} . Тут і далі під $(t-p)^q$, де p, q – дійсні числа, причому $|q| < 1$, розуміємо аналітичну у верхній півплощині функцію, що приймає дійсні додатні значення для дійсних $t > p$.

Значення параметра t_D визначаємо як розв’язок рівняння

$$b \int_0^1 |F_{\zeta^{(e)}}(\eta)| d\eta = a \int_1^{t_D} |F_{\zeta^{(e)}}(\eta)| d\eta, \quad (4)$$

який знаходимо методом послідовних наближень:

$$t_D^{(j)} = t_D^{(j-1)} + 0.01 \frac{\frac{b}{a}(R_{BC})^{(j-1)} - (R_{CD})^{(j-1)}}{\frac{b}{a}(R_{CD})^{(j-1)}}, \quad j = 1, 2, \dots, \quad t_D^{(0)} = 1.25. \quad (5)$$

Тут $t_D^{(j)}$ – j -те наближення шуканої величини і

$$(R_{BC})^{(j)} = \int_1^{t_D^{(j)}} |F_{\zeta^{(e)}}^{(j)}(\eta)| d\eta, \quad (R_{CD})^{(j)} = \int_0^1 |F_{\zeta^{(e)}}^{(j)}(\eta)| d\eta.$$

Функції $F_{\zeta^{(e)}}^{(j)}(\eta)$ відрізняються від $F_{\zeta^{(e)}}(\eta)$ лише заміною t_D на $t_D^{(j)}$.

Друге з відображень (2) $\tau = \tau(t)$ знаходимо як композицію елементарних функцій:

$$\tau^{(e)} = \frac{\sqrt{t} \sqrt{\tau_\infty^2 t - 2\tau_0^2 + 2\tau_0 \sqrt{\tau_0^2 - \tau_\infty^2}}}{t - 1}, \quad (6)$$

$$t = \frac{\sqrt{\tau_0^2 - (\tau^{(e)})^2} - \tau_0}{\sqrt{\tau_0^2 - (\tau^{(e)})^2} - \sqrt{\tau_0^2 - \tau_\infty^2}}, \quad (7)$$

$$\text{де } \tau_0 = \tau_\infty \frac{t_D}{\sqrt{t_D^2 - 1}}.$$

З формули (6) впливає асимптотична рівність при $t \rightarrow 1$:

$$\tau^{(e)} = \frac{\tau_\infty}{t - 1} \sqrt{\frac{t_D - 1}{t_D + 1}} + o\left(\frac{1}{t - 1}\right). \quad (8)$$

Щоб отримати формулу для асимптотики напружень в околі вершини включення, необхідно дослідити при $t \rightarrow 1$ також функцію $\zeta(t)$.

З рівності (3) знаходимо

$$\zeta = a + ib + \frac{2a}{3\sqrt{t_D}} \int_0^1 |F_{\zeta^{(e)}}(\eta)| d\eta + o((t - 1)^{3/2}). \quad (9)$$

Виразивши з цієї рівності $t - 1$ через $\zeta - a - ib$, отримуємо

$$\tau^{(e)} = -\tau_\infty \left(\frac{3\sqrt{t_D}}{2a} \int_0^1 |F_{\zeta^{(e)}}(\eta)| d\eta \right)^{-2/3} \sqrt{\frac{t_D - 1}{t_D + 1}} e^{i\pi/6} (\zeta - a - ib)^{-2/3} + o((\zeta - a - ib)^{-2/3}) \quad (10)$$

при $\zeta \rightarrow a + ib$.

Формула (10) виражає асимптотику пружних напружень в околі вершини прямокутного включення і враховує його розміри.

Дослідження відшарування включення за умов локалізації пластичних деформацій. Для дослідження пластичних зон на початковій стадії розвитку на основі ЛМПЗ слід розв'язати допоміжну пружно-пластичну задачу, яка не містить параметрів з розмірністю довжини. Для цього випадку відповідною є задача для включення, яке у площині Oxy займає третій квадрант та не контактує з середовищем уздовж від'ємної півосі абсцис. Деформування середовища відбувається під впливом діючих на нескінченності нескінченно малих напружень. Від вершини включення розвиваються дві пластичні смуги: вертикальна довжини d_1 на межі включення – середовище і навкісна довжини d_2 під кутом α до осі абсцис (рис. 4).

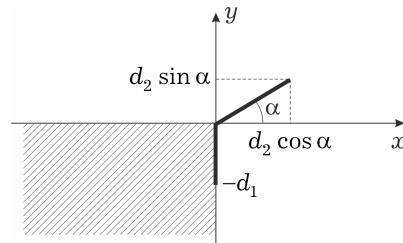


Рис. 4. Пластичні смуги допоміжної задачі

Утворена компонентами тензора напружень функція

$$\tau_1(\zeta) = \tau_{yz}(x, y) + i\tau_{xz}(x, y), \quad \zeta = x + iy,$$

є аналітичною у частині комплексної площини ζ без третього квадранта і відрізка, що з'єднує точки $(0, 0)$ та $(d_2 \cos \alpha, d_2 \sin \alpha)$ (область \mathcal{D}_1).

Запишемо крайову задачу для функції $\tau_1(\zeta)$, $\zeta \in \mathcal{D}_1$:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \tau_1(\zeta) &= 0, & \zeta &= x, & -\infty < x < 0, \\ |\tau_1(\zeta)| &= k, & \zeta &= \rho e^{i\varphi}, & 0 < \rho < d_2, & \varphi = \alpha \pm 0, \\ \arg \tau_1(d_2 e^{i\alpha}) &= -\alpha, \\ |\tau_1(\zeta)| &= k, & \zeta &= iy, & -d_1 < y < 0, \\ \operatorname{Re} \tau_1(\zeta) &= 0, & \zeta &= iy, & -\infty < x \leq -d_1, \end{aligned} \quad (11)$$

де k – зсувна границя текучості матеріалу матриці. Друга та четверта з рівностей (11) є умовами пластичності, третя рівність є умовою прямолінійності розвитку навскісної смуги [4], решта – аналогічні відповідним для пружної задачі (1).

Як і в пружній задачі для функції $\tau_1(\zeta)$, усі умови на межі її області аналітичності відомі. Тому сформульована задача зводиться до задачі конформного відображення області \mathcal{D}_1 площини ζ на півкруг $|\tau| < k$, $\operatorname{Re} \tau > 0$ (область \mathcal{G}_1) площини τ (рис. 5).

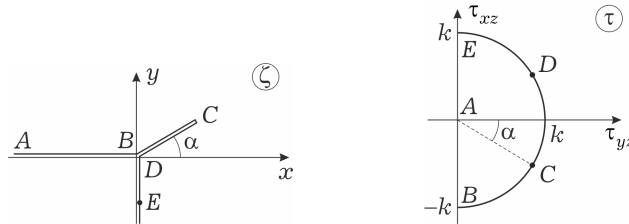


Рис. 5. Области конформного відображення

Зауважимо, що для наведеного на рис. 5 відображення тільки дві пари точок A і B на межах областей \mathcal{D}_1 і \mathcal{G}_1 фіксовані. Оскільки довжини смуг d_1 та d_2 невідомі, координати точок C та E у площині ζ невизначені. Отже, для довільного кута $\alpha \in [0, \pi/2]$ існує однопараметрична множина відображень $\tau_1(\zeta)$. Тому навскісна смуга може розвиватися у довільному напрямку. Навантаження тепер задаватимемо асимптотикою напружень на нескінченності.

Відображення $\tau_1(\zeta)$ зручно будувати в параметричній формі:

$$\tau = \tau_1(t), \quad \zeta = \zeta_1(t), \quad t \in \mathcal{H}.$$

Виберемо на межі області \mathcal{H} координати точок A , B і D так, як наведено на рис. 6.

Функцію конформного відображення \mathcal{H} на \mathcal{D}_1 шукаємо за допомогою перетворення Крістоффеля – Шварца:

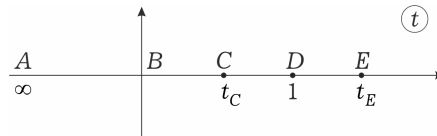


Рис. 6. Допоміжна комплексна площина

$$\zeta_1(t) = -i\mathcal{A} \left(\int_0^t F_{\zeta_1}(\eta) d\eta \right)^{3/4}, \quad (12)$$

де

$$F_{\zeta_1}(\eta) = \eta^{(\pi-4\alpha)/(3\pi)}(\eta - t_C)(\eta - 1)^{(4\alpha-\pi)/(3\pi)},$$

\mathcal{A} – довільний додатний параметр розмірності довжини, через який задаємо діюче на нескінченності навантаження.

Параметр t_C визначаємо з рівняння, яке забезпечує рівність берегів розрізу в області \mathcal{D}_1 :

$$\int_0^{t_C} |F_{\zeta_1}(\eta)| d\eta = \int_{t_C}^1 |F_{\zeta_1}(\eta)| d\eta. \quad (13)$$

Його розв'язок знаходимо методом послідовних наближень:

$$t_C^{(j)} = t_C^{(j-1)} + 0.03 \frac{(R_{CD})_1^{(j-1)} - (R_{BC})_1^{(j-1)}}{(R_{CD})_1^{(j-1)}}, \quad j = 1, 2, \dots, \quad t_C^{(0)} = 0.5, \quad (14)$$

де

$$(R_{BC})_1^{(j)} = \int_0^{t_C^{(j)}} |F_{\zeta_1}^{(j)}(\eta)| d\eta, \quad (R_{CD})_1^{(j)} = \int_{t_C^{(j)}}^1 |F_{\zeta_1}^{(j)}(\eta)| d\eta.$$

Функції $F_{\zeta_1}^{(j)}(\eta)$ тотожні $F_{\zeta_1}(\eta)$ при заміні t_C на $t_C^{(j)}$.

Знайдена через композицією елементарних відображень функція $\tau_1(t)$ має вигляд

$$\tau(t) = -2 \frac{k}{t_E} \left(\sqrt{t_E t - t^2} - \left(t - \frac{t_E}{2} \right) \right), \quad (15)$$

$$\text{де } t_E = \frac{2 \cos \alpha + 1}{\cos^2 \alpha}.$$

Зв'яжемо тепер прикладене на нескінченності навантаження з параметром \mathcal{A} формули (12). Для цього дослідимо асимптотику визначеної рівностями (12) і (15) функції $\tau_1(\zeta)$ в околі точки $\zeta = \infty$ при $t \rightarrow \infty$:

$$\zeta_1(t) = -i\mathcal{A} t^{3/2} + o(t^{3/2}), \quad \tau_1(t) = -\frac{kt_E}{4it} + o\left(\frac{1}{t}\right).$$

Звідси при $\zeta \rightarrow \infty$ отримуємо

$$\tau_1(\zeta) = -\frac{kt_E}{4} \mathcal{A}^{2/3} e^{i\pi/6} \zeta^{-2/3} + o(\zeta^{-2/3}). \quad (16)$$

Отже, при великих відстанях від початку координат r , коли навантаження у матриці змінюється за законом

$$|\tau| = k \frac{t_E}{4} \left(\frac{\mathcal{A}}{r} \right)^{2/3},$$

напруження визначаються формулами (12), (15) для усіх можливих напрямків розвитку навскісної смуги. Параметр t_C – розв'язок рівняння (13), знайдено за алгоритмом (14). Довжини навскісної та вертикальної пластичних смуг подаються співвідношеннями

$$d_1 = \mathcal{A} \left(\int_0^{t_C} |F_{\zeta_1}(\eta)| d\eta \right)^{3/4}, \quad d_2 = \mathcal{A} \left(\int_1^{t_E} |F_{\zeta_1}(\eta)| d\eta \right)^{3/4}. \quad (17)$$

Формули (16), (17) описують напружено-деформований стан та довжини пластичних смуг для безмежно малого навантаження, формула (10) – напружено-деформований стан в околі вершини включення за довільного навантаження. Знехтувавши другим доданком у формулі (16), матимемо пружний розв'язок допоміжної задачі.

При знаходженні наближеного розв'язку задачі для прямокутного включення у пружно-пластичній постановці згідно з ЛМПЗ прирівнюємо коефіцієнти при $(\zeta - a - ib)^{-2/3}$ та при $\zeta^{-2/3}$ у формулах (10) і (16):

$$\tau_{\infty} \left(\frac{3\sqrt{t_D}}{2a} \int_0^1 |F_{\zeta^{(e)}}(\eta)| d\eta \right)^{-2/3} \sqrt{\frac{t_D - 1}{t_D + 1}} = \frac{kt_E}{4} \mathcal{A}^{2/3},$$

звідки отримуємо

$$\mathcal{A} = \frac{16a}{3\sqrt{t_D t_E^3}} \left(\frac{t_D - 1}{t_D + 1} \right)^{3/4} \left(\int_0^1 |F_{\zeta^{(e)}}(\eta)| d\eta \right)^{-1} \left(\frac{\tau_{\infty}}{k} \right)^{3/2}. \quad (18)$$

Таким чином, для малих навантажень напружено-деформований стан середовища визначається рівностями (12), (16), а розвиток пластичних смуг описується формулою (18).

На початковій стадії пластичні смуги ростуть пропорційно до $(\tau_{\infty})^{3/2}$.

Для окремих значень кута α інтеграл (12) можна обчислити аналітично і отримати розв'язок задачі (11) у замкнутому вигляді. Зокрема, для $\alpha = \pi/4$ маємо $t_C = 0.5$ і $t_E = 2(\sqrt{2} + 1) \approx 4.828$. Згідно з формулами (17) вертикальна пластична смуга приблизно у 25 разів довша від навскісної, що знаходиться на бісектрисі зовнішнього кута при вершині включення, і перевищує довжину навскісної більш ніж на два порядки, коли $\alpha > 5\pi/12$.

Дослідження відшарування включення для об'ємно розподілених пластичних деформацій. Для цього випадку допоміжною задачею, що не містить параметрів з розмірністю довжини, є пружно-пластична антиплоска задача для включення, яке займає третій квадрант у площині Oxy і не контактує з середовищем уздовж від'ємної півосі абсцис. Деформування середовища відбувається під впливом діючих на нескінченості нескінченно малих напружень. Пластичні деформації об'ємно розподілені в околі вершини включення (див. рис. 7, пластична зона – заштрихована скісною сіткою область, L – лінія розділу пружних і пластичних деформацій).

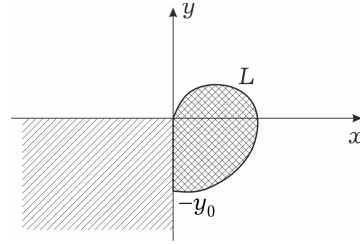


Рис. 7. Зона суцільних пластичних деформацій допоміжної задачі

Утворена компонентами тензора напружень функція

$$\tau_2(\zeta) = \tau_{yz}(x, y) + i\tau_{xz}(x, y), \quad \zeta = x + iy,$$

є аналітичною у комплексній площині ζ без третього квадранта поза зоною пластичних деформацій (область \mathcal{D}_2). Сформулюємо крайову задачу для функції $\tau_2(\zeta)$. На межі області \mathcal{D}_2 повинні виконуватися такі умови:

$$\operatorname{Re} \tau_2(\zeta) = 0, \quad \zeta = x, \quad -\infty < x < 0,$$

$$|\tau_2(\zeta)| = k, \quad \zeta \in L,$$

$$\arg \tau_2(\zeta) = -\arg \zeta, \quad \zeta \in L,$$

$$\operatorname{Re} \tau_2(\zeta) = 0, \quad \zeta = iy, \quad -\infty < x < -y_0,$$

$$\tau_2(\zeta) = -Me^{i\pi/6}\zeta^{-2/3} + o(\zeta^{-2/3}), \quad \zeta \rightarrow \infty, \quad (19)$$

де $y_0 > 0$ – протяжність зони пластичних деформацій вздовж вертикальної межі включення.

Друга з рівностей (19) є умовою пластичності, третя – умовою Генкі [3], а остання задає асимптотику напружень на нескінченності і визначає величину прикладеного навантаження.

Безпосередньо скористатися конформними відображеннями для розв'язання поставленої задачі неможливо, оскільки частина границі області \mathcal{D}_2 , що є межею зони пластичних деформацій, апіорі невідома. Крайова задача (19) є задачею з вільною границею. Проте при відображенні $\tau = \tau_2(\zeta)$ образ області \mathcal{D}_2 відомий: він, як і для смугової зони, є півкрусом \mathcal{G}_1 . Для оберненої до $\tau = \tau_2(\zeta)$ функції $\zeta = \zeta(\tau)$ отримуємо задачу в області \mathcal{G}_1 . Заміною [4] шуканої функції

$$\lambda(\tau) = \tau\zeta(\tau) \quad (20)$$

приходимо до крайової задачі в області \mathcal{G}_1 :

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \lambda(\tau) &= 0, & \operatorname{Re} \tau &= 0, & -k < \operatorname{Im} \tau < k, \\ \operatorname{Im} \lambda(\tau) &= 0, & |\tau| &= k, & -\frac{\pi}{2} < \arg \tau < \frac{\pi}{2}, \\ \lambda(\tau) &= M^{3/2} e^{i\pi/4} \tau^{-1/2} + o(\tau^{-1/2}), & \tau &\rightarrow 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Друга з рівностей (21) є наслідком умови Генкі, а третя – наслідком асимптотики на нескінченності функції $\tau_2(\zeta)$.

Функція $\lambda(\tau)$ реалізує конформне відображення області \mathcal{G}_1 на перший квадрант площини λ (рис. 8). Параметр M функціонально зв'язаний з y_0 .

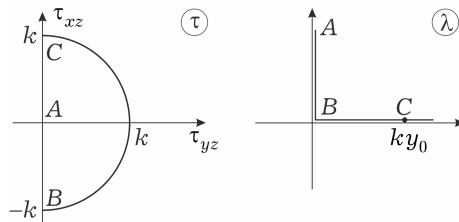


Рис. 8. Области конформного відображення

Побудуємо вказане конформне відображення

$$\lambda = M^{3/2} e^{i\pi/4} \frac{k + \tau + i(k - \tau)}{k\sqrt{\tau}}$$

і з урахуванням формули (20) отримаємо розв'язок задачі (21):

$$\zeta = M^{3/2} \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}\tau^{3/2}} + \frac{1-i}{k\sqrt{2}\tau} \right). \quad (22)$$

Функція (22) є оберненою до $\tau_2(\zeta)$. Поклавши $\tau = ik$, знайдемо координату точки межі пластичної зони на вертикальній стороні включення $y_0 = 2(M/k)^{3/2}$ та параметр $M = k(y_0/2)^{2/3}$.

Границя континуальної пластичної зони (рис. 9) описується рівняннями

$$\begin{aligned} x(\varphi) &= \frac{y_0}{\sqrt{2}} \cos \varphi \left(\cos \frac{\varphi}{2} + \sin \frac{\varphi}{2} \right), \\ y(\varphi) &= -\frac{y_0}{\sqrt{2}} \sin \varphi \left(\cos \frac{\varphi}{2} + \sin \frac{\varphi}{2} \right), \quad \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]. \end{aligned} \quad (23)$$

Прирівнявши навантаження у безмежно віддаленій точці в допоміжних задачах для смугової і континуальної пластичних зон, з формул (16) і (19)

знаходимо, що $M = \frac{kt_E}{4} \mathcal{A}^{2/3}$.

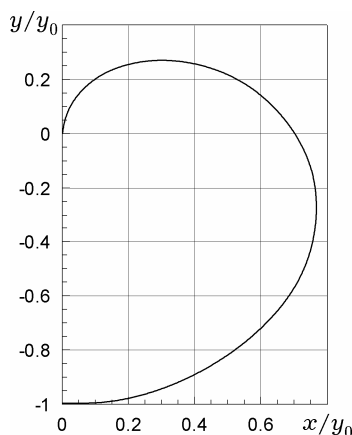


Рис. 9. Границя зони пластичних деформацій

Розв'язок допоміжної пружно-пластичної задачі для континуальної пластичної зони узгоджується з пружним, для прямокутного включення, коли

$$y_0 = \frac{4a}{3\sqrt{t_D}} \left(\frac{t_D - 1}{t_D + 1} \right)^{3/4} \cdot \left(\int_0^1 |F_{\zeta^{(e)}}(\eta)| d\eta \right)^{-1} \left(\frac{\tau_\infty}{k} \right)^{3/2} \quad (24)$$

Рівняння (23) і (24) описують границю континуальної пластичної зони в околі вершин включення на початковій стадії її розвитку для навантажень τ_∞ , значно менших від k .

Континуальна пластична зона дає меншу область відшарування, ніж смугова. Напрямок навскісної смуги мало впливає на відмінності між d_1 та y_0 . Для $0^\circ < \alpha < 80^\circ$ відношення

$$\frac{d_1}{y_0} = \frac{4}{\sqrt{t_E^3}} \left(\int_0^{t_C} |F_{\zeta_1}(\eta)| d\eta \right)^{3/4}$$

змінюється від 1.9 до 2.3.

Висновки. Розглянуто пластичне відшарування включення, дві пари паралельних граней якого не контактують з середовищем. Дослідження проведено за двома схемами розвитку пластичних деформацій: дискретною та континуальною. Виконано порівняння обох можливих схем розвитку зон пластичних деформацій. На початковій стадії лінійні розміри пластичних зон ростуть пропорційно до навантаження у степені 3/2. Протяжність континуальної зони вздовж межі включення – матриця перевищує її протяжність у напрямку бісектриси зовнішнього кута при вершині включення у 6.8 разів, тоді як довжина смуги на межі включення – середовище у 25 разів більша від довжини навскісної смуги, що розвивається вздовж бісектриси зовнішнього кута при вершині включення. Довжина смуги на межі включення – матриця практично не залежить від напрямку розвитку навскісної смуги. Вона приблизно у два рази більша від протяжності континуальної пластичної зони вздовж граней включення.

Отримані формули і результати стосуються випадку, коли довжини пластичних смуг або розміри зони суцільних пластичних деформацій набагато менші від розмірів включення.

1. *Бережницький Л. Т., Панасюк В. В., Стащук Н. Г.* Взаимодействие жестких линейных включений и трещин в деформируемом теле. – Киев: Наук. думка, 1983. – 288 с.
2. *Иванов В. И., Попов В. Ю.* Конформные отображения и их приложения. – Москва: Едиториал УРСС, 2002. – 324 с.

3. Койтер В. Т. Общие теоремы теории упруго-пластических сред. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1961. – 80 с.
4. Кривень В. А. Непрерывное и разрывные решения упругопластической задачи об антиплоской деформации тела с трещиной // Физ.-хим. механика материалов. – 1985. – **21**, № 6. – С. 10–16.
Te same: Kryven' V. A. Continuous and discontinuous solutions of the elastoplastic problem of antiplanar deformation of a crack-containing body // Mater. Sci. – 1986. – **21**, No. 6. – P. 514–520.
5. Кривень В. А. Линейная модель пластической зоны біля гострокінцевого концентратора напряжень за позовжнього зсуву // Физ.-хим. механика материалов. – 2004. – **40**, № 4. – С. 41–46.
Te same: Kryven' V. A. Linear model of a plastic zone in the vicinity of a sharp notch under the conditions of longitudinal shear // Mater. Sci. – 2004. – **44**, No. 4. – P. 475–483.
6. Кривень В. А., Яворська М. І., Валяшек В. Б. Развитие пластических зон у тілі з прямокутною щілиною за антиплоскої деформації // Физ.-хим. механика материалов. – 2008. – **44**, № 4. – С. 13–20.
Te same: Kryven' V. A., Yavors'ka M. I., Valyashok V. B. Development of plastic zones in a body with rectangular slot under the conditions of antiplane deformation // Mater. Sci. – 2008. – **44**, No. 4. – P. 471–481.
7. Сулим Г. Т. Основы математической теории термоупругой равновесии деформируемых твердых тел с тонкими включениями. – Львів: Досл.-вид. центр НТШ, 2007. – 716 с.
8. Kryven V. A., Sulym G. T., Yavorska M. I. Plastic interfacial slip of periodic systems of rigid thin inclusions undergoing longitudinal shear // J. Theoret. and Appl. Mech. (Poland). – 2006. – **44**, No. 4. – P. 837–848.
9. Wayne Chen W., Kun Zhou, Leon M. Keer, Jane Wang Q. Modeling elasto-plastic indentation on layered materials using the equivalent inclusion method // Int. J. Solids and Struct. – 2010. – **47**, No. 20. – P. 2841–2854.

НАЧАЛЬНАЯ СТАДИЯ ПЛАСТИЧЕСКОГО ОТСЛАИВАНИЯ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ВКЛЮЧЕНИЯ ПРИ УСЛОВИИ ОДНОСТОРОННЕГО КОНТАКТА СО СРЕДОЙ

Исследована начальная стадия квазистатического развития пластических деформаций в окрестности вершин жесткого прямоугольного включения, одна пара параллельных граней которого не контактирует со средой. Деформация обусловлена сдвиговыми усилиями, действующими на бесконечности параллельно этой паре граней включения. Рассмотрены случаи пластических деформаций, локализованных в полосах, начинающихся от вершин включения, а также континуально распределенных. Получены характеристики пластических зон при нагрузках, намного меньших предела текучести материала матрицы.

INITIAL STAGE OF PLASTIC EXFOLIATION OF RECTANGLE INCLUSION AT CONDITION OF ONE-SIDED CONTACT WITH ENVIRONMENT

The initial stage of plastic deformations quasi-static development in the vicinity of tips of rigid rectangle inclusion when a pair of its parallel sides does not contact with the environment is investigated. The deformation is caused by shear forces acting at infinity parallel to this pair of inclusion sides. The cases of localized plastic deformations localized in the strips beginning from the inclusion tips and continually distributed are considered. The characteristics of plastic zones for loading values essentially lower than the yield function are obtained.

Тернопільськ. нац. техн. ун-т
ім. Івана Пулюя, Тернопіль

Одержано
30.04.10