

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ВЕРИФИКАЦИИ ТЕОРИЙ ПЛАСТИЧНОСТИ ДЛЯ МЕТАЛЛОВ С РАЗЛИЧНЫМ СОПРОТИВЛЕНИЕМ РАСТЯЖЕНИЮ И СЖАТИЮ

В рамках задачи описания пластического деформирования поликристаллических металлов с различным сопротивлением растяжению и сжатию рассматриваются вопросы подбора универсальных констант и функций материала, регулирующих влияние первого и третьего инвариантов тензора напряжений. Анализируется возможность использования различных видов экспериментов для определения этих констант и верификации теории. Показано, что распространенные эксперименты на совместное растяжение и кручение тонкостенной трубки не дают возможности различить влияние гидростатического давления и угла вида напряженного состояния. Обоснована целесообразность использования экспериментов на двухосное растяжение и других экспериментов на простое и сложное нагружение тонкостенной трубки осевой силой и внутренним давлением.

Введение. В классических теориях пластичности, в основном, учитывается только второй инвариант девиатора напряжений, что является следствием установленной в экспериментах Бриджмена [11] упругой сжимаемости целого ряда металлов. В тех случаях, когда поведение материала чувствительно к виду напряженного состояния (диаграммы одноосного растяжения, сжатия и кручения различны), в соотношения теории пластичности формально вводится третий инвариант девиатора. Однако он в этих случаях обычно не связывается с какими-либо физическими представлениями и его введение в соотношения теории рассматривается как некоторая поправка для лучшего описания экспериментальных данных [8]. Такой подход является традиционным и применим к широкому классу конструкционных металлов. Исключение составляют пористые металлы, неупругая сжимаемость которых установлена в экспериментах [11, 14]. Для описания пластичности таких металлов чаще применяют теории, в которых учитывается первый и второй инварианты тензора напряжений.

В настоящее время в промышленности широко используются новые металлы, к которым относятся, в частности, материалы с различными диаграммами одноосного растяжения и сжатия. Нет оснований, позволяющих перенести на эти металлы результаты Бриджмена или других подобных исследований. Поэтому к таким новым материалам чаще всего применяют теории пластичности, в которых учтены все три инварианта тензора напряжений [9, 10, 17]. Такой подход является универсальным, в отличие от упрощенных традиционных, однако его эффективность прямо зависит от возможности указать степень влияния каждого инварианта. С решением этого вопроса и связаны принципиальные трудности, которые состоят в том, что различие диаграмм растяжения и сжатия и ряд других эффектов, наблюдаемых в стандартных экспериментах, могут быть в равной мере связаны с влиянием как гидростатического давления, так и угла вида напряженного состояния. Известные в настоящее время специальные эксперименты для непосредственного определения степени влияния гидростатического давления (например, одноосное растяжение образца при различных давлениях) достаточно сложны и проводятся крайне редко. Поэтому на практике чаще всего поступают [9, 12, 13] следующим образом. Рассматривают несколько вариантов теории пластичности для изучаемого материала (с учетом первого и второго, второго и третьего, только второго или всех трех инвариантов). В каждом из этих вариантов теории константы материала определяются из нескольких базовых экспериментов (в простейшем варианте – это растяжение, сжатие и кручение) методом перебора или с

помощью специальных алгоритмов оптимизации. После чего подходящий вариант теории выбирается на основании сравнения расчетных данных с рядом экспериментальных результатов, в том числе и на сложное нагружение. В целом такой подход не вызывает сомнений. Однако до сих пор не решен вопрос о том, какие виды экспериментов эффективны для верификации, а какие не могут быть использованы вовсе. Так, если использовать эксперименты, в которых слабо проявляется различное влияние первого и третьего инвариантов тензора напряжений, то результат верификации будет носить случайный характер вследствие погрешности реальных экспериментов.

В работе акцентируется внимание на вопросе выбора экспериментов, достаточных для корректного определения констант и функций материала, определяющих влияние первого и третьего инвариантов тензора напряжений на неупругое поведение материала. Исследование проводится в рамках известной теории пластичности, учитывающей микродеформации [3–7]. Эта теория позволяет учитывать влияние гидростатического давления и угла вида напряженного состояния. В отличие от более простых деформационных теорий и теорий пластического течения, теория микродеформации достаточно полно описывает пластическое деформирование широкого класса поликристаллических металлов при сложном нагружении.

Разрешающие уравнения теории микродеформации. Достаточно полное и последовательное изложение основных положений теории приведено в [3, 5]. Здесь рассматриваем вариант теории, в котором микрочастицы, составляющие представительный макрообъем, идентифицируются только различными ориентационными тензорами второго ранга $\hat{\mu}$, которые принимаются направляющими:

$$\hat{\mu} : \hat{\mu} = 1, \quad \hat{\mu} \in \Omega,$$

здесь и в дальнейшем символ «:» обозначает свертку тензоров по двум индексам; Ω – множество ориентационных тензоров всех микрочастиц.

Множество Ω образовано всевозможными тензорами вида [6, 7]

$$\hat{\mu} = \cos \varphi \hat{\alpha} + \sin \varphi \frac{\hat{e}}{\sqrt{3}}, \quad (1)$$

$$\hat{\alpha} = \left(-\frac{\cos \xi}{\sqrt{6}} - \frac{\sin \xi}{\sqrt{2}} \right) \mathbf{j}_1 \mathbf{j}_1 + \left(-\frac{\cos \xi}{\sqrt{6}} + \frac{\sin \xi}{\sqrt{2}} \right) \mathbf{j}_2 \mathbf{j}_2 + \left(\frac{2 \cos \xi}{\sqrt{6}} \right) \mathbf{j}_3 \mathbf{j}_3,$$

где $\varphi \in (-\pi/2, \pi/2)$, $\xi \in [0, \pi/3]$ – параметры материала, одинаковые для всех микрочастиц; \mathbf{j}_k – тройка взаимно ортогональных векторов, определяющих главные направления тензора $\hat{\mu}$; \hat{e} – единичный тензор второго ранга.

Скорость пластической деформации микрочастицы задается в виде

$$\hat{\varepsilon}_p = \dot{\lambda}(\hat{\mu}) \hat{\mu}, \quad (2)$$

где $\dot{\lambda}(\hat{\mu})$ – интенсивность, а $\hat{\mu}$ – направление скорости пластической деформации микрочастицы.

Множество микрочастиц $\Omega^* \subset \Omega$, в которых проходит микропластическая деформация, определяется условиями пластичности и активности нагружения:

$$\begin{aligned} \langle \hat{\sigma} \rangle : \hat{\mu} - T(\hat{\mu}) &= 0, \\ \dot{\lambda}(\hat{\mu}) &> 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где $\langle \hat{\sigma} \rangle$ – тензор напряжений макрообъема; $T(\hat{\mu})$ – текущее значение предела текучести микрочастицы.

В начальном ненапряженном и недеформированном состоянии полагаем, что

$$T(\hat{\mu}) = \tau, \quad \hat{\mu} \in \Omega,$$

где τ – константа материала, определяющая начальный предел текучести.

Полная деформация макрообъема $\langle \hat{\varepsilon} \rangle$ определяется как сумма упругой $\langle \hat{\varepsilon}_e \rangle$ и пластической $\langle \hat{\varepsilon}_p \rangle$ составляющих, причем упругая составляющая подчинена закону Гука

$$\langle \hat{\sigma} \rangle = \tilde{C}_e : (\langle \hat{\varepsilon} \rangle - \langle \hat{\varepsilon}_p \rangle), \quad (4)$$

где \tilde{C}_e – тензор (4-го ранга) упругой жесткости материала.

Скорость пластического деформирования макрообъема определяется как интеграл по множеству всех активных микрочастиц:

$$\langle \dot{\hat{\varepsilon}}_p \rangle = \int_{\Omega^*} \dot{\hat{\varepsilon}}_p d\Omega. \quad (5)$$

Закон эволюции $T(\hat{\mu})$ задается в следующем виде [3]:

$$\dot{T}(\hat{\mu}) = \dot{T}_1 + R_2 \langle \dot{\hat{\varepsilon}}_p \rangle : \hat{\mu} + R_3 \langle \dot{\lambda} \rangle, \quad (6)$$

$$\dot{T}_1 = \begin{cases} R_1 \dot{\lambda}(\hat{\mu}), & \hat{\mu} \in \Omega^*, \\ 0, & \hat{\mu} \notin \Omega^*, \\ R_4 \dot{\lambda}(\hat{\mu}), & -\hat{\mu} \in \Omega^*, \end{cases}$$

где R_1, R_2, R_3, R_4 – константы материала; $\langle \dot{\lambda} \rangle$ определяется соотношением

$$\langle \dot{\lambda} \rangle = \int_{\Omega^*} \dot{\lambda} d\Omega.$$

Из решения системы уравнений (2), (3), (6) находим интенсивность микропластической деформации

$$\dot{\lambda} = \frac{1}{R_1} \left[\langle \dot{\hat{\sigma}} \rangle : \hat{\mu} - R_2 \langle \dot{\hat{\varepsilon}}_p \rangle : \hat{\mu} - R_3 \langle \dot{\lambda} \rangle \right], \quad (7)$$

где

$$\langle \dot{\lambda} \rangle = \frac{1}{R_1 + R_3 S_\Omega} \left[\langle \dot{\hat{\sigma}} \rangle : \langle \hat{\mu} \rangle - R_2 \langle \dot{\hat{\varepsilon}}_p \rangle : \langle \hat{\mu} \rangle \right],$$

$$S_\Omega = \int_{\Omega^*} d\Omega,$$

$$\langle \hat{\mu} \rangle = \int_{\Omega^*} \hat{\mu} d\Omega.$$

Затем с учетом полученного выражения (7) из (2), (3) и (4) устанавливаем связь между скоростями изменения напряжений и деформаций макрообъема:

$$\langle \dot{\hat{\sigma}} \rangle = \tilde{C} : \langle \dot{\hat{\varepsilon}} \rangle, \quad (8)$$

где

$$\tilde{C} = [\tilde{C}_e^{-1} + \tilde{C}_p^{-1}]^{-1}, \quad \tilde{C}_p = \tilde{A}^{-1} : \tilde{B},$$

$$\tilde{A} = \left[\langle \hat{\mu} \hat{\mu} \rangle - \frac{R_3}{R_{13} R_1} \langle \hat{\mu} \rangle \langle \hat{\mu} \rangle \right],$$

$$\tilde{B} = \left[R_1 \tilde{I} + R_2 \langle \hat{\mu} \hat{\mu} \rangle - \frac{R_3 R_2}{R_{13} R_1} \langle \hat{\mu} \rangle \langle \hat{\mu} \rangle \right],$$

$$\langle \hat{\mu} \hat{\mu} \rangle = \int_{\Omega^*} \hat{\mu} \hat{\mu} d\Omega.$$

Численное интегрирование уравнений теории. Пусть задана траектория деформирования, и требуется найти соответствующую ей траекторию нагружения. Для этого необходимо проинтегрировать соотношение в скоростях (8), что можно сделать, например, прямым методом Эйлера. В этом случае на каждом шаге по времени выполняем следующую последовательность действий.

- 1°. Проверяем условие пластичности в (3). Если оно не выполнено ни для одной микрочастицы, то деформирование происходит по упругому закону. Тогда принимаем $\tilde{C} = \tilde{C}_e$, выполняем шаги 3° и 6°. В противном случае строим множество Ω' микрочастиц, которые предположительно находятся в состоянии активной микропластической деформации.
- 2°. На основании формул (7) и (8) строим тензор \tilde{C} , при этом полагаем $\Omega^* = \Omega'$.
- 3°. Находим приращение напряжений $\Delta\langle\hat{\sigma}\rangle = \tilde{C} : \Delta\langle\hat{\varepsilon}\rangle$.
- 4°. С помощью (7) проверяем условие активности в (2). Если для некоторых направлений $\hat{\mu} \in \Omega'$ условие не выполнено, то эти направления исключаем из Ω' и выполняем возврат к пункту 2°.
- 5°. Из соотношения (5) с учетом (7) вычисляем приращение $\Delta T(\hat{\mu})$ и значение $T(\hat{\mu})$ в конце шага.
- 6°. Вычисляем значения напряжений и деформации, соответствующих концу шага. Выполняем переход к следующему шагу по времени.

Изложенный алгоритм легко обобщается на случай, когда задана траектория нагружения, а не деформирования, а также на те случаи, когда заданы отдельные компоненты напряжений и деформаций, и требуется отыскать недостающие. Этот алгоритм в случае необходимости может быть применен и в стандартной схеме метода конечных элементов.

Учет влияния вида напряженного состояния в теории микродеформации. В рассматриваемом варианте теории микродеформации влияние первого и третьего инвариантов тензора напряжений на пластическую деформацию регулируется константами φ и ξ в представлении ориентационного тензора (2). Однако в традиционных исследованиях для характеристики влияния вида напряженного состояния анализируется форма поверхности текучести с некоторым допуском на пластическую деформацию. Такое представление наглядно и удобно для анализа, поэтому остановимся на том, как задание $\hat{\mu}$ влияет на вид поверхности текучести. Можно показать, что условие (3) с учетом (2) определяет в шестимерном тензорном пространстве некоторую предельную поверхность, ограничивающую область упругого поведения. Эта предельная поверхность определяет «теоретическую» поверхность текучести материала, т.е. поверхность текучести с «нулевым» допуском на пластическую деформацию. В работе [4] было показано, что форма поверхности с заданным допуском, которая строится с помощью специальных расчетов, мало отличается от формы теоретической поверхности, за исключением окрестностей угловых точек. В силу этого те характеристики поверхности, которые определяют зависимость поведения материала от вида напряженного состояния, можно анализировать и на примере теоретической поверхности.

Можно показать, что представление (2) определяет двухпараметрический класс поверхностей текучести вида

$$\sqrt{3} \sin \varphi p + \sqrt{\frac{2}{3}} \cos \varphi \cos \left(\frac{\arccos \cos 3\theta}{3} - \xi \right) q - \tau = 0,$$

где $p = -(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})/3$ – гидростатическое давление; $\hat{S} = \hat{\sigma} + p\hat{e}$ – деви-

атор напряжений; $q = \sqrt{3\hat{S} : \hat{S}/2}$ – интенсивность касательных напряжений; $r = (9\hat{S} : \hat{S} : \hat{S}/2)^{1/3}$ – параметр, определяющий третий инвариант девиатора; $\theta = \arccos(r/q)^{3/3}$ – угол вида напряженного состояния.

В приведенной формуле параметр φ задает влияние гидростатического давления (первого инварианта), и отличные от нуля значения φ определяют конические поверхности текучести. Параметр ξ влияет на след поверхности на девиаторной плоскости. При $\xi = \pi/6$ асимметрия между растяжением и сжатием отсутствует, и след поверхности имеет форму правильного шестиугольника, что соответствует условию максимума касательных напряжений. При $\xi = 0$ ($\xi = \pi/3$) след имеет вид правильного треугольника, что соответствует условию максимума нормальных растягивающих (сжимающих) напряжений. В этом случае с учетом ограничений, накладываемых условием выпуклости поверхности текучести, обеспечивается максимальная асимметрия между растяжением и сжатием. Зависимость размера и формы поверхности текучести в пространстве главных напряжений ($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$) от параметров φ и ξ показана на рис. 1.

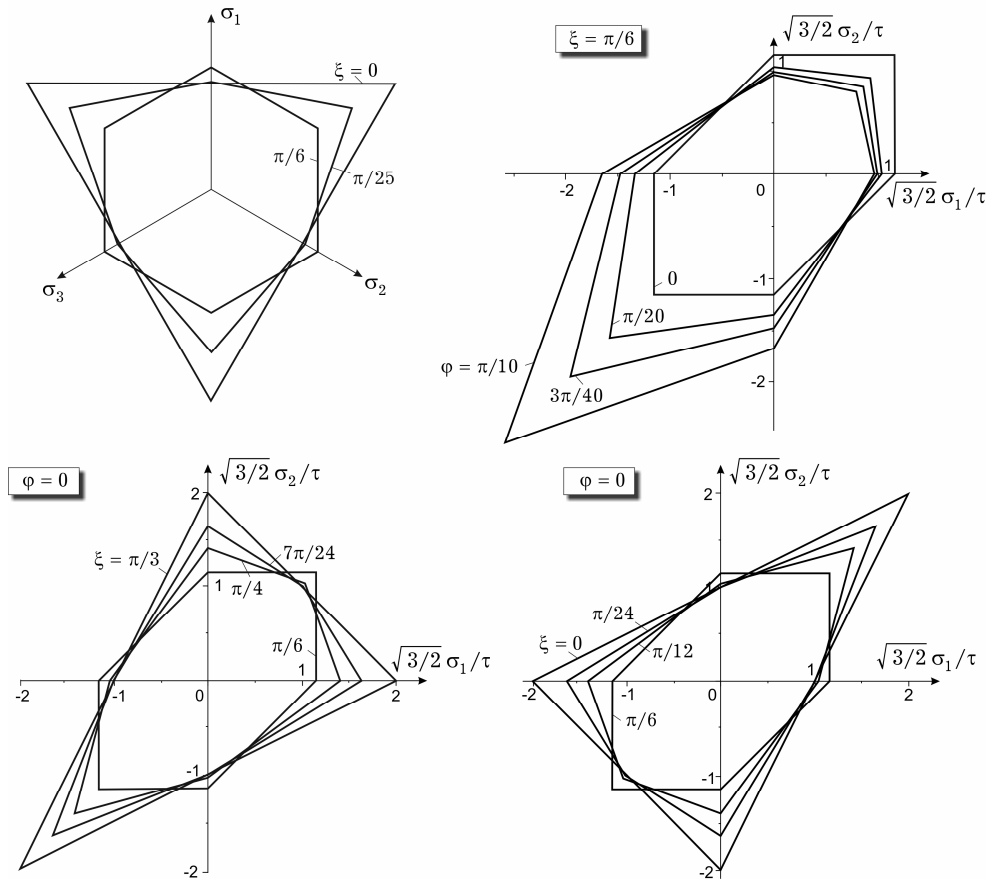


Рис. 1

В общем случае вид напряженного состояния в теории пластичности влияет и на закон упрочнения материала. В теориях пластического течения и деформационных теориях он задается непосредственно (в виде аналитического выражения) и может явно зависеть от инвариантов тензора напряжений. В теории микродеформации закон упрочнения вытекает из физических представлений о микроструктуре материала и отражает «суммарное» поведение множества взаимодействующих микрочастиц, которые, со-

гласно (6), упрочняются линейно. Таким образом, зависимость закона упрочнения от вида напряженного состояния связана со структурой множества направлений микрочастиц Ω и также регулируется константами φ и ξ .

Проблема неоднозначности при определении констант материала.

Чувствительность механического поведения металла к виду напряженного состояния обычно проявляется в различном сопротивлении растяжению и сжатию. Покажем, что такое различие может быть вызвано, как влиянием первого инварианта, так и влиянием угла вида напряженного состояния. Для этого введем в рассмотрение некоторый гипотетический материал с различными диаграммами одноосного растяжения и сжатия и для его описания рассмотрим два варианта подбора констант материала теории микродеформации: в случае *I* не будем учитывать влияние угла вида напряженного состояния ($\varphi = \varphi^1 \neq 0$ и $\xi = \xi^1 = \pi/6$); в случае *II* не будем учитывать гидростатического давления ($\varphi = \varphi^2 = 0$, $\xi = \xi^2 \neq \pi/6$). Значения констант материала при этом подберем так, чтобы совпадали диаграммы одноосного растяжения и сжатия (рис. 2): для случая *I* — $E = 1000\tau$, $\nu = 0.3$, $\tau^1 = 1.14\tau$, $\varphi^1 = 0.15$, $\xi^1 = \pi/6$, $R_1 = 2.5\tau$, $R_2 = R_3 = R_4 = 0$; для случая *II* — $E = 1000\tau$, $\nu = 0.3$, $\tau^2 = \tau$, $\varphi^2 = 0$, $\xi^2 = 0.24$, $R_1 = 2.5\tau$, $R_2 = R_3 = R_4 = 0$. В результате получены два набора констант для описания одного и того же материала. А если рассмотреть промежуточные варианты выбора констант ($0 < \varphi < \pi/2$, $0 \leq \xi \leq \pi/3$, $\xi \neq \pi/6$), то можно получить одинаковые диаграммы растяжения и сжатия для множества различных наборов параметров материала. Такая ситуация наглядно иллюстрирует проблему неоднозначности, возникающую при определении констант в теории пластичности.

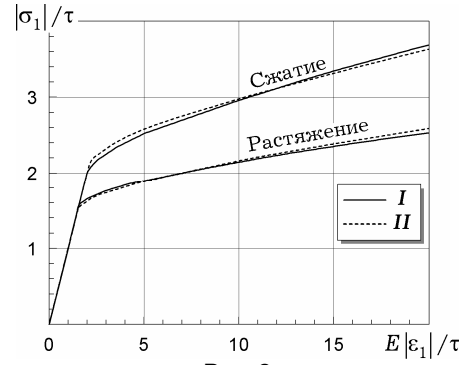


Рис. 2

Важно также отметить, что из совпадения диаграмм одноосного растяжения и сжатия вовсе не следует вывод об эквивалентности рассматриваемых вариантов теории, т.к., прежде всего, они описывают различные физические механизмы пластической деформации: в первом случае имеет место неупругое изменение объема, во втором — нет. Достаточно очевидно, что при рассмотрении одноосного растяжения и сжатия первый и второй варианты теории приводят лишь к одинаковым диаграммам $\varepsilon_1 - \sigma_1$, а диаграммы $\varepsilon_2 - \sigma_1$ будут уже существенно отличаться. На первый взгляд, такие диаграммы могут быть легко использованы для преодоления проблемы неоднозначности в выборе констант. Однако следует заметить, что диаграмма $\varepsilon_1 - \varepsilon_2$ характеризует лишь объемную сжимаемость материала, которая, в общем случае, не дает полной информации о степени влияния гидростатического давления. Так, в случае неассоциированного пластического течения условие пластичности и закон упрочнения материала могут зависеть от гидростатического давления, а объемная деформация происходить по упругому закону [16, 18]. Практическую ценность подхода существенно снижает и тот факт, что требуемые диаграммы $\varepsilon_2 - \sigma_1$ крайне редко приводятся в публикациях.

Важно отметить, что в случаях, когда механизм деформации известен наперед, проблема неоднозначности в выборе констант не имеет места. Так, например, у некоторых сплавов магния предел текучести на растяжение почти в два раза превосходит предел текучести на сжатие, что противоречит известным представлениям о влиянии гидростатического давления на

механическое поведение материала. Такое специфическое поведение этих сплавов вызвано активацией механизма механического двойникования при небольших сжимающих усилиях [15]. Как следствие, неупругое деформирование таких металлов хорошо описывают теории пластичности, учитывающие второй и третий инварианты девиатора напряжений. Можно указать и другие примеры, однако это не является целью настоящей работы.

Верификация теории с помощью экспериментов на простое нагружение. Из изложенного выше следует, что проблема подбора универсальных констант и функций материала, регулирующих влияние гидростатического давления и угла вида напряженного состояния, требует детального рассмотрения. В общем случае для этого, помимо диаграмм растяжения и сжатия, необходимы дополнительные экспериментальные данные. Эффективность того или иного эксперимента будем оценивать, сравнивая результаты соответствующих теоретических диаграмм в рамках рассмотренных выше частных случаев теории. Как будет установлено ниже, такой подход позволит выделить эксперименты, по которым можно отследить независимое влияние каждой из констант φ и ξ .

Для предварительной оценки эффективности экспериментов проведем сначала сравнение поверхностей текучести, соответствующих рассмотренным выше вариантам выбора констант φ и ξ (рис. 3). Как видно из рисунка, в первой и третьей координатных четвертях плоскости $\sigma_1 \sigma_2$ достигается максимальное различие поверхностей, а во второй и четвертой четвертях они практически совпадают.

Обратимся теперь к анализу диаграмм напряжение-деформация при простом нагружении в плоскости $\sigma_3 = 0$. Как и следовало ожидать, наибольшее различие диаграмм, а, следовательно, и наибольшую эффективность дают эксперименты на двухосное растяжения или сжатие (рис. 4). В экспериментах на кручение (рис. 5) влияние почти не проявляется, что говорит о неэффективности таких экспериментов. Эксперименты на совместное нагружение осевой силой и крутящим моментом, как показало проведенное сравнение, дают лучший результат, чем чистое кручение, но не являются достаточно эффективными для практического использования (различие диаграмм не превосходит 10%).

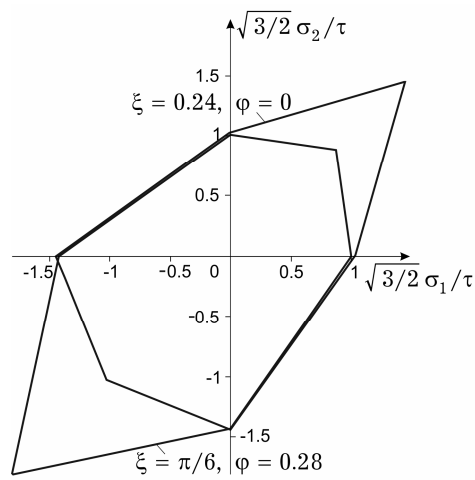


Рис. 3

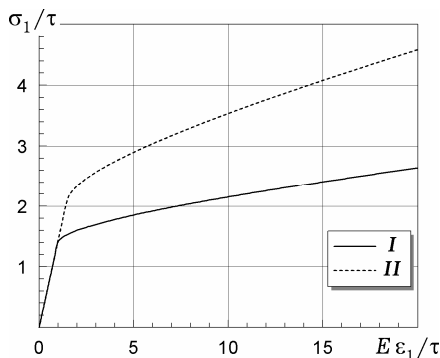


Рис. 4

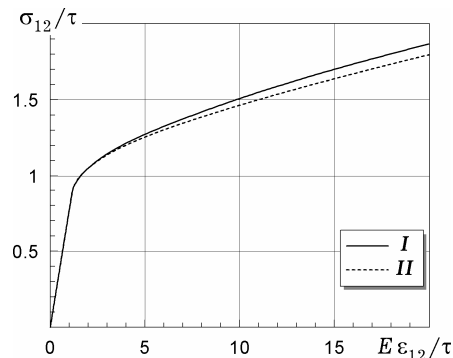


Рис. 5

Экспериментальное исследование механического поведения металлов чаще всего ведется на тонкостенных трубчатых образцах, в которых реализуется плоское напряженное состояние. Так, вторая и четвертая координатные четверти (см. рис. 3) отвечают напряженным состояниям в тонкостенной трубке, подвергнутой действию осевой силы и крутящего момента. Следовательно, эти эксперименты не могут быть использованы для определения констант, регулирующих влияние первого и третьего инвариантов тензора напряжений. Напряженные состояния, находящиеся в первой четверти могут быть реализованы в тонкостенной трубке, подвергнутой действию осевой силы и внутреннего давления. Эти эксперименты достаточно эффективны. Столь же эффективны и эксперименты, в которых реализуются напряженные состояния, лежащие в третьей координатной четверти плоскости $\sigma_1 \sigma_2$. Однако на практике такие эксперименты проводить достаточно сложно. Так, например, двухосное сжатие тонкостенной трубки невозможно реализовать из-за возникающей потери устойчивости. Следует отметить, что известны и другие способы реализации плоского напряженного состояния в металлическом образце, например, двухосное сжатие образца в форме кубика. Однако такие эксперименты отличаются невысокой точностью из-за влияния сил трения.

В последнее время прилагаются усилия для расширения класса напряженных состояний, реализуемых в экспериментах [9]. Для этого используют образцы сложной геометрической формы (стержень или пластинка с выточкой, образец в форме двутавра и т.п.), в которых создается существенно неоднородное напряженно-деформированное состояние. В этом случае задача является статически неопределимой и для верификации теории приходится решать краевую задачу с граничными условиями, как можно более точно отражающими реальные условия закрепления и нагружения образца. Использование таких экспериментов создает дополнительные возможности, однако их эффективности необходимо дополнительно обосновывать.

Из вышеизложенного следует, что корректный выбор экспериментов на простое нагружение способен полностью решить проблему определения констант, регулирующих влияние гидростатического давления и угла вида напряженного состояния. Но, к сожалению, необходимый набор экспериментов, как правило, отсутствует и тогда приходится использовать любые доступные эксперименты, среди которых могут быть и эксперименты на сложное нагружение.

Верификация теории с помощью экспериментов на сложное нагружение. При использовании экспериментов на сложное нагружение для верификации теорий пластичности следует учесть, что из самого факта непропорциональности нагружения не следует различное проявление гидростатического давления и угла вида напряженного состояния. Поэтому эффективность экспериментов на сложное нагружение также следует обосновывать, как это было сделано для экспериментов на простое нагружение. При этом следует учесть, что если в эксперименте задается некоторая траектория нагружения в плоскости отдельных компонент напряжения, то для оценки его эффективности следует сравнивать соответствующие расчетные траектории деформирования.

Остановимся на рассмотрении экспериментов на сложное нагружение тонкостенной трубки осевой силой и крутящим моментом по двухзвенным траекториям. Рассматриваются траектории вида OAB (рис. 6), в которых точка A находится за пределом упругости материала ($OA = 2\tau$), длина AB составляет 0.75τ .

Расчетные траектории деформирования, соответствующие траекториям нагружения для значений угла излома $\beta = 2\pi/3, \pi/2, \pi/4, \pi/6, \pi/12$, изображены на рис. 7.

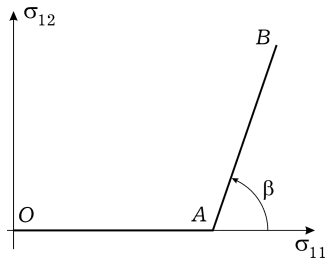


Рис. 6

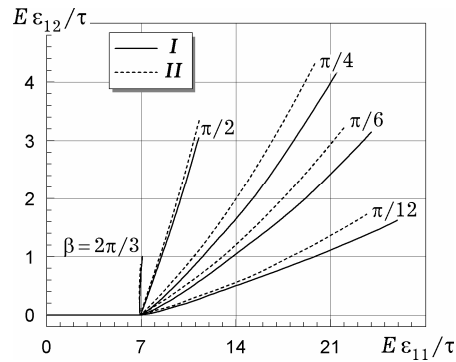
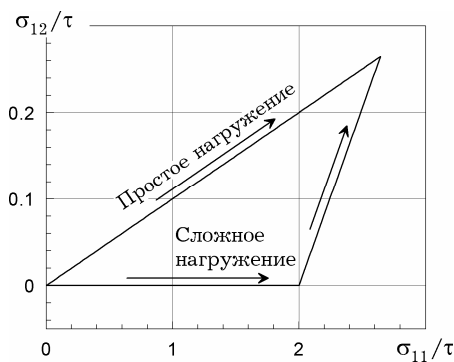
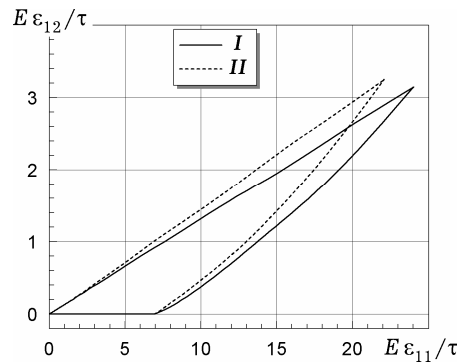


Рис. 7

Как видно из рис. 7, при углах излома β , превышающих $\pi/2$, реакция материала приближается к упругой, а при малых углах излома нагружение приближается к одноосному, поэтому в обоих случаях различие вариантов невелико. Максимальное различие достигается приблизительно в диапазоне углов излома $\pi/4 \div \pi/6$. Отметим, что известные экспериментальные и теоретические исследования [1, 2] двухзвенных траекторий нагружения показали, что при таких углах излома эффект непропорциональности полностью исчезает при некотором отдалении от точки излома (материал «забывает» излом траектории). Подобный эффект описывает и теория микродеформации [3]. Это дает возможность показать, что при таких углах излома различие результатов никак не связано с наличием излома траектории и может быть достигнуто с помощью эквивалентного простого нагружения по траектории OB (рис. 8).



а)



б)

Рис. 8

Таким образом, можно сделать вывод, что рассмотренные виды сложного нагружения, в лучшем случае, не дают преимуществ по сравнению с простым нагружением. Однако такие эксперименты необоснованно используются, например, в работе [13] для определения степени влияния гидростатического давления в варианте теории вязкопластичности. В этой работе эффективность экспериментов подробно не исследуется, но констатируется, что эксперименты на сложное нагружение, в целом, достаточно эффективны для верификации любых теорий пластичности, т.к. при сложном нагружении изменяется соотношение главных напряжений. Это утверждение противоречит полученным выше результатам.

Безусловно, вопрос об эффективности экспериментов на сложное нагружение не исчерпывается рассмотрением указанных выше видов нагружения. Так, например, эксперименты, в которых нагружение идет по сложным многозвенным траекториям, могут оказаться эффективнее рассмотрен-

ных выше. Однако, в общем случае, не имея достаточного обоснования, эксперименты на совместное кручение и растяжение (сжатие) тонкостенной трубки не следует использовать для верификации констант материала, регулирующих влияние гидростатического давления и угла вида напряженного состояния.

Выводы. В работе показано, что различие диаграмм одноосного растяжения и сжатия материала может быть описано с помощью различных вариантов выбора констант, регулирующих влияние гидростатического давления и угла вида напряженного состояния, в обобщенном варианте теории микродеформации. В целом, такие варианты не эквиваленты, поэтому необходимо использовать дополнительные экспериментальные данные для разрешения неоднозначности. В работе детально исследована возможность использования различных видов экспериментов для определения констант и верификации теории.

Показано, что среди экспериментов на простое нагружение наибольшей эффективностью обладают эксперименты на двухосное растяжение и некоторые другие виды экспериментов, проводимых над тонкостенными трубчатыми образцами, подвергнутыми действию внутреннего давления и осевой силы. Неэффективными являются эксперименты на совместное растяжение и кручение тонкостенной трубки, т.к. в них различное влияние гидростатического давления и угла вида напряженного состояния практически не проявляется. Из этих результатов следует, что корректный выбор экспериментов на простое нагружение решает проблему неоднозначности определения констант материала, регулирующих влияние гидростатического давления и угла вида напряженного состояния.

В тех случаях, когда необходимый набор экспериментов на простое нагружение отсутствует, для определения констант и верификации теории используют эксперименты на сложное нагружение. Несмотря на важность таких экспериментов для общей верификации теорий пластичности, их эффективность в данном случае следует непосредственно обосновывать. Так, показано, что эксперименты, в которых проводится нагружение тонкостенной трубки осевой силой и крутящим моментом по двухзвенной траектории, по эффективности, в лучшем случае, не превосходят эксперименты на пропорциональное нагружение.

Полученные результаты важны для практического применения не только обобщенного варианта теории микродеформации, но и других теорий пластичности, в которых учитываются все три инварианта тензора напряжений. В каждой теории рассмотренная проблема будет иметь свою специфику, однако основные выводы, по нашему мнению, могут быть обобщены на такие теории без изменений.

1. *Васин Р. А.* Определяющие соотношения теории пластичности // *Итоги науки и техники. Сер. Механика деформируемого твердого тела.* – Москва: ВИНТИ, 1990. – **21**. – С. 3–75.
2. *Ильюшин А. А.* Пластичность. Основы общей математической теории. – Москва: Изд-во АН СССР, 1963. – 272 с.
3. *Кадашевич Ю. И., Новожилов В. В., Черняков Ю. А.* Теория пластичности и ползучести, учитывающая микродеформации // *Прикл. математика и механика.* – 1986. – **50**, № 6. – С. 890–897.
4. *Кадашевич Ю. И., Черняков Ю. А.* Описание циклического нагружения с помощью теории микродеформации // *Проблемы прочности.* – 1987. – **19**, № 4. – С. 10–15.
То же: *Kadashevich Yu. I., Chernyakov Yu. A.* Description of cyclic loading by means of plasticity theory taking account of microstrain // *Strength of Mater.* – 1987. – **19**, No. 4. – P. 444–450.
5. *Новожилов В. В., Кадашевич Ю. И., Черняков Ю. А.* Теория пластичности, учитывающая микродеформации // *Докл. АН СССР.* – 1985. – **284**, № 4. – С. 821–823.

6. Полищук А. С., Черняков Ю. А. Обобщенный вариант теории микродеформаций // Теорет. и прикл. механика. – 2008. – Вып. 44. – С. 158–163.
7. Черняков Ю. А., Шнейдер В. П. Учет повреждаемости в теории микродеформаций // Вісн. Дніпропетр. ун-ту. – 2006. – № 2. – С. 205–210.
8. Asaro R. J., Lubardo V. A. Mechanics of solids and materials. – Cambridge Univ. Press, 2006. – 860 p.
9. Bai Y., Wierzbicki T. A new model of metal plasticity and fracture with pressure and Lode dependence // Int. J. Plasticity. – 2008. – **24**, No. 6. – P. 1071–1096.
10. Bigoni D., Piccolroaz A. Yield criteria for quasibrittle and frictional materials // Int. J. Solids and Struct. – 2004. – **41**. – P. 2855–2878.
11. Bridgman P. W. Studies in large plastic flow and fracture, with special emphasis on the effects of hydrostatic pressure. – New York – London: McGraw-Hill, 1952. – 362 p.
12. Fengping Yang, Qin Sun, Wei Hu. Yield criterions of metal plasticity in different stress states // Acta Metallurgica Sinica (Engl. Letters). – 2009. – **22**, No. 2. – P. 123–130.
13. Iyer S. K., Lissenden C. J. Multiaxial constitutive model accounting for the strength-differential in Inconel 718 // Int. J. Plasticity. – 2003. – **19**. – P. 2055–2081.
14. Lewandowski J. J., Lowhaphandu P. Effects of hydrostatic pressure on mechanical behaviour and deformation processing of materials // Int. Mater. Rev. – 1998. – **43**, No. 4. – P. 145–187.
15. Lou X. Y., Li M., Boger R. K., Agnew S. R., Wagoner R. H. Hardening evolution of AZ31B Mg sheet // Int. J. Plasticity. – 2007. – **23**. – P. 44–86.
16. Lubarda V. A., Mastilovica S., Knapa J. Some comments on plasticity postulates and non-associative flow rules // Int. J. Mech. Sci. – 1996. – **38**, No. 3. – P. 247–258.
17. Qidwai M. A., Lagoudas D. C. On thermomechanics and transformation surfaces of polycrystalline NiTi shape memory alloy material // Int. J. Plasticity. – 2000. – **16**, No. 10-11. – P. 1309–1343.
18. Taherizadeh A., Green D. E., Ghaeia Abbas, Yoon Jeong-Whan. A non-associated constitutive model with mixed iso-kinematic hardening for finite element simulation of sheet metal forming // Int. J. Plasticity. – 2010. – **26**, No. 2. – P. 288–309.

ДЕЯКІ ПИТАННЯ ВЕРИФІКАЦІЇ ТЕОРІЙ ПЛАСТИЧНОСТІ ДЛЯ МЕТАЛІВ З РІЗНИМ ОПОРОМ РОЗТЯГУ І СТИСКУ

У рамках задачі опису пластичного деформування полікристалічних металів з різним опором розтягу і стиску розглядаються питання підбору універсальних констант і функцій матеріалу, що регулюють вплив першого і третього інваріантів тензора напружень. Аналізується можливість використання різних видів експериментів для визначення цих констант і верифікації теорії. Показано, що відомі експерименти на сумісний розтяг і кручення тонкостінної трубки не дають можливості відрізнити вплив гідростатичного тиску і кута виду напруженого стану. Обґрунтовано доцільність використання експериментів на дво-вісний розтяг та інших експериментів на просте і складне навантаження тонкостінної трубки осьювою силою і внутрішнім тиском.

SOME QUESTIONS CONCERNING VERIFICATION OF THE PLASTICITY THEORIES FOR METALS WITH STRENGTH-DIFFERENTIAL

The problem of determination of material functions and constants which govern the influence of the first and third stress invariants is examined with the purpose of modeling the plastic deformation of metals with strength differential. The possibility of using different experiment types for plasticity theory calibration and verification is analyzed. It is shown, that common experiments, where axial and torsional loads are applied to the thin-walled specimen, do not allow distinguishing influence of hydrostatic pressure and Lode angle. Efficiency of biaxial tension experiments and other experiments on proportional and nonproportional loading of thin-walled specimen with internal pressure and axial force is proved.

Днепропетр. нац. ун-т
им. О. Гончара, Днепропетровск

Получено
12.10.09