УДК 539.30

І. Б. Прокопович

ЗАГАЛЬНИЙ ПІДХІД ДО РОЗРОБКИ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ НЕРУЙНІВНОГО КОНТРОЛЮ НАПРУЖЕНЬ.
II. ФІЗИЧНА МОДЕЛЬ І РІВНЯННЯ ЛОКАЛЬНОГО ЗВ'ЯЗКУ МІЖ НАПРУЖЕННЯМИ ТА ЇХ ПОЧАТКОВИМ РОЗПОДІЛОМ

У рамках фізичної моделі вільної деформації запропоновано метод зведення нелінійних рівнянь стану деформівного тіла до рівнянь, що характеризують локальний вплив початкових напружень на поточний стан тіла. Метод ґрунтується на конструктивному математичному формулюванні принципу початкової незалежності деформованого стану і загальної теореми про потенціал пружності.

Проблема побудови рівнянь впливу напружень. Основу математичних моделей механіки деформівного тіла складають рівняння стану (конститутивні рівняння), що пов'язують поточні значення спряжених параметрів стану, тензор напружень і тензор деформації. Оскільки деформація характеризує зміну поточного стану відносно певного початкового, то рівняння стану обов'язково залежать від початкових значень базисних параметрів стану. З цієї причини рівняння стану не можна використати в математичних моделях неруйнівного контролю напружень (НКН). Цей математичний факт є наслідком фізичного: феноменологічна база розрахунку модельних напружень не може бути використана для визначення дійсних напружень в діючих конструкціях, тобто для НКН [12]. Натомість використовують рівняння, що описують вплив напружень на характеристики зондувального сигналу. Наприклад, в акустопружному НКН – це вплив на час проходження ультразвукового сигналу через напружений зразок, у фотопружному – вплив на вихідну різницю фаз між ортополяризованими складовими світлового променя [19], в магнітопружному – вплив на силу струму, наведену зондувальним електромагнітним полем у вторинній обмотці магнітопружного перетворювача [4, 7]. Якщо НКН, по суті, зводиться до вимірювання напружень, то ніякі рівняння впливу непотрібні. Але і в цьому випадку характеристики поля напружень вимірюють на підставі їх певного впливу. Будь-який метод НКН ґрунтується на тому, що

1°) *наявні в тілі напруження впливають на подальші зміни його стану.*

Взагалі в сучасних методах НКН застосовують всі види впливу напружень – пружний (ультразвуковий НКН), електромагнітний (фотопружний НКН, різні види магнітопружного НКН), тепловий. При цьому використовують емпіричні рівняння інтегрального впливу поля напружень на певні характеристики зондувального сигналу. Такі рівняння не дають повної картини локального впливу напружень на зміну поточного стану тіла, їх не достатньо, щоб визначати складні (плоскі, тривісні), неоднорідні дво- чи тривимірні напружені стани в умовах наведеної і матеріальної анізотропії. Ці рівняння не враховують зв'язку впливу напружень з іншими (спряженими) ефектами, який можна використати для уточнення, верифікації та узагальнення самих рівнянь впливу.

Повний зв'язок між параметрами стану описує система рівнянь стану, породжена тим чи іншим потенціалом. Зрозуміло, що така система неявно враховує всі ефекти впливу напружень та їх зв'язок з іншими ефектами. Тому теоретичне завдання побудови рівнянь повного локального впливу напружень полягає в тому, щоб вивести ці рівняння з системи рівнянь стану. У рамках класичної механіки (а точніше – нелінійної теорії пружності) це завдання можна розв'язати лише для чисто пружного впливу початкових напружень. У цьому особливому випадку шукане рівняння відповідає найпростішій можливій історії виникнення напружень – пружній. Таким чином, будуючи рівняння пружного впливу, фактично відкидають дійсну історію виникнення напружень, вважаючи, що вони виникли внаслідок пружної деформації. Згідно з принципом початкової незалежності [15, 17] така заміна історії виникнення напружень є цілком допустимою. При цьому немає значення, сумісна чи несумісна пружна деформація (проте рівняння локальної акустопружності, записані в термінах початкових переміщень без врахування початкової вільної, технологічної деформації, придатні лише у випадку сумісної накопиченої пружної деформації [1]).

Ключові особливості побудови рівнянь локального пружного впливу, докладно описані в літературі з нелінійної пружності [2, 5, 25] та акустопружного НКН [1], стосуються і проблеми побудови рівнянь локального впливу в загальному випадку. По-перше, рівняння, які описують факт ***1°*** потрібно виводити з нелінійних рівнянь стану, тому що лінійна теорія малої деформації не враховує впливу початкових напружень на зміну стану. Оскільки лінійна теорія має задовільну точність для задач розрахунку напружень, то проблему НКН можна назвати проблемою необхідної надмірної точності. У цьому випадку остаточні висновки щодо точності наближених рівнянь впливу напружень необхідно обґрунтовувати на основі відповідних точних рівнянь. По-друге, потрібно виходити з рівнянь стану, в яких формальна «історія виникнення» початкових напружень відповідає природі їх шуканого впливу. Зокрема, для побудови рівнянь локального електромагнітного впливу напружень слід виходити з нелінійних конститутивних рівнянь електро- чи магнітопружності, а в загальному – з конститутивних рівнянь нелінійної механіки зв'язаних полів.

У рівняннях впливу напруження виступають як причина (їх впливу), тоді як у рівняннях стану – як наслідок (історії їх виникнення). Щоб отримати рівняння впливу напружень безпосередньо з відповідних нелінійних рівнянь стану, необхідно обернути останні відносно пари тензорних змінних напруження – деформація, що взагалі є неможливим навіть у випадку пружності [5]. Тому єдиним шляхом виведення рівнянь впливу напружень з нелінійних рівнянь стану є метод вільної деформації, оскільки він дає змогу «жонглювати» історією виникнення напружень шляхом залучення та вилучення відповідної вільної деформації. Виводячи рівняння локального впливу, замість дійсної вільної деформації, потрібно розглядати деформацію однакової природи з впливом початкових напружень. Наприклад, якщо нас цікавить магнітний вплив напружень, то розглядаємо магнітострикцію. Вилучаючи потім вільну деформацію з відповідних конститутивних рівнянь, отримаємо шукані рівняння локального впливу напружень, а точніше – пружної деформації, накопиченої з напруженнями.

Вихідна система рівнянь стану. Нехай $\mathbf{Y}$ – поточне значення параметра стану, для якого потрібно побудувати рівняння впливу напружень. Взагалі це може бути скаляр, вектор або й тензор вищого рангу. Розглянемо потенціал стану $\mathrm{W}(\mathbf{C}, \mathbf{Z}, \mathbf{Z}_0)$, де $\mathbf{C}$ – міра деформації Коші, $\mathbf{Z}$ – поточне значення базисного параметра стану, спряженого з параметром $\mathbf{Y}$, а $\mathbf{Z}_0$ – його початкове значення, що відповідає початковому, недеформованому (неспотвореному і ненапруженому) стану. Система рівнянь стану, породжена потенціалом $\mathrm{W}(\mathbf{C}, \mathbf{Z}, \mathbf{Z}_0)$, має такий вигляд [2, 5, 6, 25]:

$$\mathbf{T} = 2\rho\mathbf{F} \cdot \mathrm{W}_{,\mathbf{C}} \cdot \mathbf{F}, \qquad \mathbf{Y} = \mathrm{W}_{,\mathbf{Z}}. \tag{1}$$

Тут змінна величина у нижньому індексі після коми означає похідну за цією змінною; $\mathbf{T}$ – тензор напружень (Коші); ρ – поточна густина матеріалу; $\mathbf{F}$ – міра дисторсії (ґрадієнт місця [5], транспонований до ґрадієнта деформації [25]). Як і у випадку лінійної теорії, загальне визначальне рівняння для вільної деформації у неявному вигляді випливає з умови відсутності напружень

$$\mathbf{T}(\mathbf{C},\mathbf{Z},\mathbf{Z}_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{C} = \tilde{\mathbf{C}}(\mathbf{Z},\mathbf{Z}_0)\,. \qquad (2)$$

Тут $\mathbf{C}$, $\tilde{\mathbf{C}}$ − міри Коші відповідно для повної та вільної накопичених деформацій. Умова (2) означає, що повна деформація − вільна, якщо напруження відсутні (не виникли). З формул (1) і (2) бачимо, що базисні параметри визначального рівняння вільної деформації такі ж, як і тензора напружень, потенціалу стану та інших функцій стану. Зазначимо, що подання системи рівнянь у вигляді (1) означає, що з рівнянь стану виключили поворот матеріалу [18] та застосовуємо апарат безобертового диференціювання тензорних функцій стану [11]. У цьому випадку тензори вільної і повної дисторсій є симетричними тензорами, що характеризують відповідну накопичену деформацію: $\mathbf{F}^{\mathsf{T}} = \mathbf{F}$, $\tilde{\mathbf{F}}^{\mathsf{T}} = \tilde{\mathbf{F}}$. Фізичну модель вільної деформації без вилучення повороту матеріалу, тобто в термінах несиметричних мір дисторсії, та її застосування до побудови рівнянь локального впливу напружень описано в роботах [8−10, 13−16].

Фізико-кінематичне рівняння суперпозиції деформацій. У попередній частині [12] розглянуто нелінійну модель суперпозиції з незмінними початковими станами як для повної, так і для пружної накопиченої деформації. Це дозволяє скористатися диференціальним апаратом класичної кінематичної теорії «великої» деформації, в якій початковий стан вважається незмінним і недеформованим, а фізична природа деформації не береться до уваги. Щоб побудувати рівняння впливу напружень, необхідно розглядати деформацію, зумовлену зміною і кінцевого, і початкового станів. Крім того, необхідно врахувати певну природу вільної деформації (відповідну природі зондувального сигналу та побічних збурень стану). Таким чином, замість класичної, чисто кінематичної, теорії великої деформації потрібна загальна фізико-кінематична теорія суперпозиції великих деформацій. Вихідним співвідношенням суперпозиції деформацій є рівняння кінематичної суперпозиції дисторсій $\mathbf{F} = \tilde{\mathbf{F}} \cdot \hat{\mathbf{F}}$, де $\tilde{\mathbf{F}}$, $\hat{\mathbf{F}}$ − міри вільної та пружної дисторсій відповідно. Оскільки поворот матеріалу, що передує вільній та повній деформації, вилучено, то відповідні міри дисторсії є симетричними тензорами, які характеризують деформацію початково неспотвореного матеріалу. Підставляючи рівняння суперпозиції дисторсій у вираз для міри Коші повної деформації $\mathbf{C} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}$, отримуємо співвідношення між симетричними мірами деформації $\mathbf{C} = \tilde{\mathbf{F}} \cdot \hat{\mathbf{C}} \cdot \tilde{\mathbf{F}}$, де $\hat{\mathbf{C}} = \hat{\mathbf{F}} \cdot \hat{\mathbf{F}}$ − міра Коші пружної деформації. Якщо в отримане співвідношення підставити визначальне рівняння для міри вільної дисторсії $\tilde{\mathbf{F}} = \tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{Z},\mathbf{Z}_0)$, відповідне умові вільної деформації (2), то отримаємо фізико-кінематичне рівняння суперпозиції деформацій:

$$\mathbf{C} = \tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{Z},\mathbf{Z}_0) \cdot \hat{\mathbf{C}} \cdot \tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{Z},\mathbf{Z}_0)\,. \qquad (3)$$

Це рівняння відображає три джерела зміни накопиченої повної деформації − зміну початкового стану $\mathbf{Z}_0$, зміну поточного вільного стану $\mathbf{Z}$, що є кінцевим для вільної накопиченої деформації та початковим для пружної, а також зміну накопиченої пружної деформації внаслідок зміни поточного напруженого стану.

Пружні подання функцій стану. Розв'язавши рівняння (3) відносно міри пружної деформації, отримаємо вираз, що розкриває суть принципу початкової незалежності функцій стану [17]:

$$\hat{\mathbf{C}} = \left[\tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{Z}_0,\mathbf{Z})\right]^{-1} \cdot \mathbf{C} \cdot \left[\tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{Z}_0,\mathbf{Z})\right]^{-1}.$$

Вираз справа не залежить від вибору початкового стану, оскільки дорівнює мірі накопиченої пружної деформації. З цього випливає співвідношення незалежності від початкового стану для довільної функції стану

$$\mathbf{\Phi}(\mathbf{C},\mathbf{Z},\mathbf{Z}_0)=\hat{\mathbf{\Phi}}(\hat{\mathbf{C}},\mathbf{Z})\Big|_{\hat{\mathbf{C}}=[\tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{Z}_0,\mathbf{Z})]^{-1}\cdot\mathbf{C}\cdot[\tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{Z}_0,\mathbf{Z})]^{-1}}. \quad (4)$$

Тут зліва маємо звичне подання функцій стану деформівного тіла через міру накопиченої повної деформації, а справа – її пружне подання через міру накопиченої пружної деформації. Подання зліва явно залежить від початкового значення базисного параметра, хоча його значення не залежить від нього. Причину цього парадоксу якраз і розкриває вираз для міри пружної деформації через міру повної. Як бачимо, формулювання принципу неможливе без вказівки у формулах початкових значень базисних параметрів. У класичній теорії початковий стан вважають сталим, тому початкові значення не вказують, зокрема у функціях потенціалу стану та тензора напружень. У рамках фізичної моделі вільної деформації це недопустимо, інакше визначальне рівняння такої деформації втрачає зміст. У деяких теоріях (як от, раціональна механіка континууму) відсутність початкових значень у записі функцій стану тлумачать як відсутність фізичних ознак у самого початкового стану (іншими словами, допустиме математичне спрощення розглядають як фізичну реальність). На цій «підставі», замість об'єктивного поняття «стану», фізичний зміст якого визначається власне значеннями параметрів стану, використовують поняття «конфігурації» (форми без фізичного стану, уявної форми), позбавлене фізичного змісту. Внаслідок такої підміни поняття деформації також втрачає фізичний зміст і не відрізняється від заміни координат. Поняття конфігурації допустиме лише в рамках кінематичної теорії, але його застосування до аналізу конститутивних рівнянь деформівного матеріалу може призвести до хибних висновків [17].

Якщо тіло вільне від напружень, то пружна накопичена деформація відсутня, тобто $\hat{\mathbf{C}}=\mathbf{I}$, де $\mathbf{I}$ – одиничний тензор, а повна накопичена деформація є вільною (2). З принципу початкової незалежності випливає, що

$$\mathbf{\Phi}(\tilde{\mathbf{C}}(\mathbf{Z}_0,\mathbf{Z}),\mathbf{Z},\mathbf{Z}_0)\equiv\hat{\mathbf{\Phi}}(\mathbf{I},\mathbf{Z})\equiv\tilde{\mathbf{\Phi}}(\mathbf{Z}). \quad (5)$$

Якщо накопичена деформація є вільною, то функція стану не залежить від неї. Функцію $\tilde{\mathbf{\Phi}}(\mathbf{Z})$ називатимемо функцією вільного стану. Її значення дорівнюють вільним значенням функції (4). Різницю

$$\hat{\Delta}_{\mathbf{\Phi}}(\hat{\mathbf{C}},\mathbf{Z})\equiv\hat{\mathbf{\Phi}}(\hat{\mathbf{C}},\mathbf{Z})-\tilde{\mathbf{\Phi}}(\mathbf{Z}) \quad (6)$$

природно назвати п'єзовідхиленням функції $\hat{\mathbf{\Phi}}$. Ця різниця характеризує внесок у значення функції стану, викликаний накопиченою пружною деформацією та відповідно – напруженнями. Тензор напружень є особливою функцією стану, оскільки він дорівнює своєму п'єзовідхиленню. Суть НКН – визначення напружень на підставі ефектів зміни п'єзовідхилень, які відповідають природі зондувального сигналу.

Диференціюючи рівність (4) та враховуючи означення (5) і (6), отримаємо такі співвідношення між частинними похідними від обох подань п'єзовідхилення функції стану:

$$\hat{\Delta}_{\hat{\mathbf{\Phi}},\hat{\mathbf{C}}}:(\hat{\mathbf{F}}\cdot\mathbf{I}_2\cdot\hat{\mathbf{F}})=\hat{\Delta}_{\mathbf{\Phi},[\mathbf{C}]}:(\mathbf{F}\cdot\mathbf{I}_2\cdot\mathbf{F}),$$

$$\hat{\Delta}_{\hat{\mathbf{\Phi}},[\mathbf{Z}]}=\hat{\Delta}_{\hat{\mathbf{\Phi}},\mathbf{Z}}-2(\hat{\Delta}_{\hat{\mathbf{\Phi}},\hat{\mathbf{C}}}\cdot\hat{\mathbf{C}}):\mathbf{I}_2:\tilde{\mathbf{\Xi}}_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}). \quad (7)$$

Нижній індекс в квадратних дужках після коми означає відповідну похідну від подання $\hat{\Delta}_{\hat{\mathbf{\Phi}}}(\mathbf{C},\mathbf{Z},\mathbf{Z}_0)$, залежного від міри повної деформації. Двокрапка між тензорами означає тензорну згортку другої кратності (подвійний скалярний добуток); $\mathbf{I}_2$ – тензор-інвертор четвертого рангу; тензор $\tilde{\mathbf{\Xi}}_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z})\equiv$ $\equiv\tilde{\mathbf{F}}^{-1}\cdot\tilde{\mathbf{F}}_{,\mathbf{Z}}$ – модуль безмежно малої вільної деформації, зумовленої приростом поточного значення базисного параметра $\mathbf{Z}$ [10, 16], його значення залежить лише від поточних значень базисних параметрів стану. Вираз зліва чи справа в першій рівності можна назвати інваріантною деформаційною похідною від функції стану. Її значення та вигляд не залежать від початкового стану. Друга рівність показує, що частинні похідні за поточним значенням базисного параметра стану пов'язані через деформаційну похідну та модуль вільної дисторсії. Похідна $\hat{\Delta}_{\hat{\Phi},\mathbf{Z}}$ характеризує приріст при сталій накопиченій пружній деформації, а похідна $\hat{\Delta}_{\hat{\Phi},[\mathbf{Z}]}$ – приріст при сталій накопиченій повній деформації (жорстке защемлення). Вирази (7) складають основу диференціального апарату методу вільної деформації.

Конститутивні рівняння вільного стану та пружності. Застосуємо розбиття (7) до рівнянь стану (1). Спочатку розіб'ємо потенціал стану на функцію вільного стану $\tilde{W}(\mathbf{Z})$ та п'єзовідхилення $\hat{\Delta}_W(\hat{\mathbf{C}},\mathbf{Z})$:

$$W(\mathbf{C},\mathbf{Z},\mathbf{Z}_0) = \hat{W}(\hat{\mathbf{C}},\mathbf{Z}) \equiv \tilde{W}(\mathbf{Z}) + \hat{\Delta}_W(\hat{\mathbf{C}},\mathbf{Z}). \tag{8}$$

Оскільки значення потенціалу стану характеризує певну енергію стану (наприклад, внутрішню чи вільну), то його п'єзовідхилення характеризує частину енергії, накопичену з пружною деформацією, тобто накопичену роботу пружної деформації. Застосовуючи формули (7), отримаємо такий вираз для напружень через деформаційну похідну п'єзовідхилення:

$$\mathbf{T} = 2\hat{c}(\tilde{\rho}\hat{\mathbf{F}}^{\mathbf{T}} \cdot \hat{\Delta}_{W,\hat{\mathbf{C}}} \cdot \hat{\mathbf{F}}). \tag{9}$$

Тут $\tilde{\rho} = \tilde{\rho}(\mathbf{Z}) = \hat{\rho}(\hat{\mathbf{C}},\mathbf{Z})\big|_{\hat{\mathbf{C}}=\mathbf{I}}$ – поточна густина ненапруженого матеріалу, яка має зміст вільного значення густини ρ, а коефіцієнт $\hat{c} = \rho/\tilde{\rho}$ характеризує накопичену об'ємну пружну деформацію. Формула (9) вказує на ще один фундаментальний факт механіки деформівного тіла:

2°) *потенціал пружності – це функція п'єзовідхилення потенціалу стану*

з точністю до множника, що не залежить від накопиченої пружної деформації. Наявність множника зумовлена тим, що потенціалом стану вважають енергію, віднесену до маси матеріального елемента, тоді як потенціалом пружності – енергію пружної деформації, віднесену до початкового об'єму елемента. У цьому випадку таким об'ємом є власне поточний ненапружений об'єм.

Розіб'ємо функцію параметра стану $\mathbf{Y}$ на вільне значення та п'єзовідхилення $\mathbf{Y} = \tilde{\mathbf{Y}}(\mathbf{Z}) + \hat{\Delta}_{\mathbf{Y}}(\hat{\mathbf{C}},\mathbf{Z})$ та разом з формулою (8) підставимо у рівняння (1). Отримаємо два окремих рівняння – одне для вільного значення

$$\tilde{\mathbf{Y}}(\mathbf{Z}) = \tilde{W}_{,\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}), \tag{10}$$

інше – для п'єзовідхилення

$$\hat{\Delta}_{\mathbf{Y}}(\hat{\mathbf{C}},\mathbf{Z}) = \hat{\Delta}_{W,[\mathbf{Z}]} = \hat{\Delta}_{W,\mathbf{Z}} - 2\hat{\mathbf{\Sigma}} : \tilde{\mathbf{\Xi}}_{\mathbf{Z}}, \tag{11}$$

де

$$\hat{\mathbf{\Sigma}} \equiv \hat{\mathbf{C}} \cdot \hat{\Delta}_{W,\hat{\mathbf{C}}} = \rho^{-1}\hat{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{T} \cdot \hat{\mathbf{F}}^{-1}/2.$$

Разом із співвідношенням пружності ці рівняння складають повну систему конститутивних рівнянь пружності. Система рівнянь стану (1) описує пружність як частковий найпростіший випадок історії виникнення напружень. Натомість отримана система конститутивних рівнянь вільного стану та пружності описує пружність як фундаментальну властивість континууму, що проявляється за будь-яких умов, за будь-якої історії виникнення напружень. Власне на цій феноменологічний базі ґрунтується контроль напружень як неруйнівний, так і руйнівний.

У класичній механіці деформівного тіла маємо єдину задачу побудови та аналізу рівнянь стану (1), яка зводиться до побудови потенціалу стану, первісної функції для системи рівнянь. За допомогою поняття вільної деформації ця задача зводиться до трьох простіших. Перша з них − побудувати систему рівнянь вільного, ненапруженого стану (10), породжену потенціалом вільного стану. Друга − побудувати визначальне рівняння вільної деформації (2) або її модуля. І, нарешті, третя задача − побудувати співвідношення пружності (9), породжені потенціалом пружності, та рівняння для п'єзовідхилень, породжені потенціалом пружності спільно з модулем вільної деформації. Ці три функції описують два незалежних явища. Перше − зміна вільного, ненапруженого стану з побічним кінематичним ефектом − вільною деформацією. Друге явище − пружна деформація з побічним ефектом − виникненням п'єзовідхилень. Кожне з цих явищ підлягає окремому експериментальному та теоретичному дослідженню. Дослідження вільного стану лежить в галузі фізики, тоді як пружна деформація − класичний предмет механіки деформування. Побічні, змішані, ефекти є спільним предметом фізики і механіки.

Властивості потенціалу пружності. Отримана система рівнянь пружності зручна не лише для експериментального дослідження. Потенціал пружності задовольняє ряд умов, на підставі яких можна зробити певні висновки про характер рівнянь для п'єзовідхилень. Насамперед, це умови відсутності пружної деформації та напружень:

$$\hat{\mathbf{C}} = \mathbf{I} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{T} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \hat{\Delta}_{\mathrm{W}} = 0, \qquad \hat{\Delta}_{\mathrm{W},\hat{\mathbf{C}}} = 0\,. \tag{12}$$

Узагальненням двох попередніх умов є експериментально підтверджена квадратична залежність потенціалу пружності від тензора накопиченої пружної деформації $\hat{\mathbf{E}} \equiv (\hat{\mathbf{C}} - \mathbf{I})/2$ в околі його нульового значення, так що:

$$\left\|\hat{\Delta}_{\mathrm{W}}\right\| \ll \left\|\hat{\Delta}_{\mathrm{W},\hat{\mathbf{C}}}\right\| \approx \left\|\tilde{\rho}^{-1}\mathbf{T}\right\| \ll \left\|\hat{\Delta}_{\mathrm{W},\hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{C}}}\right\| = \mathrm{O}\left(\left\|\hat{\mathbf{E}}\right\|^{0}\right). \tag{13}$$

Відомо, що в межах твердої фази в цілому чи певної кристалічної фази модулі пружності залишаються практично незмінними. Тому зміна потенціалу пружності та напружень в основному відбувається за рахунок зміни накопиченої пружної деформації, а не за рахунок зміни інших параметрів стану. Зокрема, це припущення лежить в основі класичної теорії пружності, де залежність потенціалу пружності від параметрів стану не розглядається взагалі. Враховуючи слабкі ефекти впливу початкових напружень, не можна одразу знехтувати слабкою ж залежністю пружних властивостей від зміни базисного стану. Натомість потрібно записати її умову. Це можна зробити за допомогою поняття вільної деформації. В умовах жорсткого защемлення вільна деформація компенсується зміною накопиченої пружної деформації [10], що призводить до приросту накопиченої пружної енергії. Природно припустити, що такий приріст набагато більший, ніж приріст, викликаний зміною пружних властивостей, тобто

$$\left\|\hat{\Sigma} : \tilde{\Xi}_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z})\right\| \gg \left\|\hat{\Delta}_{\mathrm{W},\mathbf{Z}}\right\|. \tag{14}$$

Враховуючи умову (14) та умову малої пружної деформації, рівняння (11) для п'єзовідхилення зведемо до лінійного відносно напружень наближеного співвідношення

$$\hat{\Delta}_{\mathbf{Y}}(\hat{\mathbf{C}},\mathbf{Z}) \approx -\,\tilde{\rho}^{-1}\mathbf{T} : \tilde{\Xi}_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z})\,. \tag{15}$$

Якщо, наприклад, прийняти, що параметр $\mathbf{Z}$ є вектором напруженості електричного поля, а тензор $\tilde{\Xi}_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z})$ − константою, то спрощене рівняння описує електричний п'єзоефект (відкритий братами Кюрі) [3]. Тобто в лінійному наближенні (відносно тензора накопиченої пружної деформації) п'єзовідхилення дорівнює накопиченому п'єзоефекту. Відповідно в загальному:

3°) *п'єзовідхилення параметрів стану – це накопичені п'єзоефекти.*

Цей факт доповнює попередній (факт ***2°***) про потенціал пружності.

Рівняння впливу напружень на зміну поточного стану. В основі НКН лежать ефекти впливу напружень на зміну поточного стану. Для побудови відповідних рівнянь локального впливу із заданою точністю необхідно побудувати певний диференціал рівняння п'єзовідхилень (11). Зокрема, в лінійному наближені – це диференціал першого порядку:

$$d_{\mathbf{Z}}(\hat{\Delta}_{\mathbf{Y}}) = \hat{\Delta}_{\mathbf{Y},\mathbf{Z}} \circ d\mathbf{Z}^{\mathsf{T}} + 2\hat{\Delta}_{\mathbf{Y},\hat{\mathbf{C}}} : (\hat{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{I}_2 \cdot \hat{\mathbf{F}}) : \delta\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}\,. \qquad (16)$$

Тут $\delta\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \equiv \hat{\mathbf{F}}^{-1} \cdot d\hat{\mathbf{C}} \cdot (\hat{\mathbf{F}}^{\mathsf{T}})^{-1}/2$ – безмежно мала пружна деформація,

$$\hat{\Delta}_{\mathbf{Y},\mathbf{Z}} = \hat{\Delta}_{\mathrm{W},\mathbf{ZZ}} - 2(\hat{\Sigma} : \tilde{\Xi}_{\mathbf{Z},\mathbf{Z}} - \mathbf{I}_{\mathbf{Z}} \circ \tilde{\Xi}^{\mathsf{T}}_{\mathbf{Z}} : \mathbf{I}_2 : \hat{\Sigma}_{,\mathbf{Z}}),$$

$$\hat{\Delta}_{\mathbf{Y},\hat{\mathbf{C}}} = \hat{\Delta}_{\mathrm{W},\mathbf{Z}\hat{\mathbf{C}}} - 2\mathbf{I}_{\mathbf{Z}} \circ \tilde{\Xi}^{\mathsf{T}}_{\mathbf{Z}} : \mathbf{I}_2 : \hat{\Sigma}_{,\hat{\mathbf{C}}} = \mathbf{I}_{\mathbf{Z}} \circ (\hat{\mathbf{C}}^{-1} \cdot \hat{\Sigma}_{,[\mathbf{Z}]})^{\mathsf{T}}\,. \qquad (17)$$

Символ «$\circ$» означає тензорну згортку, кратність якої дорівнює рангу тензора $\mathbf{Z}$, а $\mathbf{I}_{\mathbf{Z}}$ – тензор-інвертор, рангу вдвічі більшого, ніж ранг тензора $\mathbf{Z}$, так що $\mathbf{Z}^{\mathsf{T}} = \mathbf{I}_{\mathbf{Z}} \circ \mathbf{Z}$. На підставі формули (3) виразимо безмежно малу пружну деформацію через повну: $\delta\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{F}^{-1} \cdot d\mathbf{C} \cdot \mathbf{F}^{-1}/2\delta\boldsymbol{\varepsilon} = \mathrm{sym}(\nabla\delta\mathbf{u})$, де $\nabla\delta\mathbf{u}$ – ґрадієнт варіації поля переміщень. Тоді отримаємо фізико-кінематичне рівняння приросту накопиченої пружної деформації

$$\delta\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \delta\boldsymbol{\varepsilon} - (\hat{\mathbf{F}}^{-1} \cdot \mathbf{I}_2 \cdot \hat{\mathbf{F}}^{-1}) : (\mathbf{I}_2 + \mathbf{J}_2) : (\hat{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{I}_2) : \tilde{\Xi}_{\mathbf{Z}} \circ d\mathbf{Z}^{\mathsf{T}}/2\,. \qquad (18)$$

Підставляючи його у вираз (16), запишемо відповідне рівняння для приросту п'єзовідхилення

$$d_{\mathbf{Z}}(\hat{\Delta}_{\mathbf{Y}}) = \hat{\Delta}_{\mathbf{Y},[\mathbf{Z}]} \circ d\mathbf{Z}^{\mathsf{T}} + \hat{\Delta}_{\mathbf{Y},\hat{\mathbf{C}}} : (\hat{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{I}_2 \cdot \hat{\mathbf{F}}) : \delta\boldsymbol{\varepsilon}\,, \qquad (19)$$

де

$$\hat{\Delta}_{\mathbf{Y},[\mathbf{Z}]} = \hat{\Delta}_{\mathbf{Y},\mathbf{Z}} - (\hat{\Delta}_{\mathbf{Y},\hat{\mathbf{C}}} \cdot \hat{\mathbf{C}}) : \mathbf{I}_2 : \tilde{\Xi}_{\mathbf{Z}}\,. \qquad (20)$$

Коефіцієнти $\hat{\Delta}_{\mathbf{Y},\mathbf{Z}}$ та $\hat{\Delta}_{\mathbf{Y},[\mathbf{Z}]}$ природно назвати лінійними п'єзомодулями. Перший із них характеризує вплив накопиченої пружної деформації на лінійне збурення стану за сталої накопиченої пружної деформації. Ця умова близька до умови сталих напружень і найбільш ймовірна у випадку повільної зміни стану в однорідному тілі з вільною поверхнею. Другий характеризує такий же вплив за відсутності деформування (абсолютно жорстке защемлення). Ця умова, як відомо, близька до здійснення у випадку достатньо швидкої («динамічної») зміни стану. П'єзомодуль $\hat{\Delta}_{\mathbf{Y},[\mathbf{Z}]} = \hat{\Delta}_{\mathrm{W},[\mathbf{Z}],[\mathbf{Z}]}$ задовольняє умову симетрії $\mathbf{I}_{\mathbf{Z}} \circ \hat{\Delta}_{\mathbf{Y},[\mathbf{Z}]} = \hat{\Delta}_{\mathbf{Y},[\mathbf{Z}]} \circ \mathbf{I}_{\mathbf{Z}}$, що випливає з існування потенціалу пружності. Застосовуючи припущення (13) і (14), замість загальних формул (16) і (19), отримаємо більш наглядну універсальну формулу через приріст тензора напружень:

$$d\hat{\Delta}_{\mathbf{Y}} \approx -\rho^{-1}(d\mathbf{T} : \tilde{\Xi}_{\mathbf{Z}} + \mathbf{T} : \tilde{\Xi}_{\mathbf{Z},\mathbf{Z}} \circ d\mathbf{Z}^{\mathsf{T}})\,. \qquad (21)$$

Звідси бачимо, що похідна $\tilde{\Xi}_{\mathbf{Z},\mathbf{Z}}$ є також п'єзомодулем впливу початкових напружень. З іншого боку, ця похідна є модулем квадратичної вільної деформації. Таким чином, за допомогою методу вільної деформації виявлено зв'язок ефекту впливу початкових напружень з іншим фізико-механічним ефектом. Квадратична вільна деформація спряжена з ефектом впливу напружень подібно до того, як лінійний п'єзоефект є спряжений з ефектом лінійної вільної деформації. Порівнюючи перший доданок у формулі (21) з формулою (15), бачимо, що його можна назвати збуреним п'єзоефектом. Він характеризується модулем відповідної лінійної вільної деформації. Збурений п'єзоефект накладається на ефект впливу початкових напружень і, таким чином, заважає вловити (відчути) останній. Збурений п'єзоефект відсутній, якщо відсутнє збурення напружень ($d\mathbf{T} = 0$) або якщо відсутній лінійний обернений п'єзоефект за поточного стану тіла ($\tilde{\Xi}_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}) = 0$). Перша з цих умов є близькою до умови сталої накопиченої пружної деформації ($\delta\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = 0$) і, як зазначено вище, може виконуватися досить точно у випадку повільного деформування тіла з вільною поверхнею.

Висновки. Метод побудови рівнянь локального впливу напружень ґрунтується на нелінійній фізичній моделі вільної деформації і включає в себе чотири ключові проміжні результати – математичне формулювання принципу початкової незалежності функцій стану деформівного тіла (4); конструктивне і загальне доведення теореми про потенціал пружності (8), (9); зведення системи рівнянь стану до системи рівнянь вільного стану (10) і вільної деформації та повної системи рівнянь пружності (9), (11); і, нарешті, розробка диференціального апарату (6), (16), (18), (19) побудови рівнянь локального впливу початкових напружень на збурення поточного стану. Усі отримані проміжні результати мають самостійне значення, яке виходить поза рамки проблеми побудови математичних моделей НКН. Принцип початкової незалежності та потенціал пружності – це ключові теоретичні поняття механіки деформівного тіла в цілому. Дослідження ефектів впливу напружень на електромагнітне поле та спряженої вільної деформації актуальні для електротехніки, і зацікавлення ними зростає у зв'язку з розвитком нанотехнологій [6, 20, 22–24]. Поєднання експериментальних досліджень з класичними та квантовими фізичними підходами не дає змоги отримати достатньо загальні та точні конститутивні рівняння магнітопружності [21]. Натомість модель вільної деформації ґрунтується на перевірених фактах, а тому дозволяє будувати рівняння як завгодно точні в рамках гіпотези про суцільне середовище.

1. *Гузь А.Н.* Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями // Прикл. механика. – 2002. – **38**, № 1. – С. 35–77.
2. *Жермен П.* Курс механики сплошных сред. – Москва: Высш. шк., 1983. – 399 с.
3. *Жолудев И. С.* Физика кристаллических диэлектриков. – Москва: Наука, 1968. – 463 с.
4. *Касаткин Б. С., Кудрин А. Б., Лобанов Л. М., Пивторак В. А., Полухин П. И., Чиченев Н. И.* Экспериментальные методы исследования деформаций и напряжений. – Киев: Наук. думка, 1981. – 584 с.
5. *Лурье И.* Нелинейная теория упругости. – Москва: Наука, 1980. – 512 с.
6. *Можен Ж.* Механика электромагнитных сплошных сред. – Москва: Мир, 1991. – 560 с.
7. *Недосека А. Я.* Основы расчета и диагностики сварных конструкций. – Киев: Индпром, 1998. – 640 с.
8. *Прокопович І. Б.* Виведення потенціалу пружності з потенціалу стану та повна система визначальних рівнянь пружності // Машинознавство. – 2002. – № 10. – С. 8–13.
9. *Прокопович І. Б.* Вирази для ефективної діелектричної проникності напруженого ізотропного матеріалу // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2006. – **49,** № 4. – С. 113–118.
10. *Прокопович І. Б.* Диференційні співвідношення між зміною деформованого стану та деформацією // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2003. – **39**, № 4. – С. 47–52.
11. *Прокопович І. Б.* Диференціювання тензорних функцій стану тіла з урахуванням обертання // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2008. – **51**, № 1. – С. 99–104.
12. *Прокопович І. Б.* Загальний підхід до розробки математичних моделей неруйнівного контролю напружень. І. Методологічне та фізичне обґрунтування і кінематична модель // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2010. – **53,** № 2. – С. 68–75.

13. *Прокопович І. Б.* Загальні вирази для опису впливу напружень на діелектричну або магнетну проникність // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2005. – **41**, № 4. – С. 77–85.
14. *Прокопович І. Б.* Загальні властивості нелінійних рівнянь вільної від напружень деформації // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2004. – **47,** № 3. – С. 87–94.
15. *Прокопович І. Б.* Математичне формулювання відлікової інваріантності функцій стану, залежних від параметра деформації // Машинознавство. – 2002. – № 9. – С. 28–32.
16. *Прокопович І. Б.* Математичний опис збурення напружено-деформованого стану // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2004. – **40**, № 1. – С. 16–20.
17. *Прокопович І. Б.* Принципи незалежності в рівняннях стану деформівного матеріалу // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2009. – **52,** № 3. – С. 90–102.
18. *Прокопович І. Б.* Про залежність функцій стану деформівного тіла від міри повороту // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2009. – **52,** № 2. – С. 66–71.
19. *Пуро А. Э.* Параметрическая томография внутренних напряжений // Оптика и спектроскопия. – 2001. – **90**, № 4. – С. 664–674.
20. *Тикадзуми С.* Физика ферромагнетизма. Магнитные характеристики и практические приложения. – Москва: Мир, 1987. – 419 с.
21. *Fohnle M., Komelj M., Wu R. Q., Guo G. Y.* Magnetoelasticity of Fe: Possible failure of ab initio electron theory with the local-spin-density approximation and with the generalized-gradient approximation // Phys. Rev. B. – 2002. – **65**. 14. – P. 144436-1–144436-5.
22. *Magnetism: Fundamentals* / Ed. by É. du Trémolet de Lacheisserie, D. Gignoux, M. Schlenker. – Springer, 2005. – 507 p.
23. *Modern trends* in magnetostriction study and application // Proc. of the NATO Advanced Study Institute (Kyiv, Ukraine, 22 May – 2 June 2000) / Ed. M. R. J. Gibbs: NATO Science Ser. II. Mathematics, Physics and Chemistry. – Vol. 5. – Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2001. – 349 p.
24. *Trémolet de Lacheisserie É. du.* Magnetostriction. Theory and applications of magnetoelasticity. – Boca Raton: CRC Press, 1993. – 408 p.
25. *Truesdell C., Noll W.* The nonlinear field theories of mechanics. – Berlin–Heidelberg: Springer, 2004. – 602 p.

ОБЩИЙ ПОДХОД К РАЗРАБОТКЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ НЕРАЗРУШАЮЩЕГО КОНТРОЛЯ НАПРЯЖЕНИЙ.
II. ФИЗИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И УРАВНЕНИЯ ЛОКАЛЬНОЙ СВЯЗИ МЕЖДУ НАПРЯЖЕНИЯМИ И ИХ НАЧАЛЬНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ

В рамках физической модели свободной деформации предложен метод сведения нелинейных уравнений состояния деформируемого тела к уравнениям, характеризирующим локальное влияние начальных напряжений на текущее состояние тела. Метод базируется на конструктивном математическом формулировании принципа начальной независимости деформированного состояния и общей теоремы о потенциале упругости.

GENERAL APPROACH TO MATHEMATICAL MODELS FOR NONDESTRUCTIVE STRESS TESTING.
II. PHYSICAL MODEL AND EQUATIONS OF LOCAL CONNECTION BETWEEN STRESSES AND THEIR INITIAL DISTRIBUTION

The method for reduction of the nonlinear equations of state of deformable body to constitutive equations characterizing local influence of initial stresses on the actual state of body is proposed within the framework of physical model of free deformation. The method is based on the constructive mathematical formulation of the principle of initial independence of strain state and the general elasticity potential theorem.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
14.10.09