УДК 519.62

М. В. Кутнів, О. І. Паздрій

ТОЧНА ТРИТОЧКОВА РІЗНИЦЕВА СХЕМА ДЛЯ НЕЛІНІЙНОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ НА ПІВОСІ

Для чисельного розв'язування крайових задач на півпрямій для нелінійних звичайних диференціальних рівнянь другого порядку побудовано та обґрунтовано точну триточкову різницеву схему. За умов існування та єдиності розв'язку крайової задачі доведено існування і єдиність розв'язку точної триточкової різницевої схеми, а також збіжність методу послідовних наближень для її розв'язування.

Точну триточкову різницеву схему (ТТРС), тобто схему, розв'язок якої є проекцією точного розв'язку задачі на сітку, та її алгоритмічну реалізацію через триточкові різницеві схеми високого порядку точності для задачі на півосі

$$\frac{d^2u}{dx^2} - m^2 u = -f(x,u), \qquad x \in (0,\infty), \qquad m = \text{const} > 0\,,$$

$$u(0) = \mu_1, \qquad \lim_{x\to\infty} u(x) = 0$$

побудовано в роботах [3, 4].

У цій праці для нелінійної крайової задачі вигляду

$$\frac{d^2u}{dx^2} + m^2\frac{du}{dx} = -f(x,u), \qquad x \in (0,\infty), \qquad m = \text{const} > 0\,, \tag{1}$$

$$u(0) = \mu_1, \qquad \lim_{x\to\infty} u(x) = 0 \tag{2}$$

побудовано та обґрунтовано ТТРС на скінченній нерівномірній сітці

$$\hat{\bar{\omega}}_N = \{x_j,\ j = 0,1,\ldots,N,\ x_0 = 0\}$$

з точною нелінійною крайовою умовою на правому граничному кінці сітки x_N.

Введемо функцію $u^{(0)}(x) = \mu_1 e^{-m^2x}$ і множину

$$\Omega(D,\beta) = \left\{u(x) : u(x) \in C^1[0,\infty),\ \left\|u - u^{(0)}\right\|_{1,\infty,D} \le \beta,\ D \subseteq [0,\infty)\right\},$$

$$\|u\|_{1,\infty,D} = \max\left\{\|u\|_{0,\infty,D}\,,\ \left\|\frac{du}{dx}\right\|_{0,\infty,D}\right\}, \qquad \|u\|_{0,\infty,D} = \max_{x\in D}|u(x)|\,.$$

Нехай $Q^0[0,\infty)$ − клас кусково-неперервних функцій зі скінченною кількістю точок розриву першого роду.

Достатні умови існування та єдиності розв'язку задачі (1), (2), які випливають із методу лінеаризації і принципу стискуючих відображень (див., наприклад, [1, 2]), дає

Теорема 1. *Нехай виконуються умови*

$$f_u(x) \equiv f(x,u) \in Q^0[0,\infty), \qquad |f(x,u)| \le K(x) \in L_1[0,\infty) \quad \forall x \in [0,\infty)\,, \tag{3}$$

$$u \in \Omega([0,\infty),r), \quad r = \max\left\{\frac{1}{m^2}, 1\right\}\int_0^\infty K(\xi)\,d\xi, \quad \lim_{x\to\infty} e^{-m^2x}\int_0^x e^{m^2\xi}K(\xi)\,d\xi = 0\,,$$

$$|f(x,u) - f(x,v)| \le \mathcal{L}(x)|u - v| \quad \forall x \in [0,\infty), \quad u,v \in \Omega([0,\infty),r)\,, \tag{4}$$

$$\mathcal{L}(x) \in L_1[0,\infty), \qquad q = \max\left\{\frac{1}{m^2}, 1\right\}\int_0^\infty \mathcal{L}(\xi)\,d\xi < 1\,. \tag{5}$$

Тоді задача (1), (2) *в* $\Omega([0,\infty),r)$ *має єдиний розв'язок* $u(x)$, *який можна знайти методом послідовних наближень*:

$$\frac{d^2u^{(k)}}{dx^2} + m^2\frac{du^{(k)}}{dx} = -f(x,u^{(k-1)}), \qquad x \in (0,\infty)\,, \tag{6}$$

$$u^{(k)}(0) = \mu_1, \qquad \lim_{x\to\infty} u^{(k)}(x) = 0, \qquad k = 1,2,\ldots\,, \tag{7}$$

з оцінкою похибки

$$\left\| u^{(k)} - u \right\|_{1,\infty,[0,\infty)} \le \frac{q^k}{1-q} r . \qquad (8)$$

Д о в е д е н н я. Задачу (1), (2) запишемо в еквівалентному інтегральному вигляді:

$$u(x) = \Re(x, u(\cdot)) = \int_0^\infty G(x,\xi) f(\xi, u(\xi))\, d\xi + u^{(0)}(x), \quad x \ge 0 , \qquad (9)$$

де функція Ґріна задачі (1), (2) має вигляд

$$G(x,\xi) = \begin{cases} \dfrac{1-e^{-m^2 x}}{m^2}, & 0 \le x \le \xi, \\ \dfrac{e^{m^2\xi}-1}{m^2} e^{-m^2 x}, & x \ge \xi. \end{cases}$$

Оскільки

$$|u(x)| \le \frac{e^{-m^2 x}}{m^2} \int_0^x \left(e^{m^2\xi} - 1\right) K(\xi)\, d\xi + \frac{1-e^{-m^2 x}}{m^2} \int_x^\infty K(\xi)\, d\xi + |\mu_1| e^{-m^2 x} ,$$

то за умов теореми функція (9) задовольняє крайову умову при $x \to \infty$.

Покажемо, що оператор (9) переводить множину $\Omega([0,\infty), r)$ в себе:

$$\left\| \Re(x, v(\cdot)) - u^{(0)} \right\|_{1,\infty,[0,\infty)} = \left\| \int_0^\infty G(x,\xi) f(\xi, v(\xi))\, d\xi \right\|_{1,\infty,[0,\infty)} \le$$

$$\le \left\| \frac{e^{-m^2 x}}{m^2} \int_0^x \left(e^{m^2\xi} - 1\right) K(\xi)\, d\xi + \frac{1-e^{-m^2 x}}{m^2} \int_x^\infty K(\xi)\, d\xi \right\|_{1,\infty,[0,\infty)} \le$$

$$\le \left\| \frac{1-e^{-m^2 x}}{m^2} \int_0^\infty K(\xi)\, d\xi \right\|_{1,\infty,[0,\infty)} \le r \qquad \forall v \in \Omega([0,\infty), r) .$$

Крім того, $\Re(x, u(\cdot))$ на $\Omega([0,\infty), r)$ є оператором стиску, оскільки

$$\left\| \Re(x, u(\cdot)) - \Re(x, v(\cdot)) \right\|_{1,\infty,[0,\infty)} = \left\| \int_0^\infty G(x,\xi) [f(\xi, u(\xi)) - f(\xi, v(\xi))]\, d\xi \right\|_{1,\infty,[0,\infty)} \le$$

$$\le \left\| \frac{e^{-m^2 x}}{m^2} \int_0^x \left(e^{m^2\xi} - 1\right) \mathcal{L}(\xi)\, d\xi + \frac{1-e^{-m^2 x}}{m^2} \int_x^\infty \mathcal{L}(\xi)\, d\xi \right\|_{1,\infty,[0,\infty)} \times$$

$$\times \left\| u - v \right\|_{1,\infty,[0,\infty)} \le \left\| \frac{1-e^{-m^2 x}}{m^2} \int_0^\infty \mathcal{L}(\xi)\, d\xi \right\|_{1,\infty,[0,\infty)} \left\| u - v \right\|_{1,\infty,[0,\infty)} \le$$

$$\le q \left\| u - v \right\|_{1,\infty,[0,\infty)} \qquad \forall u, v \in \Omega([0,\infty), r) .$$

Отже, для оператора $\Re(x, u(\cdot))$ при $q < 1$ виконані всі умови принципу стискуючих відображень, а тому рівняння (9) має єдиний розв'язок, який може бути одержаний методом послідовних наближень (6), (7) з оцінкою похибки (8). ◊

На інтервалі $[0,\infty)$ введемо нерівномірну сітку

$$\hat{\hat{\omega}}_N = \{ x_j \in [0,\infty),\ j = 0,1,\ldots,N, \quad x_0 = 0, \quad h_j = x_j - x_{j-1} > 0 ,$$
$$h_1 + h_2 + \ldots + h_N = x_N \}$$

так, щоб точки розриву функції $f(x,u)$ співпадали з вузлами сітки. Множину всіх точок розриву позначимо через ρ і будемо вважати, що N таке, що $\rho \subseteq \hat{\omega}_N$.

Згідно з [3, 4] накладемо на кроки h_j сітки $\hat{\hat{\omega}}_N$ такі обмеження:

$$c_1 \le \frac{h_{\max}}{h_{\min}} \le c_2 , \qquad (10)$$

де c_1, c_2 – дійсні сталі. Для досягнення максимального порядку збіжності різницевої схеми потрібно, щоб

$$\frac{1}{h_{\max}} \le x_N \le \frac{1}{h_{\min}}. \tag{11}$$

З нерівностей $h_{\min} N \le x_N = h_1 + h_2 + \ldots + h_N \le h_{\max} N$ і (11) випливають співвідношення

$$h_{\min} \le \frac{1}{x_N} \le \frac{1}{N h_{\min}}, \qquad \frac{1}{N h_{\max}} \le \frac{1}{x_N} \le h_{\max}.$$

На підставі (10) отримаємо

$$\frac{h_{\max}}{c_2} \le h_{\min} \le \frac{1}{\sqrt{N}}, \qquad c_2 h_{\min} \ge h_{\max} \ge \frac{1}{\sqrt{N}}.$$

Звідси випливають нерівності

$$h_{\max} \le \frac{c_2}{\sqrt{N}}, \quad h_{\min} \ge \frac{1}{c_2\sqrt{N}}, \quad \frac{\sqrt{N}}{c_2} \le h_{\min} N \le x_N \le h_{\max} N \le c_2\sqrt{N}.$$

Таким чином, будемо мати, що $h_{\max} \to 0$, $x_N \to \infty$ при $N \to \infty$.

Введемо множину сіткових функцій

$$\Omega(\hat{\bar{\omega}}_N, \beta) = \left\{ v(x),\, x \in \hat{\bar{\omega}}_N : \left\| v - u^{(0)} \right\|^*_{1,\infty,\hat{\omega}_N^+} \le \beta \right\},$$

де

$$\|y\|_{0,\infty,\hat{\bar{\omega}}_N} = \max_{0 \le j \le N} |y_j|, \qquad \|y\|_{0,\infty,\hat{\omega}_N^+} = \max_{1 \le j \le N} |y_j|,$$

$$\|y\|^*_{1,\infty,\hat{\omega}_N^+} = \max\left\{ \|y\|_{0,\infty,\hat{\omega}_N^+},\ \left\| \frac{dy}{dx} \right\|_{0,\infty,\hat{\omega}_N^+} \right\}, \qquad \hat{\omega}_N^+ = \hat{\omega}_N \cup x_N.$$

Розглянемо крайові задачі

$$\frac{d^2 Y_\alpha^j(x,u)}{dx^2} + m^2 \frac{dY_\alpha^j(x,u)}{dx} = -f(x, Y_\alpha^j(x,u)), \qquad x_{j-2+\alpha} < x < x_{j-1+\alpha}, \tag{12}$$

$$Y_\alpha^j(x_{j-2+\alpha}, u) = u(x_{j-2+\alpha}), \qquad Y_\alpha^j(x_{j-1+\alpha}, u) = u(x_{j-1+\alpha}),$$
$$j = 2-\alpha, 3-\alpha, \ldots, N+1-\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \tag{13}$$

$$\frac{d^2 Y_2^N(x,u)}{dx^2} + m^2 \frac{dY_2^N(x,u)}{dx} = -f(x, Y_2^N(x,u)), \qquad x > x_N, \tag{14}$$

$$Y_2^N(x_N, u) = u(x_N), \qquad \lim_{x \to \infty} Y_2^N(x,u) = 0. \tag{15}$$

Лема 1. *Нехай виконані умови* (3), (4) *і* (5). *Тоді задачі* (12), (13) *і* (14), (15) *матимуть єдиний розв'язок* $Y_\alpha^j(x,u)$, $j = 2-\alpha, 3-\alpha, \ldots, N+1-\alpha$, $\alpha = 1, 2$, $Y_2^N(x,u)$, *причому для розв'язку задачі* (1), (2) *справджується зображення*

$$u(x) = Y_\alpha^j(x,u), \qquad x \in [x_{j-2+\alpha}, x_{j-1+\alpha}],$$
$$j = 2-\alpha, 3-\alpha, \ldots, N+1-\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \tag{16}$$

$$u(x) = Y_2^N(x,u), \qquad x \in [x_N, \infty). \tag{17}$$

Д о в е д е н н я. Крайові задачі (12), (13) і (14), (15) запишемо в еквівалентній формі:

$$Y_\alpha^j(x,u) = \int_{x_{j-2+\alpha}}^{x_{j-1+\alpha}} G^{j-1+\alpha}(x,\xi) f(\xi, Y_\alpha^j(\xi,u))\, d\xi + \hat{u}(x), \qquad x \in [x_{j-2+\alpha}, x_{j-1+\alpha}],$$
$$j = 2-\alpha, 3-\alpha, \ldots, N+1-\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \tag{18}$$

$$\hat{u}(x) = \frac{e^{-m^2 x_{j-2+\alpha}} - e^{-m^2 x}}{e^{-m^2 x_{j-2+\alpha}} - e^{-m^2 x_{j-1+\alpha}}} u(x_{j-1+\alpha}) + \frac{e^{-m^2 x} - e^{-m^2 x_{j-1+\alpha}}}{e^{-m^2 x_{j-2+\alpha}} - e^{-m^2 x_{j-1+\alpha}}} u(x_{j-2+\alpha}),$$

$$Y_2^N(x,u)=\int\limits_{x_N}^{\infty} G^{\infty}(x,\xi)f(\xi,Y_2^N(\xi,u))\,d\xi+u_N e^{-m^2(x-x_N)},\ \ x\in[x_N,\infty)\,, \tag{19}$$

де

$$G^{j-1+\alpha}(x,\xi)=\begin{cases}\dfrac{\left(e^{-m^2x_{j-2+\alpha}}-e^{-m^2x}\right)\left(1-e^{-m^2(x_{j-1+\alpha}-\xi)}\right)}{m^2\left(e^{-m^2x_{j-2+\alpha}}-e^{-m^2x_{j-1+\alpha}}\right)}, & x_{j-2+\alpha}\le x\le\xi,\\[2ex] \dfrac{\left(e^{-m^2x}-e^{-m^2x_{j-1+\alpha}}\right)\left(e^{m^2(\xi-x_{j-2+\alpha})}-1\right)}{m^2\left(e^{-m^2x_{j-2+\alpha}}-e^{-m^2x_{j-1+\alpha}}\right)}, & \xi\le x\le x_{j-1+\alpha},\end{cases}$$

$$G^{\infty}(x,\xi)=\begin{cases}\dfrac{1-e^{-m^2(x-x_N)}}{m^2}, & x_N\le x\le\xi,\\[2ex] \dfrac{e^{-m^2x}\left(e^{m^2\xi}-e^{m^2x_N}\right)}{m^2}, & x\ge\xi.\end{cases} \tag{20}$$

При $\alpha=1$ отримуємо

$$\hat{u}(x)=\frac{e^{-m^2x_{j-1}}-e^{-m^2x}}{e^{-m^2x_{j-1}}-e^{-m^2x_j}}\left[\int\limits_0^{\infty}G(x_j,\xi)f(\xi,u)\,d\xi+\mu_1e^{-m^2x_j}\right]+$$
$$+\frac{e^{-m^2x}-e^{-m^2x_j}}{e^{-m^2x_{j-1}}-e^{-m^2x_j}}\left[\int\limits_0^{\infty}G(x_{j-1},\xi)f(\xi,u)\,d\xi+\mu_1e^{-m^2x_{j-1}}\right],$$
$$x\in[x_{j-1},x_j]\,,$$

$$u_N(x)e^{-m^2(x-x_N)}=e^{-m^2(x-x_N)}\left[\int\limits_0^{\infty}G(x_N,\xi)f(\xi,u)\,d\xi+\mu_1e^{-m^2x_N}\right],\quad x\ge x_N\,.$$

Оскільки

$$\left[\frac{e^{-m^2x_{j-1}}-e^{-m^2x}}{e^{-m^2x_{j-1}}-e^{-m^2x_j}}e^{-m^2x_j}+\frac{e^{-m^2x}-e^{-m^2x_j}}{e^{-m^2x_{j-1}}-e^{-m^2x_j}}e^{-m^2x_{j-1}}\right]\mu_1=$$
$$=\frac{e^{-m^2(x+x_{j-1})}-e^{-m^2(x+x_j)}}{e^{-m^2x_{j-1}}-e^{-m^2x_j}}\mu_1=e^{-m^2x}\mu_1=u^{(0)}(x)\,,$$

то

$$\hat{u}(x)=\frac{e^{-m^2x_{j-1}}-e^{-m^2x}}{e^{-m^2x_{j-1}}-e^{-m^2x_j}}\int\limits_0^{\infty}G(x_j,\xi)f(\xi,u)\,d\xi+$$
$$+\frac{e^{-m^2x}-e^{-m^2x_j}}{e^{-m^2x_{j-1}}-e^{-m^2x_j}}\int\limits_0^{\infty}G(x_{j-1},\xi)f(\xi,u)\,d\xi+u^{(0)}(x),\quad x\in[x_{j-1},x_j]\,,$$

$$u_N(x)e^{-m^2(x-x_N)}=e^{-m^2(x-x_N)}\int\limits_0^{\infty}G(x_N,\xi)f(\xi,u)\,d\xi+u^{(0)}(x),\qquad x\ge x_N\,.$$

Тоді

$$Y_1^j(x,u)=\frac{e^{-m^2x_{j-1}}-e^{-m^2x}}{e^{-m^2x_{j-1}}-e^{-m^2x_j}}\int\limits_0^{\infty}G(x_j,\xi)f(\xi,u)\,d\xi+$$
$$+\frac{e^{-m^2x}-e^{-m^2x_j}}{e^{-m^2x_{j-1}}-e^{-m^2x_j}}\int\limits_0^{\infty}G(x_{j-1},\xi)f(\xi,u)\,d\xi+$$
$$+\int\limits_{x_{j-1}}^{x_j}G^j(x,\xi)f(\xi,Y_1^j(\xi,u))\,d\xi+u^{(0)}(x),\quad x\in[x_{j-1},x_j]\,,$$

$$Y_2^N(x,u)=e^{-m^2(x-x_N)}\int_0^\infty G(x_N,\xi)f(\xi,u)\,d\xi+\int_{x_N}^\infty G^\infty(x,\xi)f(\xi,Y_2^N(\xi,u))\,d\xi+u^{(0)}(x),$$

$$x\in[x_N,\infty).$$

На підставі рівності $Y_2^j(x,u)=Y_1^{j+1}(x,u)$ маємо

$$Y_2^j(x,u)=\frac{e^{-m^2x_j}-e^{-m^2x}}{e^{-m^2x_j}-e^{-m^2x_{j+1}}}\int_0^\infty G(x_{j+1},\xi)f(\xi,u)\,d\xi+$$

$$+\frac{e^{-m^2x}-e^{-m^2x_{j+1}}}{e^{-m^2x_j}-e^{-m^2x_{j+1}}}\int_0^\infty G(x_j,\xi)f(\xi,u)\,d\xi+$$

$$+\int_{x_j}^{x_{j+1}} G^{j+1}(x,\xi)f(\xi,Y_2^j(\xi,u))\,d\xi+u^{(0)}(x),\qquad x\in[x_{j-1},x_j].$$

Таким чином, питання існування та єдиності розв'язку задачі (18), (19) еквівалентне до аналогічної проблеми для рівнянь

$$U_\alpha^j(x)=\Im_\alpha^j(x,u,U_\alpha^j)=\frac{e^{-m^2x_{j-2+\alpha}}-e^{-m^2x}}{e^{-m^2x_{j-2+\alpha}}-e^{-m^2x_{j-1+\alpha}}}\int_0^\infty G(x_{j-1+\alpha},\xi)f(\xi,u)\,d\xi+$$

$$+\frac{e^{-m^2x}-e^{-m^2x_{j-1+\alpha}}}{e^{-m^2x_{j-2+\alpha}}-e^{-m^2x_{j-1+\alpha}}}\int_0^\infty G(x_{j-2+\alpha},\xi)f(\xi,u)\,d\xi+$$

$$+\int_{x_{j-2+\alpha}}^{x_{j-1+\alpha}} G^{j-1+\alpha}(x,\xi)f(\xi,U_\alpha^j(\xi,u))\,d\xi+u^{(0)}(x),$$

$$x\in[x_{j-2+\alpha},x_{j-1+\alpha}],\quad j=2-\alpha,\,3-\alpha,\ldots,N+1-\alpha,\ \alpha=1,2,\qquad (21)$$

$$U_2^N(x)=\Im_2^N(x,u,U_2^N)=e^{-m^2(x-x_N)}\int_0^\infty G(x_N,\xi)f(\xi,u)\,d\xi+$$

$$+\int_{x_N}^\infty G^\infty(x,\xi)f(\xi,U_2^N(\xi,u))\,d\xi+u^{(0)}(x),\qquad x\ge x_N.\qquad (22)$$

Покажемо, що оператори $\Im_\alpha^j(x,u,U_\alpha^j)$, $\Im_2^N(x,u,U_2^N)$ переводять відповідно множини $\Omega([x_{j-2+\alpha},x_{j-1+\alpha}],r)$, $\Omega([x_N,\infty),r)$ в себе.

Нехай $U_\alpha^j(x)\in\Omega([x_{j-2+\alpha},x_{j-1+\alpha}],r)$, $U_2^N(x)\in\Omega([x_N,\infty),r)$. Тоді

$$\left\|\Im_\alpha^j(x,u,U_\alpha^j)-u^{(0)}(x)\right\|_{1,\infty,[x_{j-2+\alpha},x_{j-1+\alpha}]}\le$$

$$\le\Bigg\|\frac{e^{-m^2x_{j-2+\alpha}}-e^{-m^2x}}{e^{-m^2x_{j-2+\alpha}}-e^{-m^2x_{j-1+\alpha}}}\int_0^\infty G(x_{j-1+\alpha},\xi)K(\xi)\,d\xi+$$

$$+\frac{e^{-m^2x}-e^{-m^2x_{j-1+\alpha}}}{e^{-m^2x_{j-2+\alpha}}-e^{-m^2x_{j-1+\alpha}}}\int_0^\infty G(x_{j-2+\alpha},\xi)K(\xi)\,d\xi+$$

$$+\int_{x_{j-2+\alpha}}^{x_{j-1+\alpha}} G^{j-1+\alpha}(x,\xi)K(\xi)\,d\xi\Bigg\|_{1,\infty,[x_{j-2+\alpha},x_{j-1+\alpha}]}=$$

$$=\left\|\frac{e^{-m^2x}}{m^2}\int_0^x\left(e^{m^2\xi}-1\right)K(\xi)\,d\xi+\frac{1-e^{-m^2x}}{m^2}\int_x^\infty K(\xi)\,d\xi\right\|_{1,\infty,[x_{j-2+\alpha},x_{j-1+\alpha}]}\le$$

$$\le \left\| \frac{1-e^{-m^2 x}}{m^2} \int\limits_0^\infty K(\xi)\,d\xi \right\|_{1,\infty,[x_{j-2+\alpha},x_{j-1+\alpha}]} \le r\,,$$

$$\left\| \Im_2^N(x,u,U_2^N) - u^{(0)}(x) \right\|_{1,\infty,[x_N,\infty)} \le$$

$$\le \left\| e^{-m^2(x-x_N)} \int\limits_0^\infty G(x_N,\xi) K(\xi)\,d\xi + \int\limits_{x_N}^\infty G^\infty(x,\xi) K(\xi)\,d\xi \right\|_{1,\infty,[x_N,\infty)} =$$

$$= \left\| \frac{e^{-m^2 x}}{m^2} \int\limits_0^x \left(e^{m^2\xi} - 1\right) K(\xi)\,d\xi + \frac{1-e^{-m^2 x}}{m^2} \int\limits_x^\infty K(\xi)\,d\xi \right\|_{1,\infty,[x_N,\infty)} \le$$

$$\le \left\| \frac{1-e^{-m^2 x}}{m^2} \int\limits_0^\infty K(\xi)\,d\xi \right\|_{1,\infty,[x_N,\infty)} \le r\,.$$

Крім того,

$$\left\| \Im_\alpha^j(x,u,U_\alpha^j) - \Im_\alpha^j(x,u,\tilde U_\alpha^j) \right\|_{1,\infty,[x_{j-2+\alpha},x_{j-1+\alpha}]} \le$$

$$\le \left\| \int\limits_{x_{j-2+\alpha}}^{x_{j-1+\alpha}} G^{j-1+\alpha}(x,\xi) \mathcal{L}(\xi)\,d\xi \right\|_{1,\infty,[x_{j-2+\alpha},x_{j-1+\alpha}]} \left\| U_\alpha^j - \tilde U_\alpha^j \right\|_{1,\infty,[x_{j-2+\alpha},x_{j-1+\alpha}]} \le$$

$$\le \left\| \frac{1-e^{-m^2(x_{j-1+\alpha}-x)}}{m^2} \int\limits_0^\infty \mathcal{L}(\xi)\,d\xi \right\|_{1,\infty,[x_{j-2+\alpha},x_{j-1+\alpha}]} \left\| U_\alpha^j - \tilde U_\alpha^j \right\|_{1,\infty,[x_{j-2+\alpha},x_{j-1+\alpha}]} \le$$

$$\le q \left\| U_\alpha^j - \tilde U_\alpha^j \right\|_{1,\infty,[x_{j-2+\alpha},x_{j-1+\alpha}]}\,,$$

$$\left\| \Im_2^N(x,u,U_2^N) - \Im_2^N(x,u,\tilde U_2^N) \right\|_{1,\infty,[x_N,\infty)} \le$$

$$\le \left\| \int\limits_{x_N}^\infty G^\infty(x,\xi) \mathcal{L}(\xi)\,d\xi \right\|_{1,\infty,[x_N,\infty)} \left\| U_2^N - \tilde U_2^N \right\|_{1,\infty,[x_N,\infty)} \le$$

$$\le \left\| \frac{1-e^{-m^2(x-x_N)}}{m^2} \int\limits_0^\infty \mathcal{L}(\xi)\,d\xi \right\|_{1,\infty,[x_N,\infty)} \left\| U_2^N - \tilde U_2^N \right\|_{1,\infty,[x_N,\infty)} \le$$

$$\le q \left\| U_2^N - \tilde U_2^N \right\|_{1,\infty,[x_N,\infty)}\,.$$

Отже, для операторів (21), (22) в областях відповідно $\Omega\left([x_{j-2+\alpha}, x_{j-1+\alpha}], r\right)$ та $\Omega\left([x_N,\infty), r\right)$ виконані всі умови принципу стискуючих відображень, а тому задачі (12), (13) і (14), (15) мають єдиний розв'язок. ◊

Теорема 2. *Нехай виконуються умови теореми* 1. *Тоді для задачі* (1), (2) *існує ТТРС вигляду*

$$(a_j u_{\bar x})_{\hat x, j} = -\hat T^{x_j}(f(\xi,u(\xi))), \qquad j = 1,2,\ldots,N-1\,, \tag{23}$$

$$u_0 = \mu_1, \qquad -a_N u_{\bar x,N} = \beta_2 u_N - \hat{\hat T}^{x_N}(f(\xi,u(\xi)))\,, \tag{24}$$

де

$$u_{\bar x,j} = \frac{u_j - u_{j-1}}{h_j}, \quad u_{\hat x,j} = \frac{u_{j+1}-u_j}{\hbar_j}, \quad \hbar_j = \frac{h_j + h_{j+1}}{2}, \quad a_j = \frac{m^2 h_j}{e^{-m^2 x_{j-1}} - e^{-m^2 x_j}}\,,$$

$$j = 1,2,\ldots,N, \qquad \beta_2 = m^2 e^{m^2 x_N}\,,$$

$$\hat{T}^{x_j}(f(\xi,u(\xi))) = \frac{1}{\hbar_j\left(e^{-m^2x_{j-1}} - e^{-m^2x_j}\right)}\int\limits_{x_{j-1}}^{x_j}\left(e^{m^2(\xi-x_{j-1})} - 1\right)f(\xi,u(\xi))\,d\xi +$$

$$+\frac{1}{\hbar_j\left(e^{-m^2x_j} - e^{-m^2x_{j+1}}\right)}\int\limits_{x_j}^{x_{j+1}}\left(1 - e^{m^2(\xi-x_{j+1})}\right)f(\xi,u(\xi))\,d\xi\,,$$

$$j = 1,2,\dots,N-1\,,$$

$$\hat{\hat{T}}^{x_N}(f(\xi,u(\xi))) = e^{m^2x_N}\int\limits_{x_N}^{\infty} f(\xi,u(\xi))\,d\xi +$$

$$+\frac{1}{e^{-m^2x_{N-1}} - e^{-m^2x_N}}\int\limits_{x_{N-1}}^{x_N}\left(e^{m^2(\xi-x_{N-1})} - 1\right)f(\xi,u(\xi))\,d\xi\,.$$

Функція $u(\xi)$ *в правих частинах* (23), (24) *визначається за формулами* (16), (17) *і залежить тільки від* $u_0, u_1, \dots, u_N$.

Д о в е д е н н я. Для задачі

$$\frac{d^2\tilde{u}}{dx^2} + m^2\frac{d\tilde{u}}{dx} = -f(x,\tilde{u}),\quad x\in(0,x_{N+1}),\qquad \tilde{u}(0) = \mu_1,\qquad \tilde{u}(x_{N+1}) = 0$$

ТТРС має вигляд

$$\left(a\tilde{u}_{\bar{x}}\right)_{\hat{x}} = -\hat{T}^x(f(\xi,\tilde{u}(\xi))),\qquad x\in\hat{\omega}_N^+,\qquad \tilde{u}(0) = \mu_1,\quad \tilde{u}(x_{N+1}) = 0\,. \tag{25}$$

Помножимо обидві частини рівняння (25) при $x = x_N$ на $\hbar_N = \frac{1}{2}(h_{N+1} + h_N)$, $h_{N+1} = x_{N+1} - x_N$, і перейдемо до границі при $x_{N+1}\to\infty$, тоді одержимо (23), (24). ◊

Єдиність розв'язку нелінійної ТТРС (23), (24) встановлює

Лема 2. *Нехай виконані умови теореми* 1. *Тоді існує таке* $h_0 > 0$, *що при* $|h| \le h_0$ *ТТРС* (23), (24) *буде мати єдиний розв'язок* $\forall(u_j)_{j=0}^N \in \Omega(\hat{\bar{\omega}}_N, r)$, *який може бути одержаний методом послідовних наближень*:

$$(au_{\bar{x}}^{(k)})_{\hat{x},j} = -\hat{T}^{x_j}(f(\xi,u^{(k-1)}(\xi))),\qquad j = 1,2,\dots,N-1\,, \tag{26}$$

$$u_0^{(k)} = \mu_1,\qquad -a(x_N)u_{\bar{x},N}^{(k)} = \beta_2 u_N^{(k)} - \hat{\hat{T}}^{x_N}(f(\xi,u^{(k-1)}(\xi)))\,, \tag{27}$$

$$u^{(k)}(x) = Y_\alpha^j(x,u^{(k)}),\qquad x\in[x_{j-2+\alpha}, x_{j-1+\alpha}]\,,$$

$$j = 2-\alpha, 3-\alpha,\dots,N+1-\alpha,\qquad \alpha = 1,2\,,$$

$$u^{(k)}(x) = Y_2^N(x,u^{(k)}),\quad x\in[x_N,\infty),\qquad k = 1,2,\dots,\quad u^{(0)}(x) = \mu_1 e^{-m^2x}\,,$$

з оцінкою похибки

$$\left\|u^{(k)} - u\right\|_{1,\infty,\hat{\omega}_N^+}^* = \max\left\{\left\|u^{(k)} - u\right\|_{0,\infty,\hat{\omega}_N^+},\ \left\|\frac{du^{(k)}}{dx} - \frac{du}{dx}\right\|_{0,\infty,\hat{\omega}_N^+}\right\} \le \frac{q_1^k}{1-q_1}r\,, \tag{28}$$

де $q_1 = q + M_1|h| < 1$, M, M_1 − *константи.*

Д о в е д е н н я. Оскільки різницева схема (23), (24) є точною, то її розв'язок для $\forall x\in\hat{\bar{\omega}}_N$ можна записати у вигляді

$$u(x) = \Re_h(x,u) = \int\limits_0^{\infty} G(x,\eta)f(\eta,u(\eta))\,d\eta + u^{(0)}(x) =$$

$$= \sum_{i=1}^{N}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} G(x,\eta)f(\eta,u(\eta))\,d\eta + \int\limits_{x_N}^{\infty} G(x,\eta)f(\eta,u(\eta))\,d\eta + u^{(0)}(x)\,, \tag{29}$$

де

$$u(\eta) = \Upsilon_1^i(\eta, u),\ \ \eta \in [x_{i-1}, x_i],\ \ i = 1,2,\dots,N, \quad u(\eta) = \Upsilon_2^N(\eta, u), \quad \eta \in [x_N, \infty).$$

Дослідимо властивості оператора $\Re_h(x,u)$. Оператор (29) переводить множину $\Omega(\hat{\bar{\omega}}_N, r)$ в себе. Нехай $(v_j)_{j=0}^N \in \Omega(\hat{\bar{\omega}}_N, r)$, тоді

$$v(x) = \Upsilon_1^i(x, v) \in \Omega([x_{j-1}, x_j], r), \qquad v(x) = \Upsilon_2^N(x, v) \in \Omega([x_N, \infty), r),$$

$$\left\| \Re_h(x,v) - u^{(0)} \right\|^*_{1,\infty,\hat{\omega}_N^+} \le \left\| \int_0^\infty G(x,\eta) K(\eta)\, d\eta \right\|^*_{1,\infty,\hat{\omega}_N^+} \le r \qquad \forall (v_j)_{j=0}^N \in \Omega(\hat{\bar{\omega}}_N, r).$$

Крім того,

$$\left\| \Re_h(x,u) - \Re_h(x,v) \right\|^*_{1,\infty,\hat{\omega}_N^+} \le q \left\| u - v \right\|_{1,\infty,[0,\infty)} \quad \forall (u_j)_{j=0}^N,\ (v_j)_{j=0}^N \in \Omega(\hat{\bar{\omega}}_N, r). \quad (30)$$

Покажемо, що

$$\left\| u - v \right\|_{1,\infty,[0,\infty)} \le (1 + M|h|) \left\| u - v \right\|^*_{1,\infty,\hat{\omega}_N^+}. \qquad (31)$$

Для цього розглянемо крайові задачі

$$\frac{d^2u}{dx^2} + m^2 \frac{du}{dx} = -f(x,u), \quad x \in (x_{j-1}, x_j), \quad u(x_{j-1}) = u_{j-1}, \quad u(x_j) = u_j,$$
$$j = 1,2,\dots,N,$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} + m^2 \frac{du}{dx} = -f(x,u), \quad x \in (x_N, \infty), \quad u(x_N) = u_N, \quad \lim_{x\to\infty} u(x) = 0,$$

розв'язки яких запишемо у вигляді

$$u(x) = \int_{x_{j-1}}^{x_j} G^j(x,\xi) f(\xi, u(\xi))\, d\xi + \hat{u}(x), \qquad x_{j-1} \le x \le x_j, \quad j = 1,2,\dots,N,$$

$$u(x) = \int_{x_N}^{\infty} G^\infty(x,\xi) f(\xi, u(\xi))\, d\xi + u_N e^{-m^2(x - x_N)}, \qquad x \ge x_N,$$

де

$$\hat{u}(x) = \frac{u(x_j)\left(e^{-m^2 x_{j-1}} - e^{-m^2 x}\right) + u(x_{j-1})\left(e^{-m^2 x} - e^{-m^2 x_j}\right)}{e^{-m^2 x_{j-1}} - e^{-m^2 x_j}}, \quad x \in [x_{j-1}, x_j],$$
$$j = 1,2,\dots,N,$$

$$G^j(x,\xi) = \begin{cases} \dfrac{\left(e^{-m^2 x_{j-1}} - e^{-m^2 x}\right)\left(1 - e^{-m^2(x_j - \xi)}\right)}{m^2\left(e^{-m^2 x_{j-1}} - e^{-m^2 x_j}\right)}, & x_{j-1} \le x \le \xi, \\[2ex] \dfrac{\left(e^{-m^2 x} - e^{-m^2 x_j}\right)\left(e^{m^2(\xi - x_{j-1})} - 1\right)}{m^2\left(e^{-m^2 x_{j-1}} - e^{-m^2 x_j}\right)}, & \xi \le x \le x_j, \end{cases} \qquad j = 1,2,\dots,N,$$

а $G^\infty(x,\xi)$ задається за формулою (20).

На підставі умови Ліпшиця

$$\left\| u - v \right\|_{1,\infty,[x_{j-1},x_j]} \le \left\| \int_{x_{j-1}}^{x_j} G^j(x,\xi) \mathcal{L}(\xi)\, d\xi \right\|_{1,\infty,[x_{j-1},x_j]} \left\| u - v \right\|_{1,\infty,[x_{j-1},x_j]} +$$
$$+ \left\| \hat{u} - \hat{v} \right\|_{1,\infty,[x_{j-1},x_j]}, \qquad j = 1,\dots,N,$$

$$\left\| u - v \right\|_{1,\infty,[x_N,\infty)} \le \left\| \int_{x_N}^{\infty} G^\infty(x,\xi) \mathcal{L}(\xi)\, d\xi \right\|_{1,\infty,[x_N,\infty)} \left\| u - v \right\|_{1,\infty,[x_N,\infty)} +$$
$$+ \left\| \left| u_N - v_N \right| e^{-m^2(x - x_N)} \right\|_{1,\infty,[x_N,\infty)}.$$

Оскільки

$$\|\hat{u}-\hat{v}\|_{0,\infty,[x_{j-1},x_j]} \le \max_{x\in[x_{j-1},x_j]}\left\{\frac{|u_j-v_j|\left(e^{-m^2x_{j-1}}-e^{-m^2x}\right)}{e^{-m^2x_{j-1}}-e^{-m^2x_j}}+\right.$$

$$\left.+\frac{|u_{j-1}-v_{j-1}|\left(e^{-m^2x}-e^{-m^2x_j}\right)}{e^{-m^2x_{j-1}}-e^{-m^2x_j}}\right\} \le \|u-v\|_{0,\infty,\hat{\omega}_N^+},$$

$$\left\|\frac{d\hat{u}}{dx}-\frac{d\hat{v}}{dx}\right\|_{0,\infty,[x_{j-1},x_j]} = \max_{x\in[x_{j-1},x_j]}\left|\frac{m^2h_je^{-m^2x}(u_{\bar{x},j}-v_{\bar{x},j})}{e^{-m^2x_{j-1}}-e^{-m^2x_j}}\right| =$$

$$=\frac{m^2h_j\left|u_{\bar{x},j}-v_{\bar{x},j}\right|}{1-e^{-m^2h_j}} \le (1+M_1|h|)\left\|\frac{du}{dx}-\frac{dv}{dx}\right\|_{0,\infty,\hat{\omega}_N^+},$$

$$\left\|(u_N-v_N)e^{-m^2(x-x_N)}\right\|_{1,\infty,[x_N,\infty)} \le (1+M_2|h|)\|u-v\|^*_{1,\infty,\hat{\omega}_N^+},$$

то

$$\|u-v\|_{1,\infty,[x_{j-1},x_j]} \le (1+M_1|h|)\|u-v\|^*_{1,\infty,\hat{\omega}_N^+} + |h|M_3\|u-v\|_{1,\infty,[x_{j-1},x_j]},$$

$$\|u-v\|_{1,\infty,[x_N,\infty)} \le (1+M_2|h|)\|u-v\|^*_{1,\infty,\hat{\omega}_N^+} + |h|M_4\|u-v\|_{1,\infty,[x_N,\infty)}.$$

Звідси отримаємо оцінки

$$\|u-v\|_{1,\infty,[x_{j-1},x_j]} \le \frac{1+M_1|h|}{1-|h|M_3}\|u-v\|^*_{1,\infty,\hat{\omega}_N^+} \le (1+|h|M)\|u-v\|^*_{1,\infty,\hat{\omega}_N^+},$$

$$j=1,2,\ldots,N,$$

$$\|u-v\|_{1,\infty,[x_{N-1},\infty)} \le \frac{1+M_2|h|}{1-|h|M_4}\|u-v\|^*_{1,\infty,\hat{\omega}_N^+} \le (1+|h|M)\|u-v\|^*_{1,\infty,\hat{\omega}_N^+},$$

з яких випливає нерівність (31).

Враховуючи (31), з оцінки (30) отримаємо

$$\|\Re_h(x,u)-\Re_h(x,v)\|^*_{1,\infty,\hat{\omega}_N^+} \le (q+M_1|h|)\|u-v\|^*_{1,\infty,\hat{\omega}_N^+} = q_1\|u-v\|^*_{1,\infty,\hat{\omega}_N^+}.$$

Оскільки на підставі (5) $q<1$, то $q_1<1$ при достатньо малому h_0 і оператор (29) для $\forall (u_j)_{j=0}^N$, $(v_j)_{j=0}^N \in \Omega(\hat{\bar{\omega}}_N, r)$ здійснює стискуюче відображення. Таким чином, згідно з принципом стискуючих відображень при достатньо малому h_0 ТТРС (23), (24) має єдиний розв'язок, який може бути отриманий методом послідовних наближень (26), (27) з оцінкою похибки (28). ◊

Лема 3. *Нехай існує стала* $\Delta>0$ *така, що умови* (3), (4) *справджуються в області* $\Omega([0,\infty], r+\Delta)$. *Тоді існує таке* $h_0>0$, *що при* $|h|\le h_0$ *і* $\forall (v_j)_{j=0}^N \in$ $\in \Omega(\hat{\bar{\omega}}_N, r)$ *задачі*

$$\frac{d^2Y_\alpha^j(x,v)}{dx^2}+m^2\frac{dY_\alpha^j(x,v)}{dx} = -f(x,Y_\alpha^j(x,v)), \quad x_{j-2+\alpha}<x<x_{j-1+\alpha}, \tag{32}$$

$$Y_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha},v)=v(x_{j+(-1)^\alpha}), \qquad \frac{dY_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha},v)}{dx}=\left.\frac{dv}{dx}\right|_{x=x_{j+(-1)^\alpha}},$$

$$j=2-\alpha,3-\alpha,\ldots,N+1-\alpha, \quad \alpha=1,2, \tag{33}$$

$$\frac{d^2Y_2^N(x,v)}{dx^2}+m^2\frac{dY_2^N(x,v)}{dx} = -f(x,Y_2^N(x,v)), \quad x>x_N, \tag{34}$$

$$Y_2^N(x_N,v)=v(x_N), \qquad \lim_{x\to\infty}Y_2^N(x,v)=0 \tag{35}$$

будуть мати єдиний розв'язок.

Д о в е д е н н я. Задачі (32), (33) і (34), (35) еквівалентні відповідно операторним рівнянням

$$U_\alpha^j(x) = \Re_\alpha^j(x,v,U_\alpha^j) = -\frac{1}{m^2}\int\limits_{x_{j+(-1)^\alpha}}^{x}\left(1-e^{-m^2(x-\xi)}\right)f(\xi,U_\alpha^j)\,d\xi + v_{j+(-1)^\alpha} +$$

$$+\frac{1-e^{-m^2(x-x_{j+(-1)^\alpha})}}{m^2}\left.\frac{dv}{dx}\right|_{x=x_{j+(-1)^\alpha}}, \qquad x\in[x_{j-2+\alpha},x_{j-1+\alpha}],$$

$$j = 2-\alpha,\ 3-\alpha,\dots,N+1-\alpha, \quad \alpha = 1,2,$$

$$U_2^N(x) = \Re_2^N(x,v,U_2^N) = \int\limits_{x_N}^{\infty} G^\infty(x,\xi)f(\xi,U_2^N(\xi,v))\,d\xi + v_N e^{-m^2(x-x_N)},$$

$$x\in[x_N,\infty),$$

де $G^\infty(x,\xi)$ задається за формулою (20).

Дослідимо властивості операторів $\Re_\alpha^j(x,v,U_\alpha^j)$, $\alpha=1,2$, $\Re_2^N(x,v,U_2^N)$. Зазначимо, що

$$u^{(0)}(x)=\mu_1 e^{-m^2x} = u^{(0)}_{j+(-1)^\alpha} + \frac{1-e^{-m^2(x-x_{j+(-1)^\alpha})}}{m^2}\left.\frac{du^{(0)}}{dx}\right|_{x=x_{j+(-1)^\alpha}},$$

$$x\in[x_{j-2+\alpha},x_{j-1+\alpha}],$$

$$u^{(0)}(x) = u_N^{(0)}e^{-m^2(x-x_N)}, \qquad x\in[x_N,\infty).$$

Нехай $U_\alpha^j \in \Omega([x_{j-2+\alpha},x_{j-1+\alpha}],r+\Delta)$, $U_2^N \in \Omega([x_N,\infty),r+\Delta)$, тоді

$$\left\|\Re_\alpha^j(x,v,U_\alpha^j) - u^{(0)}\right\|_{1,\infty,[x_{j-2+\alpha},x_{j-1+\alpha}]} \le \Bigg\| \left|v_{j+(-1)^\alpha} - u^{(0)}_{j+(-1)^\alpha}\right| +$$

$$+(-1)^{\alpha+1}\frac{1-e^{-m^2(x-x_{j+(-1)^\alpha})}}{m^2}\left|\left.\frac{du^{(0)}}{dx}\right|_{x=x_{j+(-1)^\alpha}} - \left.\frac{dv}{dx}\right|_{x=x_{j+(-1)^\alpha}}\right| +$$

$$+(-1)^{\alpha+1}\frac{1-e^{-m^2(x-x_{j+(-1)^\alpha})}}{m^2}\int\limits_0^\infty K(\xi)\,d\xi\Bigg\|_{1,\infty,[x_{j-2+\alpha},x_{j-1+\alpha}]} \le r+\Delta,$$

$$\left\|\Re_2^N(x,v,U_2^N) - u^{(0)}\right\|_{1,\infty,[x_N,\infty)} \le \Bigg\|\frac{e^{-m^2x}}{m^2}\int\limits_{x_N}^{x}\left(e^{m^2\xi}-e^{m^2x_N}\right)K(\xi)\,d\xi +$$

$$+\left|v_N - u_N^{(0)}\right|e^{-m^2(x-x_N)} + \frac{1-e^{-m^2(x-x_N)}}{m^2}\int\limits_x^\infty K(\xi)\,d\xi\Bigg\|_{1,\infty,[x_N,\infty)} \le$$

$$\le \left\| re^{-m^2(x-x_N)} + \frac{1-e^{-m^2(x-x_N)}}{m^2}\int\limits_{x_N}^\infty K(\xi)\,d\xi\right\|_{1,\infty,[x_N,\infty)} = r+\Delta$$

$$\forall (v_j)_{j=0}^N \in \Omega(\hat{\bar{\omega}}_N, r),$$

тобто оператори $\Re_\alpha^j(x,v,U_\alpha^j)$, $\alpha=1,2$, $\Re_2^N(x,v,U_2^N)$ переводять відповідно множини $\Omega([x_{j-2+\alpha},x_{j-1+\alpha}],r+\Delta)$, $\Omega([x_N,\infty),r+\Delta)$ в себе.

Крім того,

$$\left\|\Re_\alpha^j(x,v,U_\alpha^j)-\Re_\alpha^j(x,v,\tilde U_\alpha^j)\right\|_{1,\infty,[x_{j-2+\alpha},x_{j-1+\alpha}]}\le$$

$$\le\left\|\int\limits_{x_{j+(-1)^\alpha}}^{x}\frac{1-e^{-m^2(x-\xi)}}{m^2}\,\mathcal{L}(\xi)\,d\xi\right\|_{1,\infty,[x_{j-2+\alpha},x_{j-1+\alpha}]}\times$$

$$\times\left\|U_\alpha^j-\tilde U_\alpha^j\right\|_{1,\infty,[x_{j-2+\alpha},x_{j-1+\alpha}]}\le$$

$$\le\left\|\frac{1-e^{-m^2(x-x_{j+(-1)^\alpha})}}{m^2}\int\limits_{x_{j+(-1)^\alpha}}^{x}\mathcal{L}(\xi)\,d\xi\right\|_{1,\infty,[x_{j-2+\alpha},x_{j-1+\alpha}]}\times$$

$$\times\left\|U_\alpha^j-\tilde U_\alpha^j\right\|_{1,\infty,[x_{j-2+\alpha},x_{j-1+\alpha}]}\le q|h|\left\|U_\alpha^j-\tilde U_\alpha^j\right\|_{1,\infty,[x_{j-2+\alpha},x_{j-1+\alpha}]},$$

$$\left\|\Re_2^N(x,v,U_2^N)-\Re_2^N(x,v,\tilde U_2^N)\right\|_{1,\infty,[x_N,\infty)}\le$$

$$\le\left\|\frac{1-e^{-m^2(x-x_N)}}{m^2}\int\limits_{x_N}^{x}\mathcal{L}(\xi)\,d\xi\right\|_{1,\infty,[x_N,\infty)}\left\|U_\alpha^j-\tilde U_\alpha^j\right\|_{1,\infty,[x_N,\infty)}\le$$

$$\le q\left\|U_2^N-\tilde U_2^N\right\|_{1,\infty,[x_N,\infty)}.$$

Оскільки на підставі (5) $q<1$, а $q|h|<1$ при достатньо малому h_0, то оператори $\Re_\alpha^j(x,v,U_\alpha^j)$, $\alpha=1,2$, $\Re_2^N(x,v,U_2^N)$ здійснюють стискуюче відображення. Таким чином, згідно з принципом стискуючих відображень, при достатньо малому h_0 задачі (32), (33) і (34), (35) матимуть єдиний розв'язок.

Оскільки

$$\int\limits_{x_j}^{x_{j+(-1)^\alpha}}\left(1-e^{-m^2(\xi-x_{j+(-1)^\alpha})}\right)f(\xi,u)\,d\xi=-\left(1-e^{-m^2(x_j-x_{j+(-1)^\alpha})}\right)Z_\alpha^j(x_j,u)+$$

$$+m^2\left(Y_\alpha^j(x_j,u)-u_{j+(-1)^\alpha}\right),\qquad\alpha=1,2,$$

$$\int\limits_{x_N}^{\infty}f(\xi,u)\,d\xi=Z_2^N(x_N,u)+m^2u_N,$$

то

$$\varphi(x_j,u)=\hat T^{x_j}(f(\xi,u(\xi)))=\frac{1}{\hbar_j}\Bigg[e^{m^2x_j}\left(Z_2^j(x_j,u)-Z_1^j(x_j,u)\right)+$$

$$+\frac{m^2\left(Y_1^j(x_j,u)-u_{j-1}\right)}{e^{-m^2x_{j-1}}-e^{-m^2x_j}}+\frac{m^2\left(Y_2^j(x_j,u)-u_{j+1}\right)}{e^{-m^2x_j}-e^{-m^2x_{j+1}}}\Bigg],$$

$$j=1,2,\ldots,N-1,$$

$$\mu_2(x_N,u)=\hat{\hat T}^{x_N}(f(\xi,u(\xi)))=e^{m^2x_N}\left(Z_2^N(x_N,u)-Z_1^N(x_N,u)\right)+$$

$$+m^2e^{m^2x_N}u_N+\frac{Y_1^N(x_N,u)-u_{N-1}}{e^{-m^2x_{N-1}}-e^{-m^2x_N}},$$

де $Y_\alpha^j(x_j,u)$, $Z_\alpha^j(x_j,u)$, $\alpha=1,2$, – розв'язки задач Коші

$$\frac{dY_\alpha^j(x,u)}{dx}=Z_\alpha^j(x,u),$$

$$\frac{dZ_\alpha^j(x,u)}{dx}+m^2Z_\alpha^j(x,u)=-f(x,Y_\alpha^j(x,u)),\qquad x_{j-2+\alpha}<x<x_{j-1+\alpha},\tag{36}$$

$$\mathrm{Y}_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha}, u) = u_{j+(-1)^\alpha}, \qquad Z_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha}, u) = \left.\frac{du}{dx}\right|_{x=x_{j+(-1)^\alpha}},$$

$$j = 2-\alpha, 3-\alpha, \ldots, N+1-\alpha, \quad \alpha = 1,2, \tag{37}$$

а $Y_2^N(x_N, u)$, $Z_2^N(x_N, u)$ – розв'язки крайової задачі

$$\frac{dY_2^N(x,u)}{dx} = Z_2^N(x,u),$$

$$\frac{dZ_2^N(x,u)}{dx} + m^2 Z_2^N(x,u) = -f(x, \mathrm{Y}_2^N(x,u)), \qquad x > x_N, \tag{38}$$

$$\mathrm{Y}_2^N(x_N, u) = u_N, \qquad \lim_{x\to\infty} \mathrm{Y}_2^N(x,u) = 0. \tag{39}$$

Отже, для побудови ТТРС (23), (24) необхідно для $\forall x_j \in \hat{\omega}_N$ розв'язати дві задачі Коші (36), (37) на відрізках: $[x_{j-1}, x_j]$ (вперед) і $[x_j, x_{j+1}]$ (назад) та крайову задачу (38), (39) на інтервалі $[x_N, \infty)$. Якщо задачі (36), (37) і (38), (39) розв'язувати чисельно, то можна побудувати відсічену триточкову різницеву схему. ◊

1. *Куфнер А., Фучик С.* Нелинейные дифференциальные уравнения. – Москва: Наука, 1988. – 304 с.
2. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. – Москва: Наука, 1980. – 496 с.
3. *Gavrilyuk I. P., Hermann M., Kutniv M. V., Makarov V. L.* Difference schemes for nonlinear BVPs on the semiaxis // Comput. Methods in Appl. Math. – 2007. – **7**, No. 1. – P. 25–47.
4. *Gavrilyuk I. P., Hermann M., Kutniv M. V., Makarov V. L.* Three-point difference schemes of variable order for nonlinear BVPs on the half-axis // Techn. Report 05–04: Friedrich Schiller University Jena, Dpt. Math. and Comput. Sci., 2005. – P. 1–37.

ТОЧНАЯ ТРЕХТОЧЕЧНАЯ РАЗНОСТНАЯ СХЕМА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ НА ПОЛУОСИ

Для численного решения краевых задач на полуоси для нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка построена и обоснована точная трехточечная разностная схема. При условиях существования и единственности решения краевой задачи доказаны существование и единственность решения точной трехточечной разностной схемы, а также сходимость метода последовательных приближений для ее решения.

EXACT THREE-POINT DIFFERENCE SCHEME FOR NONLINEAR BOUNDARY-VALUE PROBLEM ON SEMI-AXIS

For numerical solving of boundary-value problems on the semi-axis for the second order nonlinear ordinary differential equations the three-point exact difference scheme is constructed and well-founded. Under conditions of existence and uniqueness of the solution of boundary-value problem the existence and uniqueness of the solution of three-point exact difference scheme and also convergence of iterative method of successive approximations for its solution are proved.

Нац. ун-т «Львів. політехніка», Львів

Одержано
12.03.10