УДК 517.95

Г. А. Снітко

ОБЕРНЕНА ЗАДАЧА ВИЗНАЧЕННЯ ЗАЛЕЖНИХ ВІД ЧАСУ КОЕФІЦІЄНТІВ ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ В ОБЛАСТІ З ВІЛЬНОЮ МЕЖЕЮ

Встановлено умови однозначної розв'язності оберненої задачі визначення залежних від часу коефіцієнтів одновимірного параболічного рівняння в області з вільною межею.

Вагоме місце в теорії обернених задач займають коефіцієнтні задачі, в яких невідомими є один або декілька коефіцієнтів рівняння. Задачі такого типу достатньо повно вивчені. Зокрема, задачі визначення залежних від часу старшого та молодших коефіцієнтів в одновимірних параболічних рівняннях в областях з відомими межами досліджено в [4–8]. Багато практичних задач зводиться до задач з вільними межами, типовим представником яких є задача Стефана. Задачі з вільними межами можна трактувати як обернені, оскільки заміною змінних зводяться до коефіцієнтних обернених задач в областях з відомими межами. Такий підхід дозволяє об'єднати два типи задач – коефіцієнтні обернені задачі та задачі з вільними межами – в один. Зазначимо, що в [1, 2] знайдено умови однозначної розв'язності обернених задач для одновимірних параболічних рівнянь з невідомим залежним від часу старшим коефіцієнтом в області, частина або вся межа якої є невідомою. У цій роботі досліджується обернена задача для одновимірного параболічного рівняння з невідомими залежними від часу старшим та молодшими коефіцієнтами в області з невідомою ділянкою межі.

В області $\Omega_T = \{(x,t) : 0 < x < h(t),\ 0 < t < T\}$, де $h = h(t)$ – невідома функція, розглядаємо обернену задачу визначення коефіцієнтів $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ у параболічному рівнянні

$$u_t = a(t)u_{xx} + b(t)u_x + c(t)u + f(x,t), \qquad (x,t) \in \Omega_T, \tag{1}$$

з початковою умовою

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad x \in [0, h(0)], \tag{2}$$

крайовими умовами

$$u(0,t) = \mu_1(t), \qquad u(h(t),t) = \mu_2(t), \qquad t \in [0,T], \tag{3}$$

та умовами перевизначення

$$a(t)u_x(0,t) = \mu_3(t), \qquad h'(t) = -u_x(h(t),t) + \mu_4(t),$$
$$\int_0^{h(t)} u(x,t)\,dx = \mu_5(t), \qquad \int_0^{h(t)} xu(x,t)\,dx = \mu_6(t), \qquad t \in [0,T]. \tag{4}$$

Увівши нову змінну $y = \dfrac{x}{h(t)}$, зводимо задачу (1)–(4) до оберненої задачі з невідомими $h(t)$, $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$, $v(y,t)$, де $v(y,t) = u(yh(t),t)$, в області з відомою межею $Q_T = \{(y,t) : 0 < y < 1,\ 0 < t < T\}$:

$$v_t = \frac{a(t)}{h^2(t)} v_{yy} + \frac{b(t) + yh'(t)}{h(t)} v_y + c(t)v + f(yh(t),t), \qquad (y,t) \in Q_T, \tag{5}$$

$$v(y,0) = \varphi(yh(0)), \qquad y \in [0,1], \tag{6}$$

$$v(0,t) = \mu_1(t), \qquad v(1,t) = \mu_2(t), \qquad t \in [0,T], \tag{7}$$

$$a(t)v_y(0,t) = h(t)\mu_3(t), \qquad t \in [0,T], \tag{8}$$

$$h'(t) = -\frac{1}{h(t)} v_y(1,t) + \mu_4(t), \qquad t \in [0,T], \tag{9}$$

$$h(t)\int_0^1 v(y,t)\,dy = \mu_5(t), \qquad t \in [0,T], \tag{10}$$

$$h^2(t)\int_0^1 yv(y,t)\,dy = \mu_6(t), \qquad t \in [0,T]. \tag{11}$$

Умови на вихідні дані, за яких існує єдиний розв'язок задачі (5)–(11), містяться у такій теоремі.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови:*

1°) $f \in C^{1,0}([0,\infty)\times[0,T])$, $\varphi \in C^2[0,h_0]$, $\mu_i \in C^1[0,T]$, $i = 1,2,5,6$,

$\mu_j \in C[0,T]$, $j = 3,4$,

2°) $f(x,t) \ge 0$, $(x,t) \in [0,\infty)\times[0,T]$, $\varphi(x) \ge \varphi_0 > 0$, $x \in [0,\infty)$,

$\varphi'(x) > 0$, $\varphi''(x) > 0$, $x \in [0,h_0]$, $\mu_i(t) > 0$, $i = 1,2,3,5,6$, $t \in [0,T]$,

де $h_0 = h(0) > 0$ *є розв'язком рівняння* $\int_0^{h(0)} \varphi(x)\,dx = \mu_5(0)$,

3°) *умови узгодження нульового та першого порядків.*

Тоді можна вказати таке число T_0, $0 < T_0 \le T$, *яке визначається вихідними даними, що існує єдиний розв'язок* $(h,a,b,c,v) \in C^1[0,T_0](C[0,T_0])^3 \times C^{2,1}(\bar{Q}_{T_0})$, $a(t) > 0$, $h(t) > 0$, $t \in [0,T_0]$ *задачі* (5)–(11).

Д о в е д е н н я. Визначимо значення функції $h(t)$ у початковий момент часу. Згідно з умовами теореми існує єдиний розв'язок $h(0) \equiv h_0 > 0$ рівняння

$$\int_0^{h(0)} \varphi(x)\,dx = \mu_5(0).$$

Доведення існування розв'язку задачі (5)–(11) базується на застосуванні теореми Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора. Зведемо задачу (5)–(11) до системи рівнянь. Позначимо через $G_k(y,t,\eta,\tau)$, $k = 1,2$, функції Ґріна першої $(k = 1)$ та другої $(k = 2)$ крайових задач для рівняння

$$v_t = \frac{a(t)}{h^2(t)} v_{yy} + f(yh(t),t). \tag{12}$$

Вони визначаються формулою

$$G_k(y,t,\eta,\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(\theta(t)-\theta(\tau))}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\exp\left(-\frac{(y-\eta+2n)^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))} \right) + \right.$$
$$\left. + (-1)^k \exp\left(-\frac{(y+\eta+2n)^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))} \right) \right), \qquad k = 1,2,$$

де $\theta(t) = \int_0^t \frac{a(\tau)}{h^2(\tau)}\,d\tau$.

Тимчасово припустимо, що функції $h(t)$, $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ відомі. Пряма задача (5)–(7) еквівалентна рівнянню

$$v(y,t) = v_0(y,t) + \int_0^t \int_0^1 G_1(y,t,\eta,\tau) \left(\frac{b(\tau) + \eta h'(\tau)}{h(\tau)} v_\eta(\eta,\tau) + \right.$$
$$\left. + c(\tau) v(\eta,\tau) \right) d\eta\, d\tau, \tag{13}$$

де $v_0(y,t)$ є розв'язком рівняння (12) і задовольняє умови (6), (7). Функція $v_0(y,t)$ має вигляд

$$v_0(y,t)=\int_0^1 G_1(y,t,\eta,0)\varphi(\eta h_0)\,d\eta+\int_0^t G_{1\eta}(y,t,0,\tau)\frac{a(\tau)}{h^2(\tau)}\mu_1(\tau)\,d\tau-$$

$$-\int_0^t G_{1\eta}(y,t,1,\tau)\frac{a(\tau)}{h^2(\tau)}\mu_2(\tau)\,d\tau+\int_0^t\int_0^1 G_1(y,t,\eta,\tau)f(\eta h(\tau),\tau)\,d\eta\,d\tau.$$

Замінимо задачу (5)–(11) еквівалентною системою рівнянь. Позначимо $w(y,t)=v_y(y,t)$. З умови (10) маємо

$$h'(t)=-\frac{1}{h(t)}w(1,t)+\mu_4(t). \tag{14}$$

Використавши (14), рівняння (13) подамо у вигляді

$$v(y,t)=v_0(y,t)+\int_0^t\int_0^1 G_1(y,t,\eta,\tau)\left(\left(\frac{b(\tau)+\eta\mu_4(\tau)}{h(\tau)}-\frac{\eta w(1,\tau)}{h^2(\tau)}\right)w(\eta,\tau)+\right.$$

$$\left.+c(\tau)v(\eta,\tau)\right)d\eta\,d\tau,\qquad (y,t)\in\bar{Q}_T. \tag{15}$$

Продиференціювавши рівність (15) за змінною y і використавши властивості функцій Ґріна

$$G_{1y}(y,t,\eta,\tau)=-G_{2\eta}(y,t,\eta,\tau),\qquad G_{2\tau}(y,t,\eta,\tau)=-\frac{a(\tau)}{h^2(\tau)}G_{2\eta\eta}(y,t,\eta,\tau)$$

та інтегрування частинами, одержуємо

$$w(y,t)=v_{0y}(y,t)+\int_0^t\int_0^1 G_{1y}(y,t,\eta,\tau)\left(\left(\frac{b(\tau)+\eta\mu_4(\tau)}{h(\tau)}-\frac{\eta w(1,\tau)}{h^2(\tau)}\right)w(\eta,\tau)+\right.$$

$$\left.+c(\tau)v(\eta,\tau)\right)d\eta\,d\tau,\qquad (y,t)\in\bar{Q}_T, \tag{16}$$

де $v_{0y}(y,t)$ має вигляд

$$v_{0y}(y,t)=h_0\int_0^1 G_2(y,t,\eta,0)\varphi'(\eta h_0)\,d\eta-\int_0^t G_2(y,t,0,\tau)\mu_1'(\tau)\,d\tau+$$

$$+\int_0^t G_2(y,t,1,\tau)\mu_2'(\tau)\,d\tau+\int_0^t\int_0^1 G_{1y}(y,t,\eta,\tau)f(\eta h(\tau),\tau)\,d\eta\,d\tau.$$

З умов (8), (10) отримуємо

$$a(t)=\frac{h(t)\mu_3(t)}{w(0,t)},\qquad t\in[0,T], \tag{17}$$

$$h(t)=\frac{\mu_5(t)}{\int_0^1 v(y,t)\,dy},\qquad t\in[0,T]. \tag{18}$$

Продиференціювавши (10), (11) за змінною t і використавши (5), (14), одержуємо

$$b(t)=\left[a(t)\mu_5(t)(\mu_2(t)-\mu_1(t))+\frac{w(1,t)}{h(t)}(\mu_2(t)-a(t))(h(t)\mu_5(t)-\mu_6(t))-\right.$$

$$-h(t)\int_0^1(yh(t)\mu_5(t)-\mu_6(t))f(yh(t),t)\,dy-$$

$$-(\mu_3(t)+\mu_5'(t))\mu_6(t)-\mu_5(t)\mu_6'(t)-$$

$$- \mu_2(t)\mu_4(t)(h(t)\mu_5(t) - \mu_6(t))\Big]\big((\mu_2(t)h(t) - \mu_5(t))\mu_5(t) -$$

$$- (\mu_2(t) - \mu_1(t))\mu_6(t)\big)^{-1}, \qquad t \in [0, T], \tag{19}$$

$$c(t) = \Big[(\mu_6'(t) - a(t)(\mu_2(t) - \mu_1(t)))(\mu_2(t) - \mu_1(t)) + \frac{w(1,t)}{h(t)}(a(t) -$$

$$- \mu_2(t))(\mu_5(t) - h(t)\mu_1(t)) + (\mu_3(t) + \mu_5'(t))(h(t)\mu_2(t) -$$

$$- \mu_5(t)) + \mu_2(t)\mu_4(t)(\mu_5(t) - h(t)\mu_1(t)) + h(t)\int_0^1 (yh(t) \times$$

$$\times (\mu_2(t) - \mu_1(t)) - h(t)\mu_2(t) + \mu_5(t))f(yh(t), t)\, dy\Big]\big((\mu_2(t)h(t) -$$

$$- \mu_5(t))\mu_5(t) - (\mu_2(t) - \mu_1(t))\mu_6(t)\big)^{-1}, \qquad t \in [0, T]. \tag{20}$$

Таким чином, задачу (5)–(11) зведено до системи рівнянь (15)–(20) з невідомими $v(y,t)$, $w(y,t)$, $a(t)$, $h(t)$, $b(t)$, $c(t)$. Якщо $(h, a, b, c, v) \in C^1[0,T] \times (C[0,T])^3 \times C^{2,1}(\bar{Q}_T)$ є розв'язком задачі (5)–(11), то функції $v(y,t)$, $w(y,t) \equiv v_y(y,t)$, $a(t)$, $h(t)$, $b(t)$, $c(t)$ є неперервним розв'язком системи рівнянь (15)–(20). Правильним є і обернене твердження: якщо $(v, w, a, h, b, c) \in (C(\bar{Q}_T))^2 \times (C[0,T])^4$ є розв'язком системи рівнянь (15)–(20), то $(h, a, b, c, v) \in C^1[0,T] \times (C[0,T])^3 \times C^{2,1}(\bar{Q}_T)$ є розв'язком задачі (5)–(11). Дійсно, нехай $(v, w, a, h, b, c) \in (C(\bar{Q}_T))^2 \times (C[0,T])^4$ є розв'язком системи рівнянь (15)–(20). Припущення теореми дозволяють продиференціювати рівність (15) за y. Праві частини отриманої рівності та рівності (15) співпадають, тому $w(y,t) \equiv v_y(y,t)$. Тоді робимо висновок, що $v \in C^{2,1}(\bar{Q}_T)$ задовольняє рівняння

$$v_t = \frac{a(t)}{h^2(t)} v_{yy} + \left(\frac{b(t) + y\mu_4(t)}{h(t)} - \frac{y v_y(1,t)}{h^2(t)}\right) v_y + c(t)v + f(yh(t), t), \tag{21}$$

та умови (7), (8) для довільних неперервних на $[0,T]$ функцій $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$, $h(t)$. Рівності (17), (18) співпадають з умовами (8), (10). Подамо (19), (20) у вигляді

$$b(t)(\mu_2(t) - \mu_1(t)) + c(t)\mu_5(t) = \frac{a(t)}{h(t)}(w(0,t) - w(1,t)) + \mu_5'(t) +$$

$$+ \mu_2(t)\left(\frac{w(1,t)}{h(t)} - \mu_4(t)\right) - h(t)\int_0^1 f(yh(t), t)\, dy, \tag{22}$$

$$b(t)(h(t)\mu_2(t) - \mu_5(t)) + c(t)\mu_6(t) = a(t)(\mu_2(t) - \mu_1(t) - w(1,t)) + \mu_6'(t) +$$

$$+ \mu_2(t)(w(1,t) - h(t)\mu_4(t)) - h^2(t)\int_0^1 y f(yh(t), t)\, dy. \tag{23}$$

Продиференціюємо (18) за змінною t. Використавши те, що функція $v(y,t)$ задовольняє рівняння (21), і віднявши від отриманої рівності (22), одержуємо

$$\left(h'(t) - \mu_4(t) + \frac{v_y(1,t)}{h(t)}\right)\frac{\mu_5(t)}{h(t)} = 0.$$

Звідси випливає, що $h \in C^1[0,T]$ і функція $v(y,t)$ задовольняє рівняння (5) та умову (9). Звівши (23) до вигляду

$$2h'(t)h(t)\int_0^1 yv(y,t)\,dy + h^2(t)\int_0^1 y\left(\frac{a(t)}{h^2(t)}v_{yy}(y,t) + \frac{b(t)+yh'(t)}{h(t)}v_y(y,t) + \right.$$

$$\left. + c(t)v(y,t) + f(yh(t),t)\right)dy = \mu_6'(t)\,,$$

використавши рівняння (5) і проінтегрувавши від 0 до t, отримуємо умову (11).

Отже, еквівалентність задачі (5)−(10) та системи рівнянь (15)−(20) у зазначеному вище сенсі доведено.

Зведемо знаменник в (19), (20) до вигляду

$$(\mu_2(t)h(t) - \mu_5(t))\mu_5(t) - (\mu_2(t) - \mu_1(t))\mu_6(t) =$$

$$= h^2(t)\left(\int_0^1 v(y,t)\,dy\int_0^1 yv_y(y,t)\,dy - \int_0^1 yv(y,t)\,dy\int_0^1 v_y(y,t)\,dy\right) =$$

$$= \frac{h^2(t)}{2}\left(\int_0^1 v(y,t)\,dy\int_0^1 (2y-1)v_y(y,t)\,dy + \right.$$

$$\left. + \int_0^1 (1-2y)v(y,t)\,dy\int_0^1 v_y(y,t)\,dy\right).$$

Подамо вирази $\int_0^1 (2y-1)v_y(y,t)\,dy$ і $\int_0^1 (1-2y)v(y,t)\,dy$ у вигляді

$$\int_0^1 (2y-1)v_y(y,t)\,dy = \int_0^{1/2} (2y-1)(v_y(y,t) - v_y(1-y,t))\,dy =$$

$$= \int_0^{1/2} (1-2y)\,dy\int_y^{1-y} v_{zz}(z,t)\,dz\,,$$

$$\int_0^1 (1-2y)v(y,t)\,dy = \int_0^{1/2} (1-2y)(v(y,t) - v(1-y,t))\,dy =$$

$$= -\int_0^{1/2} (1-2y)\,dy\int_y^{1-y} v_z(z,t)\,dz\,.$$

Змінивши порядок інтегрування в останньому виразі, одержуємо

$$\int_0^1 (1-2y)v(y,t)\,dy = -\int_0^{1/2}\left(\frac{1}{2}-z\right)^2 v_z(z,t)\,dz + \int_{1/2}^1 \left(\frac{1}{2}-z\right)^2 v_z(z,t)\,dz =$$

$$= \int_0^{1/2}\left(\frac{1}{2}-z\right)^2 (v_z(1-z,t) - v_z(z,t))\,dz =$$

$$= \int_0^{1/2}\left(\frac{1}{2}-z\right)^2 dz\int_z^{1-z} v_{\xi\xi}(\xi,t)\,d\xi\,.$$

Таким чином,

$$(\mu_2(t)h(t) - \mu_5(t))\mu_5(t) - (\mu_2(t) - \mu_1(t))\mu_6(t) =$$

$$= \frac{h^2(t)}{2}\left(\int_0^1 v(y,t)\,dy\int_0^{1/2}(1-2y)\,dy\int_y^{1-y} v_{zz}(z,t)\,dz + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{4}\int_0^1 v_y(y,t)\,dy\int_0^{1/2}(1-2y)^2\,dy\int_y^{1-y} v_{zz}(z,t)\,dz\right).$$

Згідно з умовами теореми $v(y,t) > 0$, $(y,t) \in \bar{Q}_T$. Тому

$$\int_0^1 v(y,t)\,dy > 0, \qquad t \in [0,T].$$

Встановимо оцінки знизу функцій $v_y(y,t)$ і $v_{yy}(y,t)$. З (16) можемо зробити висновок про існування деякого числа t_1, $0 < t_1 \le T$, що справджується нерівність

$$w(y,t) \ge \frac{h_0}{2} \min_{y\in[0,1]} \varphi'(yh_0) \equiv M_1 > 0, \qquad y \in [0,1], \qquad t \in [0,t_1].$$

Введемо нову функцію

$$\tilde{v}(y,t) = v(y,t) - \varphi(yh_0) - y(\mu_2(t) - \mu_2(0)) + (y-1)(\mu_1(t) - \mu_1(0)).$$

Для функції $\tilde{v}(y,t)$ одержуємо задачу

$$\tilde{v}_t = \frac{a(t)}{h^2(t)}\tilde{v}_{yy} + \frac{b(t) + yh'(t)}{h(t)}(\tilde{v}_y + d(y,t)) + c(t)(\tilde{v} + z(y,t)) + F(y,t),$$

$$(y,t) \in Q_T,$$

$$\tilde{v}(y,0) = 0, \qquad y \in [0,1],$$

$$\tilde{v}(0,t) = \tilde{v}(1,t) = 0, \qquad t \in [0,T], \tag{24}$$

де

$$d(y,t) = h_0\varphi'(yh_0) + \mu_2(t) - \mu_2(0) - \mu_1(t) + \mu_1(0),$$

$$z(y,t) = \varphi(yh_0) + y(\mu_2(t) - \mu_2(0)) - (y-1)(\mu_1(t) + \mu_1(0)),$$

$$F(y,t) = h_0^2\varphi''(yh_0)\frac{a(t)}{h^2(t)} + f(yh(t),t) - y\mu_2'(t) + (y-1)\mu_1'(t).$$

За допомогою функції Ґріна $G_1(y,t,\eta,\tau)$ першої крайової задачі для рівняння (12) задачу (24) зводимо до рівняння

$$\tilde{v}(y,t) = \int_0^t\int_0^1 G_1(y,t,\eta,\tau)\left(\frac{b(\tau) + \eta h'(\tau)}{h(\tau)}(\tilde{v}_\eta(\eta,\tau) + d(\eta,\tau)) + \right.$$

$$\left. + c(\tau)(\tilde{v}(\eta,\tau) + z(\eta,\tau)) + F(\eta,\tau)\right)d\eta\,d\tau.$$

Продиференціювавши останню рівність двічі за змінною y, одержуємо

$$v_{yy}(y,t) = h_0^2\varphi''(yh_0) + \int_0^t d\tau\int_0^1 G_{1yy}(y,t,\eta,\tau)\left(\frac{b(\tau) + \eta h'(\tau)}{h(\tau)}v_\eta(\eta,\tau) + \right.$$

$$\left. + c(\tau)v(\eta,\tau) + F(\eta,\tau)\right)d\eta.$$

Тоді можемо вважати, що існує деяке число t_2, $0 < t_2 \le T$, що

$$v_{yy}(y,t) \ge \frac{h_0^2}{2}\min_{y\in[0,1]}\varphi''(yh_0) \equiv M_2 > 0, \qquad y \in [0,1], \qquad t \in [0,t_2].$$

Таким чином,

$$(\mu_2(t)h(t) - \mu_5(t))\mu_5(t) - (\mu_2(t) - \mu_1(t))\mu_6(t) \ge C_0h^2(t), \qquad t \in [0,t_3], \tag{25}$$

де $t_3 = \min\{t_1, t_2\}$.

Встановимо оцінки розв'язків системи рівнянь (15)–(20). Використавши принцип максимуму [3] для розв'язку рівняння (12), який задовольняє умови (6), (7), одержуємо

$$v_0(y,t) \ge M_3 > 0, \qquad (y,t) \in \bar{Q}_T,$$

де стала M_3 визначається вихідними даними задачі. На підставі (15) можемо вважати, що існує таке число t_4, $0 < t_4 \le T$, що

$$v(y,t) \ge \frac{M_3}{2} \equiv M_4 > 0, \qquad y \in [0,1], \qquad t \in [0,t_4].$$

Тоді для розв'язків рівнянь (18), (17) справджуються оцінки

$$h(t) \le \frac{1}{M_4} \max_{[0,T]} \mu_5(t) \equiv H_1 < \infty, \qquad t \in [0,t_4], \tag{26}$$

$$a(t) \le \frac{H_1}{M_1} \max_{[0,T]} \mu_3(t) \equiv A_1 < \infty, \qquad t \in [0,t_5], \tag{27}$$

де $t_5 = \min\{t_1, t_4\}$.

Використавши нерівності (25)–(27), з (19), (20) отримуємо

$$|b(t)| \le \frac{1}{h^2(t)}\left(C_1 + C_2\frac{W(t)}{h(t)}\right),$$

$$|c(t)| \le \frac{1}{h^2(t)}\left(C_3 + C_4\frac{W(t)}{h(t)}\right), \qquad t \in [0,t_6], \tag{28}$$

де $t_6 = \min\{t_3, t_4\}$.

Позначимо $V(t) = \max\limits_{y\in[0,1]}|v(y,t)|$, $W(t) = \max\limits_{y\in[0,1]}|w(y,t)|$. Тоді з (18), (17) отримуємо

$$h(t) \ge \frac{1}{V(t)} \min_{[0,T]} \mu_5(t), \qquad t \in [0,T], \tag{29}$$

$$a(t) \ge \frac{C_5}{V(t)W(t)}, \qquad t \in [0,T]. \tag{30}$$

Оскільки для функції $v(y,t)$ виконується рівність

$$v(y,t) = \mu_1(t) + \int_0^y w(\xi,t)\,d\xi,$$

то звідси маємо

$$V(t) \le C_6 + C_7 W(t), \qquad t \in [0,T]. \tag{31}$$

Врахувавши оцінки функцій Ґріна

$$G_2(y,t,\eta,\tau) \le C_8\left(1 + \frac{1}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}\right),$$

$$\int_0^1 |G_{1y}(y,t,\eta,\tau)|\,d\eta \le \frac{C_9}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}},$$

з (16) одержуємо нерівність

$$W(t) \le C_{10} + C_{11}\int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}} + C_{12}\int_0^t \left(\left(\frac{|b(\tau)|+1}{h(\tau)} + \frac{W(\tau)}{h^2(\tau)}\right)W(\tau) + \right.$$

$$\left. + |c(\tau)|\,V(\tau)\right)\frac{d\tau}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}, \qquad t \in [0,T].$$

Використавши (25)–(31) та позначивши $W_1(t) = W(t) + 1$, попередню нерівність подамо у вигляді

$$W_1(t) \le C_{13} + C_{14}\int_0^t \frac{a(t)W_1^4(\tau)\,d\tau}{h^2(t)\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}, \qquad t \in [0,t_6]. \tag{32}$$

Піднесемо обидві частини нерівності (32) до четвертого степеня та використаємо нерівність Гельдера

$$W_1^4(t) \le C_{15} + C_{16}\int_0^t \frac{a(\tau)W_1^{16}(\tau)\,d\tau}{h^2(\tau)\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}.$$

Замінивши t на σ, домножимо попередню нерівність на $\dfrac{a(\sigma)}{h^2(\sigma)\sqrt{\theta(t)-\theta(\sigma)}}$ та проінтегруємо від 0 до t:

$$\int_0^t \frac{a(\sigma)W_1^4(\sigma)\,d\sigma}{h^2(\sigma)\sqrt{\theta(t)-\theta(\sigma)}} \le C_{17} + C_{16}\int_0^t \frac{a(\sigma)\,d\sigma}{h^2(\sigma)\sqrt{\theta(t)-\theta(\sigma)}}\int_0^\sigma \frac{a(\tau)W_1^{16}(\tau)\,d\tau}{h^2(\tau)\sqrt{\theta(\sigma)-\theta(\tau)}}.$$

Змінивши порядок інтегрування у другому доданку правої частини нерівності та використавши рівність

$$\int_\tau^t \frac{a(\sigma)\,d\sigma}{h^2(\sigma)\sqrt{(\theta(t)-\theta(\sigma))(\theta(\sigma)-\theta(\tau))}} = \pi,$$

одержуємо

$$\int_0^t \frac{a(\sigma)W_1^4(\sigma)\,d\sigma}{h^2(\sigma)\sqrt{\theta(t)-\theta(\sigma)}} \le C_{17} + C_{18}\int_0^t \frac{a(\tau)W_1^{16}(\tau)\,d\tau}{h^2(\tau)}. \tag{33}$$

Підставивши (33) в (32), отримуємо

$$W_1(t) \le C_{19} + C_{20}\int_0^t \frac{a(\tau)W_1^{16}(\tau)}{h^2(\tau)}\,d\tau.$$

Використавши (27), (29), (31) та позначивши $W_2(t) = W_1(t)+1$, попередню нерівність подамо у вигляді

$$W_2(t) \le C_{21} + C_{22}\int_0^t W_2^{17}(\tau)\,d\tau.$$

Звідси отримуємо оцінку

$$W(t) \le M_5 < \infty, \qquad t \in [0, t_7],$$

де t_7, $0 < t_7 \le t_6$, визначається сталими C_{21}, C_{22}. Тоді

$$|v(y,t)| \le C_6 + C_7 M_5 \equiv M_6, \qquad h(t) \ge \frac{1}{M_6}\min_{[0,T]}\mu_5(t) \equiv H_0 > 0,$$

$$a(t) \ge \frac{C_5}{M_5 M_6} \equiv A_0 > 0, \qquad |b(t)| \le \frac{1}{H_0^2}\left(C_1 + C_2\frac{M_5}{H_0}\right) \equiv B_1,$$

$$|c(t)| \le \frac{1}{H_0^2}\left(C_3 + C_4\frac{M_5}{H_0}\right) \equiv B_2, \qquad y \in [0,1], \qquad t \in [0, t_7].$$

Отже, апріорні оцінки розв'язків системи рівнянь (15)–(20) знайдено.

Подамо систему рівнянь (15)–(20) у вигляді операторного рівняння

$$\omega = P\omega,$$

де $\omega = (v(y,t), w(y,t), a(t), h(t), b(t), c(t))$, а оператор P визначається правими частинами рівнянь (15)–(20).

Візьмемо довільні (v, w, a, h, b, c), для яких справджуються встановлені вище оцінки. Оцінимо праву частину рівняння (16):

$$|P_2 v| \le C_{23} + C_{24}\sqrt{t} + C_{25}t.$$

Вибираючи число t_8, $0 < t_8 \le T$, так, щоб виконувалася нерівність $C_{23} + C_{24}\sqrt{t_8} + C_{25}t_8 \le M_5$, отримаємо

$$|P_2 w| \le M_5, \qquad (y,t) \in [0,1]\times[0,t_8].$$

Позначимо $\mathcal{N} = \{(v, w, a, h, b, c) \in (C(\overline{Q}_{T_0}))^2 \times (C[0,T_0])^4 : M_4 \le v(y,t) \le M_6,$ $|w(y,t)| \le M_5,$ $A_0 \le a(t) \le A_1,$ $H_0 \le h(t) \le H_1,$ $|b(t)| \le B_1,$ $|c(t)| \le B_2\}$, де $T_0 = \min\{t_7, t_8\}$. Очевидно, що множина $\mathcal{N}$ задовольняє умови теореми Шаудера про нерухому точку, а оператор P переводить $\mathcal{N}$ у себе. Компактність операторів, що утворюють P, встановлено в [9].

Тоді за теоремою Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора існує розв'язок $(v, w, a, h, b, c) \in (C(\bar{Q}_{T_0}))^2 \times (C[0, T_0])^4$ системи рівнянь (15)–(20). Отже, існує розв'язок $(h, a, b, c, v) \in C^1[0, T_0] \times (C[0, T_0])^3 \times$ $\times C^{2,1}(\bar{Q}_{T_0})$ задачі (5)–(10).

Доведемо єдиність розв'язку задачі (5)–(10). Нехай $(h_i(t), a_i(t), b_i(t),$ $c_i(t), v_i(y, t))$, $i = 1, 2$, – два розв'язки задачі (5)–(10). Позначимо

$$\frac{a_i(t)}{h_i^2(t)} = s_i(t), \qquad \frac{b_i(t)}{h_i(t)} = q_i(t), \qquad \frac{h_i'(t)}{h_i(t)} = r_i(t), \qquad i = 1, 2,$$

$$s(t) = s_1(t) - s_2(t), \qquad q(t) = q_1(t) - q_2(t), \qquad r(t) = r_1(t) - r_2(t),$$

$$c(t) = c_1(t) - c_2(t), \qquad v(y, t) = v_1(y, t) - v_2(y, t).$$

Функції $s(t)$, $q(t)$, $r(t)$, $c(t)$, $v(y, t)$ задовольняють рівняння

$$v_t = s_1(t) v_{yy} + \left(q_1(t) + y r_1(t)\right) v_y + c_1(t) v + s(t) v_{2yy} + \left(q(t) + y r(t)\right) v_{2y} +$$
$$+ c(t) v_2 + f(y h_1(t), t) - f(y h_2(t), t), \qquad (y, t) \in Q_T, \quad (34)$$

та умови

$$v(y, 0) = 0, \qquad y \in [0, 1], \quad (35)$$

$$v(0, t) = v(1, t) = 0, \qquad t \in [0, T], \quad (36)$$

$$s_1(t) v_y(0, t) + s(t) v_{2y}(0, t) = \mu_3(t)\left(\frac{1}{h_1(t)} - \frac{1}{h_2(t)}\right), \quad (37)$$

$$r(t) = -\frac{v_y(1, t)}{h_1^2(t)} - v_{2y}(1, t)\left(\frac{1}{h_1^2(t)} - \frac{1}{h_2^2(t)}\right) + \mu_4(t)\left(\frac{1}{h_1(t)} - \frac{1}{h_2(t)}\right), \quad (38)$$

$$\int_0^1 v(y, t)\, dy = \mu_5(t)\left(\frac{1}{h_1(t)} - \frac{1}{h_2(t)}\right), \quad (39)$$

$$\int_0^1 y v(y, t)\, dy = \mu_6(t)\left(\frac{1}{h_1^2(t)} - \frac{1}{h_2^2(t)}\right), \qquad t \in [0, T]. \quad (40)$$

За допомогою функції Ґріна $G_1^*(y, t, \eta, \tau)$ першої крайової задачі для рівняння

$$v_t = s_1(t) v_{yy} + \left(q_1(t) + y r_1(t)\right) v_y + c_1(t) v$$

з урахуванням умов (35), (36) функцію $v(y, t)$ подамо у вигляді

$$v(y, t) = \int_0^t \int_0^1 G_1^*(y, t, \eta, \tau)\left(s(\tau) v_{2\eta\eta}(\eta, \tau) + (q(\tau) + \eta r(\tau)) v_{2\eta}(\eta, \tau) +\right.$$
$$\left.+ c(\tau) v_2(\eta, \tau) + f(\eta h_1(\tau), \tau) - f(\eta h_2(\tau), \tau)\right) d\eta\, d\tau. \quad (41)$$

Продиференціювавши (41) за змінною y, отримуємо

$$v_y(y, t) = \int_0^t \int_0^1 G_{1y}^*(y, t, \eta, \tau)\left(s(\tau) v_{2\eta\eta}(\eta, \tau) + (q(\tau) + \eta r(\tau)) v_{2\eta}(\eta, \tau) +\right.$$
$$\left.+ c(\tau) v_2(\eta, \tau) + f(\eta h_1(\tau), \tau) - f(\eta h_2(\tau), \tau)\right) d\eta\, d\tau. \quad (42)$$

Оскільки $(h_i(t), a_i(t), b_i(t), c_i(t), v_i(y, t))$, $i = 1, 2$, – два розв'язки задачі (5)–(10), то для $b_i(t)$, $c_i(t)$, $i = 1, 2$, справджуються рівності, аналогічні до (19), (20). Звідси отримаємо

$$\frac{\mu_5(t)}{h_1(t)}c(t)+q(t)(\mu_2(t)-\mu_1(t))=s(t)(v_{1y}(0,t)-v_{1y}(1,t))-$$
$$-r(t)\mu_2(t)-s_2(t)(v_y(1,t)-v_y(0,t))+$$
$$+(\mu_5'(t)-c_2(t)\mu_5(t))\left(\frac{1}{h_1(t)}-\frac{1}{h_2(t)}\right)-$$
$$-\int_0^1 (f(yh_1(t),t)-f(yh_2(t),t))\,dy,\qquad t\in[0,T], \tag{43}$$

$$q(t)=\Big[s(t)((\mu_2(t)-\mu_1(t))h_1(t)\mu_5(t)-v_{1y}(1,t)(h_1(t)\mu_5(t)-\mu_6(t))-$$
$$-\mu_6(t)v_{1y}(0,t))-s_2(t)(v_y(1,t)(h_1(t)\mu_5(t)-\mu_6(t))+$$
$$+\mu_6(t)v_y(0,t))-r(t)\mu_2(t)(h_1(t)\mu_5(t)-\mu_6(t))+$$
$$+(q_2(t)h_1(t)\mu_5^2(t)-\mu_5'(t)\mu_6(t)+c_2(t)\mu_5(t)\mu_6(t))\times$$
$$\times\left(\frac{1}{h_1(t)}-\frac{1}{h_2(t)}\right)+h_1(t)\mu_5(t)(\mu_6'(t)-c_2(t)\mu_6(t))\times$$
$$\times\left(\frac{1}{h_1^2(t)}-\frac{1}{h_2^2(t)}\right)-\int_0^1 (yh_1(t)\mu_5(t)-\mu_6(t))(f(yh_1(t),t)-$$
$$-f(yh_2(t),t))\,dy\Big]\big((\mu_2(t)h_1(t)-\mu_5(t))\mu_5(t)-$$
$$-(\mu_2(t)-\mu_1(t))\mu_6(t)\big)^{-1},\qquad t\in[0,T]. \tag{44}$$

Виразивши $h_i(t)$ через $r_i(t)$:

$$h_i(t)=h_i(0)\exp\left(\int_0^t r_i(\tau)\,d\tau\right),\qquad i=1,2,$$

де $h_1(0)=h_2(0)=h_0$, та використавши рівність

$$e^x-e^y=(x-y)\int_0^1 e^{y+\tau(x-y)}\,d\tau,$$

одержуємо

$$\frac{1}{h_1(t)}-\frac{1}{h_2(t)}=-\frac{1}{h_0}\int_0^t r(\tau)\,d\tau\int_0^1\exp\left(-\int_0^t(\sigma r(\tau)+r_2(\tau))\,d\tau\right)d\sigma. \tag{45}$$

Аналогічно до (45) можна отримати зображення різниці

$$\frac{1}{h_1^2(t)}-\frac{1}{h_2^2(t)}.$$

Припущення теореми забезпечують правильність перетворення

$$f(yh_1(t),t)-f(yh_2(t),t)=$$
$$=y(h_1(t)-h_2(t))\int_0^1 f_x(y(h_2(t)+\sigma(h_1(t)-h_2(t))),t)\,d\sigma. \tag{46}$$

Використавши (45), (46) і підставивши (41), (42) в (37), (38), (43), (44) одержимо систему однорідних інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду відносно невідомих $s(t), q(t), c(t), r(t)$. З єдиності розв'язків таких систем випливає, що

$$s(t) = 0, \quad q(t) = 0, \quad c(t) = 0, \quad r(t) = 0, \qquad t \in [0, T_0].$$

Звідси отримаємо, що

$$s_1(t) = s_2(t), \quad q_1(t) = q_2(t), \quad r_1(t) = r_2(t), \quad c_1(t) = c_2(t), \quad t \in [0, T_0],$$

а, отже,

$$h_1(t) = h_2(t), \quad a_1(t) = a_2(t), \quad b_1(t) = b_2(t), \qquad t \in [0, T_0].$$

Використавши це в задачі (34)–(36), отримуємо, що

$$v_1(y,t) = v_2(y,t), \qquad (y,t) \in \bar{Q}_{T_0}.$$

Теорему доведено. ◊

1. *Баранська І.* Визначення старшого коефіцієнта у параболічному рівнянні в області з невідомими межами // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2005. – Вип. 64. – С. 20–38.
2. *Іванчов М. І.* Обернена задача з вільною межею для рівняння теплопровідності // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 7. – С. 901–910.
3. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – Москва: Наука, 1967. – 736 с.
4. *Пабирівська Н. В.* Обернені задачі з інтегральними умовами перевизначення // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2000. – **43,** № 1. – С. 51–58.
5. *Пабирівська Н. В.* Теплові моменти в оберненій задачі для параболічного рівняння // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2000. – Вип. 56. – С. 142–149.
6. *Ang D. D., Trong D. D.* Coefficient identification for a parabolic equation // Inverse Probl. – 1994. – **10**, No. 3. – P. 733–752.
7. *Cannon J. R., Lin Y., Wang S.* Determination of a control parameter in a parabolic partial differential equation // J. Austral. Math. Soc. Ser. B. – 1991. – **33**. – P. 149–163.
8. *Cannon J. R., Perez-Esteva S.* Determination of the coefficient of u_x in a linear parabolic equation // Inverse Probl. – 1994. – **10**, No. 3. – P. 521–531.
9. *Ivanchov M.* Inverse problems for equations of parabolic type / Math. Studies: Monograph Ser. – Lviv: VNTL Publ., 2003. – Vol. 10. – 238 p.

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЗАВИСЯЩИХ ОТ ВРЕМЕНИ КОЭФФИЦИЕНТОВ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ОБЛАСТИ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ

Установлены условия однозначной разрешимости обратной задачи определения зависящих от времени коэффициентов в одномерном параболическом уравнении в области со свободной границей.

INVERSE PROBLEM OF FINDING THE TIME-DEPENDENT COEFFICIENTS IN PARABOLIC EQUATION IN FREE BOUNDARY DOMAIN

The unique solvability conditions of the inverse problem of finding the time-dependent coefficients in one-dimensional parabolic equation in free boundary domain are established.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
31.05.10