УДК 512.64

А. М. Романів

УНІТАЛЬНІ ДІЛЬНИКИ З ОДНИМ ІНВАРІАНТНИМ МНОЖНИКОМ МНОГОЧЛЕННИХ МАТРИЦЬ

Для неособливої многочленної матриці над нескінченним полем вказано необхідні та достатні умови виділення унітального множника із матричного многочлена з канонічною діагональною формою $\operatorname{diag}(1,\ldots,1,\varphi(x))$.

Задача про виділення регулярного множника із матричного многочлена цікавила математиків упродовж багатьох років. Це і зрозуміло: розв'язання цієї задачі давало метод знаходження коренів матричних односторонніх рівнянь. Для її розв'язання використовувались різні методи сучасної математики. У 1956 р. Я. Б. Лопатинський в термінах систем диференціальних рівнянь вказав необхідні та достатні умови зображення матриці у вигляді добутку регулярних множників зі взаємно простими визначниками. Методами жорданових ланцюгів цю задачу розв'язували I. Gochberg, P. Lancaster, L. Rodman [7], О. М. Малишев [4].

Принципово новий підхід до проблеми виділення регулярного дільника з матричного многочлена був запропонований П. С. Казімірським [3]. Він базується на поняттях визначальної матриці та значення матриці на системі коренів многочлена. У цих термінах П. С. Казімірським були сформульовані необхідні та достатні умови існування таких дільників та вказано метод їх знаходження. Отримані результати стосувались многочленних матриць над алгебраїчно замкнутим полем характеристики нуль. Специфіка методів розв'язування та термінів, у яких були сформульовані результати, не давали можливості узагальнити їх на більш широкі класи полів. Це стало можливим після публікації [2], в якій результати П. С. Казімірського сформульовано в дещо іншому вигляді.

У цій роботі досліджуються многочленні матриці над нескінченним полем. При певних обмеженнях на канонічну діагональну форму дільника вказуються необхідні та достатні умови його існування.

Потрібно зауважити, що після розв'язання П. С. Казімірським проблеми виділення регулярного дільника кількість статей, присвячених регулярним дільникам, різко скоротилась. Увагу дослідників привернули задачі опису неасоційованих дільників матриць [6, 10], а також задачі зображення матриць у вигляді добутку кількох співмножників із наперед заданими характеристиками [5, 8, 13].

Нехай F – поле, $A(x)$ – неособлива $(n \times n)$-матриця над $F[x]$, записана у вигляді матричного многочлена над полем F:

$$A(x) = A_k x^k + A_{k-1} x^{k-1} + \ldots + A_0 .$$

Матрицю $A(x)$ називають унітальною, якщо $A_k = E$ – одинична матриця, та регулярною, якщо $\det A_k \neq 0$. Будемо говорити, що матриця $A(x)$ є *регуляризовною* справа, якщо існує така оборотна матриця $U(x)$, що

$$A(x)U(x) = Ex^r + D_{r-1}x^{r-1} + \ldots + D_0 .$$

Для матриці $A(x)$ існують такі оборотні матриці $P(x)$ та $Q(x)$, що

$$P(x)A(x)Q(x) = \operatorname{diag}(\varepsilon_1(x), \ldots, \varepsilon_n(x)) = \Psi(x) ,$$

$\varepsilon_i(x) \mid \varepsilon_{i+1}(x)$, $i = 1, \ldots, n-1$. При цьому матрицю $\Psi(x)$ називають канонічною діагональною формою (к. д. ф.) або формою Сміта матриці $A(x)$, а матриці $P(x)$ та $Q(x)$ – відповідно лівими та правими перетворювальними матрицями матриці $A(x)$. Нехай $A(x)=B(x)C(x)$, де $B(x)$ має к.д.ф. $\Phi(x)=\operatorname{diag}(\varphi_1(x),\dots,\varphi_n(x))$. Згідно з [9] $\Phi(x)\mid\Psi(x)$, причому, якщо $B(x)$ – унітальна матриця степеня r, то $\deg\det\Phi(x)=nr$.

Нехай тепер $\Phi(x)=\operatorname{diag}(1,\dots,1,\varphi(x))$, причому $\Phi(x)\mid\Psi(x)$. У цьому випадку визначальна матриця має вигляд

$$\mathcal{V}(\Psi,\Phi)=$$

$$=\begin{Vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \dfrac{\varphi(x)}{(\varphi(x),\varepsilon_1(x))}k_{n1}(x) & \dfrac{\varphi(x)}{(\varphi(x),\varepsilon_2(x))}k_{n2}(x) & \dots & \dfrac{\varphi(x)}{(\varphi(x),\varepsilon_{n-1}(x))}k_{n,n-1}(x) & 1 \end{Vmatrix},$$

де

$$k_{nj}=\begin{cases} 0, & (\varphi,\varepsilon_j)=1, \\ k_{nj0}+k_{nj1}x+\dots+k_{njh_{nj}}x^{h_{nj}}, & (\varphi,\varepsilon_j)\neq 1, \end{cases}$$

$$h_{nj}=\deg(\varphi,\varepsilon_j)-1, \quad j=1,\dots,n-1,$$

де $k_{nj\ell}$ – параметри, $j=1,\dots,n-1$. Позначимо через $F(k)[x]$ трансцедентне розширення поля F за рахунок приєднання всіх $k_{nj\ell}$. Основним результатом цієї роботи є

Теорема 1. *Нехай F – нескінченне поле. Для того щоб із неособливого матричного многочлена*

$$A(x)=P^{-1}(x)\Psi(x)Q^{-1}(x),\ \ \Psi(x)=\operatorname{diag}(\varepsilon_1(x),\dots,\varepsilon_n(x)),\ \ \varepsilon_i(x)\mid\varepsilon_{i+1}(x),$$

$i=1,\dots,n-1,$ *можна було виділити лівий унітальний дільник з к.д.ф.* $\Phi(x)=\operatorname{diag}(1,\dots,1,\varphi(x))$, $\deg\varphi(x)=nr$, *необхідно та достатньо, щоб матриця* $(\mathcal{V}(\Psi,\Phi)P(x))^{-1}\Phi(x)$ *була регуляризовною справа над* $F(k)[x]$.

Перед доведенням цієї теореми встановимо декілька допоміжних тверджень. Нехай

$$\Psi(x)=\operatorname{diag}(\varepsilon_1(x),\dots,\varepsilon_n(x)), \qquad \varepsilon_i(x)\mid\varepsilon_{i+1}(x),$$

$$\Phi(x)=\operatorname{diag}(\varphi_1(x),\dots,\varphi_n(x)), \qquad \varphi_i(x)\mid\varphi_{i+1}(x), \quad i=1,\dots,n-1,$$

$$\Phi(x)\mid\Psi(x).$$

Розглянемо такі множини матриць:

$$\mathbf{G}_\Phi=\{H(x)\in GL_n(F[x])\mid H(x)\Phi(x)=\Phi(x)H_1(x),\ H_1(x)\in GL_n(F[x])\},$$

$$\mathbf{L}(\Psi,\Phi)=\{L(x)\in GL_n(F[x])\mid L(x)\Psi(x)=\Phi(x)L_1(x),\ L_1(x)\in M_n(F[x])\},$$

які згідно з результатами робіт [1, 10] складаються відповідно з оборотних матриць вигляду

$$\begin{Vmatrix} h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1,n-1} & h_{1n} \\ \dfrac{\varphi_2}{\varphi_1}h_{21} & h_{22} & \dots & h_{2,n-1} & h_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\varphi_n}{\varphi_1}h_{n1} & \dfrac{\varphi_n}{\varphi_2}h_{n2} & \dots & \dfrac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}}h_{n,n-1} & h_{nn} \end{Vmatrix}, \tag{1}$$

$$\left\| \begin{matrix} \ell_{11} & \ell_{12} & \dots & \ell_{1,n-1} & \ell_{1n} \\ \frac{\varphi_2}{(\varphi_2,\varepsilon_1)}\ell_{21} & \ell_{22} & \dots & \ell_{2,n-1} & \ell_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\varphi_n}{(\varphi_n,\varepsilon_1)}\ell_{n1} & \frac{\varphi_n}{(\varphi_n,\varepsilon_2)}\ell_{n2} & \dots & \frac{\varphi_n}{(\varphi_n,\varepsilon_{n-1})}\ell_{n,n-1} & \ell_{nn} \end{matrix} \right\|. \qquad (2)$$

При цьому множина $\mathbf{G}_\Phi$ є мультиплікативною групою. Аналогічно вводимо множину $\mathbf{G}_\Psi$. Позначимо через $\mathbf{G}_\Phi^*$ та $\mathbf{L}^*(\Psi,\Phi)$ множини матриць (1) і (2) над полем $F(k)[x]$ відповідно.

Позначимо через $\mathbf{V}(\Psi,\Phi)$ множину нижніх унітрикутних матриць, які отримуються із матриці $\mathcal{V}(\Psi,\Phi)$, коли параметри $k_{ij\ell}$ незалежно один від одного пробігають усі можливі значення із поля F.

Теорема 2. *Виконується рівність* $\mathbf{L}(\Psi,\Phi) = \mathbf{G}_\Phi \mathbf{V}(\Psi,\Phi)\mathbf{G}_\Psi$.

Д о в е д е н н я. Нехай $n = 2$ і L − довільна матриця із $\mathbf{L}(\Psi,\Phi)$. Оскільки $\left(\frac{\varphi_2}{(\varphi_2,\varepsilon_1)}\ell_{21}, \ell_{22}\right) = 1$, то $\left(\frac{\varphi_2}{(\varphi_2,\varepsilon_1)}\ell_{21}, \ell_{22}, \frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right) = 1$. Тоді існує таке $s(x) \in F[x]$, що $\left(\ell_{22} + \frac{\varphi_2}{(\varphi_2,\varepsilon_1)}\ell_{21}s, \frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right) = 1$. Отже, виконується рівність

$$\begin{pmatrix} \ell_{11} & \ell_{12} \\ \frac{\varphi_2}{(\varphi_2,\varepsilon_1)}\ell_{21} & \ell_{22} \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{S_2} = \begin{pmatrix} \ell_{11} & \ell_{11}s + \ell_{12} \\ \frac{\varphi_2}{(\varphi_2,\varepsilon_1)}\ell_{21} & \frac{\varphi_2}{(\varphi_2,\varepsilon_1)}\ell_{21}s + \ell_{22} \end{pmatrix} =$$

$$= L_1 \in \mathbf{L}(\Psi,\Phi).$$

На підставі леми 3 з [6] у групі $\mathbf{G}_\Phi$ існує така матриця H_1, що H_1L_1 − нижня унітрикутна матриця. Тоді згідно з лемою 4 з [10] в групі $\mathbf{G}_\Phi$ існує така матриця H_2, що $H_2H_1LS_2 = \mathcal{V} \in \mathbf{V}(\Psi,\Phi)$, тобто $L = (H_2^{-1}H_1^{-1})\mathcal{V}S_2^{-1}$. Оскільки $S_2 \in \mathbf{G}_\Psi$, то $\mathbf{L}(\Psi,\Phi) \subseteq \mathbf{G}_\Phi\mathbf{V}(\Psi,\Phi)\mathbf{G}_\Psi$.

Припустимо, що таке включення є правильним для матриць порядку $n-1$. Оскільки

$$\left(\frac{\varphi_n}{(\varphi_n,\varepsilon_1)}\ell_{n1}, \dots, \frac{\varphi_n}{(\varphi_n,\varepsilon_{n-1})}\ell_{n,n-1}, \ell_{nn}\right) = 1,$$

то

$$\left(\frac{\varphi_n}{(\varphi_n,\varepsilon_1)}\ell_{n1}, \dots, \frac{\varphi_n}{(\varphi_n,\varepsilon_{n-1})}\ell_{n,n-1}, \ell_{nn}, \frac{\varphi_n}{\varphi_1}\right) = 1.$$

Тоді існують такі $s_1(x), \dots, s_{n-1}(x) \in F[x]$, що

$$\left(\underbrace{\ell_{nn} + \frac{\varphi_n}{(\varphi_n,\varepsilon_1)}\ell_{n1}s_1 + \dots + \frac{\varphi_n}{(\varphi_n,\varepsilon_{n-1})}\ell_{n,n-1}s_{n-1}}_{\ell'_{nn}}, \frac{\varphi_n}{\varphi_1}\right) = \left(\ell'_{nn}, \frac{\varphi_n}{\varphi_1}\right) = 1.$$

Оскільки

$$\frac{\varphi_n}{\varphi_1} = \frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}} \cdot \frac{\varphi_{n-1}}{\varphi_{n-2}} \cdot \dots \cdot \frac{\varphi_3}{\varphi_2} \cdot \frac{\varphi_2}{\varphi_1},$$

то

$$\left(\ell'_{nn}, \frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}}\right) = \dots = \left(\ell'_{nn}, \frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right) = 1.$$

Отже, виконується рівність

$$\begin{Vmatrix} \ell_{11} & \dots & \ell_{1,n-1} & \ell_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\varphi_n}{(\varphi_n,\varepsilon_1)}\ell_{n1} & \dots & \frac{\varphi_n}{(\varphi_n,\varepsilon_{n-1})}\ell_{n,n-1} & \ell_{nn} \end{Vmatrix} \cdot \underbrace{\begin{Vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & s_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & s_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & s_{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{Vmatrix}}_{S_n} =$$

$$= \begin{Vmatrix} \ell_{11} & \dots & \ell_{1,n-1} & \ell'_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\varphi_n}{(\varphi_n,\varepsilon_1)}\ell_{n1} & \dots & \frac{\varphi_n}{(\varphi_n,\varepsilon_{n-1})}\ell_{n,n-1} & \ell'_{nn} \end{Vmatrix} = L_1 \in \mathbf{L}(\Psi,\Phi).$$

При цьому $S_n \in \mathbf{G}_\Psi$. Оскільки

$$\left(\frac{\varphi_n}{\varphi_1}\ell'_{1n}, \frac{\varphi_n}{\varphi_2}\ell'_{2n}, \dots, \frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}}\ell'_{n-1,n}, \ell'_{nn}\right) = 1,$$

то існують такі $h_{n1}, h_{n2}, \dots, h_{n,n-1}, h_{nn}$, що

$$\frac{\varphi_n}{\varphi_1}h_{n1}\ell'_{1n} + \frac{\varphi_n}{\varphi_2}h_{n2}\ell'_{2n} + \dots + h_{nn}\ell'_{nn} = 1.$$

Звідси випливає, що

$$\left(\frac{\varphi_n}{\varphi_1}h_{n1}, \frac{\varphi_n}{\varphi_2}h_{n2}, \dots, \frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}}h_{n,n-1}, h_{nn}\right) = 1.$$

На підставі властивості 2 з [12] рядок

$$\begin{Vmatrix} \frac{\varphi_n}{\varphi_1}h_{n1} & \dots & \frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}}h_{n,n-1} & h_{nn} \end{Vmatrix}$$

можна доповнити до оборотної матриці з групи $\mathbf{G}_\Phi$ вигляду

$$H_1 = \begin{Vmatrix} & & * & & \\ \frac{\varphi_n}{\varphi_1}h_{n1} & \frac{\varphi_n}{\varphi_2}h_{n2} & \dots & \frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}}h_{n,n-1} & h_{nn} \end{Vmatrix}.$$

Оскільки згідно з властивістю 2 із [10] $\mathbf{G}_\Phi\mathbf{L}(\Psi,\Phi) = \mathbf{L}(\Psi,\Phi)$, то

$$H_1L_1 = \begin{Vmatrix} g_{11} & \dots & g_{1,n-1} & g_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\varphi_{n-1}}{(\varphi_{n-1},\varepsilon_1)}g_{n-1,1} & \dots & g_{n-1,n-1} & g_{n-1,n} \\ \frac{\varphi_n}{(\varphi_n,\varepsilon_1)}g_{n1} & \dots & \frac{\varphi_n}{(\varphi_n,\varepsilon_{n-1})}g_{n,n-1} & 1 \end{Vmatrix} = L_2 \in \mathbf{L}(\Psi,\Phi).$$

Домноживши матрицю L_2 зліва на матрицю

$$H_2 = \begin{Vmatrix} 1 & \dots & 0 & -g_{1n} \\ 0 & \dots & 0 & -g_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & -g_{n-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

із $\mathbf{G}_\Phi$, отримаємо

$$\left\|\begin{array}{ccc:c} c_{11} & \dots & c_{1,n-1} & 0 \\ \frac{\varphi_2}{(\varphi_2,\varepsilon_1)} c_{21} & \dots & c_{2,n-1} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\varphi_{n-1}}{(\varphi_{n-1},\varepsilon_1)} c_{n-1,1} & \dots & c_{n-1,n-1} & 0 \\ \hdashline \frac{\varphi_n}{(\varphi_n,\varepsilon_1)} g_{n1} & \dots & \frac{\varphi_n}{(\varphi_n,\varepsilon_{n-1})} g_{n,n-1} & 1 \end{array}\right\| = \left\|\begin{matrix} C & 0 \\ g & 1 \end{matrix}\right\| = L_3 \in \mathbf{L}(\Psi,\Phi).$$

Оскільки $\det L_3 = \det C$, то C − оборотна матриця порядку $n-1$ з множини $\mathbf{L}(\operatorname{diag}(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{n-1}),\operatorname{diag}(\varphi_1,\dots,\varphi_{n-1}))$. Згідно з припущенням індукції знайдуться такі матриці $H_3 \in \mathbf{G}_{\operatorname{diag}(\varphi_1,\dots,\varphi_{n-1})}$ та $S \in \mathbf{G}_{\operatorname{diag}(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{n-1})}$, що

$$H_3CS = \mathcal{V} \in \mathbf{V}(\operatorname{diag}(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{n-1}),\operatorname{diag}(\varphi_1,\dots,\varphi_{n-1})).$$

Тоді

$$\left\|\begin{matrix} H_3 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}\right\| \cdot \left\|\begin{matrix} C & 0 \\ g & 1 \end{matrix}\right\| \cdot \left\|\begin{matrix} S & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} H_3CS & 0 \\ gS & 1 \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} 1 & \dots & 0 & 0 \\ & \ddots & \dots & \dots \\ & & 1 & 0 \\ * & & & 1 \end{matrix}\right\| = L_4 \in \mathbf{L}(\Psi,\Phi),$$

при цьому $\left\|\begin{matrix} H_3 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}\right\| \in \mathbf{G}_\Phi$, $\left\|\begin{matrix} S & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}\right\| \in \mathbf{G}_\Psi$. На підставі леми 4 з [10] в групі $\mathbf{G}_\Phi$ існує така матриця H_4, що $H_4L_4 \in \mathbf{V}(\Psi,\Phi)$. Отже, $\mathbf{L}(\Psi,\Phi) \subseteq \mathbf{G}_\Phi \mathbf{V}(\Psi,\Phi)\mathbf{G}_\Psi$.

Згідно з властивостями 2 та 3 з [10] $\mathbf{G}_\Phi \mathbf{L}(\Psi,\Phi) = \mathbf{L}(\Psi,\Phi)$ та $\mathbf{L}(\Psi,\Phi)\mathbf{G}_\Psi = \mathbf{L}(\Psi,\Phi)$. Оскільки $\mathbf{V}(\Psi,\Phi) \subseteq \mathbf{L}(\Psi,\Phi)$, то $\mathbf{G}_\Phi \mathbf{V}(\Psi,\Phi)\mathbf{G}_\Psi \subseteq$ $\subseteq \mathbf{L}(\Psi,\Phi)$. Отже $\mathbf{L}(\Psi,\Phi) = \mathbf{G}_\Phi \mathbf{V}(\Psi,\Phi)\mathbf{G}_\Psi$.

Лема 1. *Якщо у визначальній матриці* $k_{nj}(x) \equiv 0$, *то*

$$k_{n1}(x) \equiv \dots \equiv k_{n,j-2}(x) \equiv k_{n,j-1}(x) \equiv 0, \qquad j = 1,\dots,n-1.$$

Д о в е д е н н я. Згідно з означенням $k_{nj}(x) \equiv 0$ тоді й лише тоді, коли $(\varphi,\varepsilon_j) = 1$. Оскільки $\varepsilon_\ell \mid \varepsilon_j$, $\ell = 1,\dots,j-2,j-1$, то $(\varphi,\varepsilon_\ell) \mid (\varphi,\varepsilon_j) = 1$. Отже, $(\varphi,\varepsilon_\ell) = 1$. Тому

$$(\varphi,\varepsilon_1) = \dots = (\varphi,\varepsilon_{j-2}) = (\varphi,\varepsilon_{j-1}) = 1.$$

Таким чином,

$$k_{n1}(x) \equiv \dots \equiv k_{n,j-2}(x) \equiv k_{n,j-1}(x) \equiv 0.$$

Лему доведено. ◊

Розглянемо добуток матриць $\mathcal{V}(\Psi,\Phi)T(x)$, де $T(x) = \left\|t_{ij}\right\|_1^n \in \mathbf{G}_\Psi$. Позначимо $d_{in} = \dfrac{\varphi}{(\varphi,\varepsilon_i)} t_{in}$, $i = 1,\dots,n-1$.

Лема 2. *Нехай* $\varphi(\alpha) = 0$. *Тоді*

$$f(\alpha) = d_{1n}(\alpha)k_{n1}(\alpha) + d_{2n}(\alpha)k_{n2}(\alpha) + \dots + d_{n-1,n}(\alpha)k_{n,n-1}(\alpha) + t_{nn}(\alpha) \equiv 0$$

тоді й лише тоді, коли кожен доданок цієї суми дорівнює нулю.

Д о в е д е н н я. *Достатність* очевидна.

Необхідність. Нехай j − перший індекс, для якого $k_{nj}(x) \equiv 0$, а $k_{n,j+1}(x) \not\equiv 0$, $0 \le j \le n-1$, де $k_{n0}(x) \equiv 0$. Тоді на підставі леми 1

$$k_{n1}(x) \equiv \ldots \equiv k_{n,j-2}(x) \equiv k_{n,j-1}(x) \equiv 0 .$$

Отже,

$$f(\alpha) = d_{j+1,n}(\alpha)k_{n,j+1}(\alpha) + \ldots + d_{n-1,n}(\alpha)k_{n,n-1}(\alpha) + t_{nn}(\alpha) = 0 ,$$

де $k_{ni}(x) \not\equiv 0$, $i = j+1,\ldots,n-1$. Зауваживши, що

$$k_{ni}(\alpha) = k_{ni0} + k_{ni1}\alpha + \ldots + k_{nih_{ni}}\alpha^{h_{ni}} ,$$

приходимо до висновку, що рівність $f(\alpha) \equiv 0$ виконується лише тоді, коли

$$d_{j+1,n}(\alpha) = \ldots = d_{n-1,n}(\alpha) = t_{nn}(\alpha) = 0 .$$

Лему доведено. ◊

Лема 3. *Нехай* $\varphi(\alpha) = 0$. *Тоді, якщо* $\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_s}(\alpha) \neq 0$, *то* $k_{ns}(x) \not\equiv 0$, $1 \le s < n$.

Д о в е д е н н я. Припустимо, що $k_{ns}(x) \equiv 0$. Тоді $(\varphi, \varepsilon_s) = 1$. Оскільки

$$\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_s} = \frac{\varphi\varepsilon_n(\varphi, \varepsilon_s)}{(\varphi, \varepsilon_s)\varphi\varepsilon_s} = \varphi \cdot \frac{(\varepsilon_n\varphi, \varepsilon_n\varepsilon_s)}{\varphi\varepsilon_s} ,$$

то $\varphi \mid \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_s}$. Звідси випливає, що $\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_s}(\alpha) = 0$, а це суперечить умові леми. ◊

Лема 4. *Якщо* $T(x) = \left\| t_{ij} \right\|_1^n \in \mathbf{G}_\Psi$, *то*

$$\left(\varphi(x), \frac{\varphi}{(\varphi, \varepsilon_1)} k_{n1}t_{1n} + \frac{\varphi}{(\varphi, \varepsilon_2)} k_{n2}t_{2n} + \ldots + \frac{\varphi}{(\varphi, \varepsilon_{n-1})} k_{n,n-1}t_{n-1,n} + t_{nn} \right) = 1 .$$

Д о в е д е н н я. Припустимо, що

$$\left(\varphi(x), \frac{\varphi}{(\varphi, \varepsilon_1)} k_{n1}t_{1n} + \frac{\varphi}{(\varphi, \varepsilon_2)} k_{n2}t_{2n} + \ldots + \frac{\varphi}{(\varphi, \varepsilon_{n-1})} k_{n,n-1}t_{n-1,n} + t_{nn} \right) =$$
$$= \delta(x) \neq \mathrm{const} .$$

Нехай $\alpha \in F'$ − поле розкладу многочлена $\varphi(x)$ і $\delta(\alpha) = 0$. Тоді $\varphi(\alpha) = 0$ та

$$f(\alpha) = \frac{\varphi}{(\varphi, \varepsilon_1)} k_{n1}t_{1n}\Big|_\alpha + \frac{\varphi}{(\varphi, \varepsilon_2)} k_{n2}t_{2n}\Big|_\alpha +$$
$$+ \ldots + \frac{\varphi}{(\varphi, \varepsilon_{n-1})} k_{n,n-1}t_{n-1,n}\Big|_\alpha + t_{nn}(\alpha) \equiv 0 .$$

Нехай j − перший індекс, для якого $\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_j}(\alpha) = 0$, а $\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_{j+1}}(\alpha) \neq 0$, $0 \le j < n$, де $\varepsilon_0(x) = 1$. Оскільки $\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_j} \mid \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_\ell}$, то $\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_\ell}(\alpha) = 0$, $\ell = 1,\ldots,j-2,j-1$. Із того, що $\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_{j+1}}(\alpha) \neq 0$ випливає, що $\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_s}(\alpha) \neq 0$, $s = j+1, j+2,\ldots,n-1$. Оскільки $\frac{\varphi}{(\varphi, \varepsilon_s)} \mid \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_s}$, то $\frac{\varphi}{(\varphi, \varepsilon_s)}(\alpha) \neq 0$, $s = j+1, j+2,\ldots,n-1$. На підставі леми 3 $k_{n,j+1} \not\equiv 0$, а це означає, що $k_{n,j+2} \not\equiv 0,\ldots,k_{n,n-1} \not\equiv 0$. Тоді з леми 2 випливає, що

$$t_{j+1,n}(\alpha) = 0, \quad t_{j+2,n}(\alpha) = 0, \quad \ldots, \quad t_{n-1,n}(\alpha) = 0 , \; t_{nn}(\alpha) = 0 .$$

Оскільки $\dfrac{\varepsilon_n}{\varepsilon_j} = \dfrac{\varepsilon_n}{\varepsilon_s} \cdot \dfrac{\varepsilon_s}{\varepsilon_j}$, то $\dfrac{\varepsilon_s}{\varepsilon_j}(\alpha) = 0$, $j = 1, \ldots, n-1$, $s = j+1, \ldots, n-1$. Оскільки $\dfrac{\varepsilon_n}{\varepsilon_\ell} = \dfrac{\varepsilon_n}{\varepsilon_s} \cdot \dfrac{\varepsilon_s}{\varepsilon_\ell}$, то $\dfrac{\varepsilon_s}{\varepsilon_\ell}(\alpha) = 0$, $\ell = j-1, \ldots, 1$, $s = j+1, \ldots, n-1$.

Таким чином, матриця $T(\alpha)$ має вигляд

$$T(\alpha) = \begin{Vmatrix} * & * & * \\ \mathbf{0}_{(n-j)\times j} & * & \mathbf{0}_{(n-j)\times 1} \end{Vmatrix},$$

де $\mathbf{0}_{i\times j}$ − нульова $(i \times j)$-матриця. Зауважимо, що коли $j = 0$, то матриця $\mathbf{0}_{(n-j)\times j}$ є порожньою. Матриця $T(\alpha)$ містить нульову підматрицю розміру $(n-j)\times(j+1)$. Оскільки $n - j + j + 1 = n + 1 > n$, то згідно з лемою 4 із [11] $\det T(\alpha) = 0$, що суперечить її оборотності. ◊

Д о в е д е н н я **теореми 1**.

Достатність. Розглянемо матрицю $A(x)$ як матрицю над $F(k)[x]$. Нехай матриця $(\mathcal{V}(\Psi, \Phi)P(x))^{-1}\Phi(x) = B(x)$ є регуляризовною справа над $F(k)[x]$, тобто існує така матриця $U(x) \in GL_n(F(k)[x])$, що

$$B(x)U(x) = Ex^r + B_{r-1}x^{r-1} + \ldots + B_1 x + B_0 .$$

Згідно з твердженням 1 із [6] всі ліві дільники матриці $A(x)$ утворюють множину $(\mathbf{L}^*(\Psi, \Phi)P(x))^{-1}\Phi(x)GL_n(F[x])$. Оскільки $\mathcal{V}(\Psi, \Phi) \subseteq \mathbf{L}^*(\Psi, \Phi)$, то $B(x)$ є лівим дільником матриці $A(x)$: $A(x) = B(x)C(x)$. На підставі леми 4 з [5] матриця $B(x)$ є регуляризовною справа над $F(k)[x]$ тоді й лише тоді, коли

$$\det M_B = f(k_{n10}, \ldots, k_{n,n-1,h_{n,n-1}}, x) \not\equiv 0 ,$$

де M_B − відповідна матриця до матричного многочлена $B(x)$. Згідно з лемою 5 із [5] коефіцієнти унітального матричного многочлена $B(x)U(x)$ мають вигляд $B_k = \sum\limits_{i=0}^{k} T_i M_{(r-k)+i,r} = \sum\limits_{i=0}^{k} \dfrac{1}{\det M_B} T_i M_{ij}$, $k = 0, 1, \ldots, r-1$, $i, j = 0, 1, \ldots, n$, де T_i − коефіцієнти матричного многочлена $B(x)$, $M_{(r-k)+i,r}$ − відповідні блоки матриці M_B^{-1}. У нескінченному полі F знайдуться такі елементи $p_{n10}, \ldots, p_{n,n-1,h_{n,n-1}}, p_{nn}$, що $f(p_{n10}, \ldots, p_{nn}) \neq 0$. Тоді матриця $\bar{B}(x)$, яка отримується із матриці $B(x)U(x)$ заміною змінних $k_{n10}, \ldots, k_{n,n-1,h_{n,n-1}}, x$ на відповідні елементи $p_{n10}, \ldots, p_{n,n-1,h_{n,n-1}}, p_{nn}$ із поля F, і буде шуканим унітальним дільником матриці $A(x)$.

Необхідність. Нехай $A(x) = B(x)C(x)$, де $B(x)$ − унітальний дільник матриці $A(x)$ з к. д. ф. $\Phi(x)$. Згідно з твердженням 1 із [6] всі дільники матриці $A(x)$ над $F[x]$ утворюють множину $(\mathbf{L}(\Psi, \Phi)P(x))^{-1}\Phi(x)GL_n(F[x])$. Тому матрицю $B(x)$ можна записати у вигляді

$$B(x) = (L(x)P(x))^{-1}\Phi(x)K(x) ,$$

де

$$L(x) \in \mathbf{L}(\Psi, \Phi), \qquad K(x) \in GL_n(F[x]) .$$

На підставі теореми 2 $L(x) = H(x)\mathcal{V}_0(x)S(x)$, де $H(x) \in \mathbf{G}_\Phi$, $\mathcal{V}_0(x) \in \mathbf{V}(\Psi, \Phi)$, $S(x) \in \mathbf{G}_\Psi$. Тоді

$$B(x) = \left(L(x)P(x)\right)^{-1}\Phi(x)K(x) = \left(H(x)\mathcal{V}_0(x)S(x)P(x)\right)^{-1}\Phi(x)K(x).$$

Згідно з роботами [1, 10] множина всіх лівих перетворювальних матриць матриці $A(x)$ має вигляд $\mathbf{P}_A = \mathbf{G}_\Psi P$. Отже, $S(x)P(x) = P_0(x)$ – ліва перетворювальна матриця матриці $A(x)$. Тоді

$$B(x) = \left(H(x)\mathcal{V}_0(x)P_0(x)\right)^{-1}\Phi(x)K(x) = P_0^{-1}(x)\mathcal{V}_0^{-1}(x)H^{-1}(x)\Phi(x)K(x).$$

Оскільки $H^{-1}(x)\Phi(x) = \Phi(x)H_1(x)$, де $H_1(x) \in GL_n(F[x])$, то

$$B(x) = P_0^{-1}(x)\mathcal{V}_0^{-1}(x)\Phi(x)H_1(x)K(x) = \left(\mathcal{V}_0(x)P_0(x)\right)^{-1}\Phi(x)K_1(x).$$

Матриця $B(x)$ є унітальною, а тому матриця $\left(\mathcal{V}_0(x)P_0(x)\right)^{-1}\Phi(x)$ регуляризовна справа. Замінивши в матриці $\mathcal{V}_0(x)$ коефіцієнти многочленів на відповідні параметри $k_{ij\ell}$, отримаємо, що матриця $\left(\mathcal{V}(\Psi,\Phi)P_0(x)\right)^{-1}\Phi(x)$ є регуляризовною справа над $F(k)[x]$.

Покажемо, що, незалежно від вибору перетворювальної матриці $P_1(x)$, матриця $D(x) = \left(\mathcal{V}(\Psi,\Phi)P_1(x)\right)^{-1}\Phi(x)$ також регуляризовна справа. Оскільки $P_1(x) = N(x)P_0(x)$, де $N(x) \in \mathbf{G}_\Psi$, то

$$D(x) = \left(\mathcal{V}(\Psi,\Phi)P_1(x)\right)^{-1}\Phi(x) = \left(\mathcal{V}(\Psi,\Phi)N(x)P_0(x)\right)^{-1}\Phi(x) =$$

$$= \left((\mathcal{V}(\Psi,\Phi)N(x))P_0(x)\right)^{-1}\Phi(x).$$

Взявши до уваги лему 3 з [6] та врахувавши лему 4, отримаємо, що існує така матриця $T(x) \in \mathbf{G}_\Phi^*$, що $T(x)\mathcal{V}(\Psi,\Phi)N(x)$ є нижньою унітрикутною матрицею із $F(k)[x]$. Згідно з лемою 4 із [10] існує така матриця $T_1(x) \in \mathbf{G}_\Phi^*$, що

$$T_1(x)T(x)\mathcal{V}(\Psi,\Phi)N(x) = \mathcal{V}_1(\Psi,\Phi) \in \mathbf{V}(\Psi,\Phi).$$

Тоді

$$D(x) = \left(T_1(x)T(x)(\mathcal{V}(\Psi,\Phi)N(x))P_0(x)\right)^{-1}T_1(x)T(x)\Phi(x) =$$

$$= \left((T_1(x)T(x)\mathcal{V}(\Psi,\Phi)N(x))P_0(x)\right)^{-1}\Phi(x)\left(T^{-1}(x)T_1^{-1}(x)\right) =$$

$$= \left(\mathcal{V}_1(\Psi,\Phi)P_0(x)\right)^{-1}\Phi(x)T_2^{-1}(x).$$

Перепозначивши в матриці $\mathcal{V}_1(\Psi,\Phi)$ параметри $k_{ij\ell}$ через $k'_{ij\ell}$ отримаємо, що матриця $\left(\mathcal{V}(\Psi,\Phi)P_0(x)\right)^{-1}\Phi(x)$ є регуляризовною справа над $F(k)[x]$.

Теорему доведено. ◊

1. *Зелиско В. Р.* О строении одного класса обратимых матриц // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1980. – Вып. 12. – С. 14–21.
2. *Зеліско В. Р., Щедрик В. П.* Матриця значень на системі коренів діагональних елементів матриці та її застосування // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2005. – **48**, № 4. – С. 20–29.
3. *Казимирский П. С.* Решение проблемы выделения регулярного множителя из матричного многочлена // Укр. мат. журн. – 1980. – **32**, № 4. – С. 483–498.
   Те саме: *Kazimirskii P. S.* A solution to the problem of separating a regular factor from a matrix polynomial // Ukr. Math. J. – 1980. – **32**, № 4. – P. 332–343.

4. *Малышев А. Н.* Факторизация матричных полиномов // Сиб. мат. журн. – 1982. – **23**, № 3. – С. 136–146.
5. *Петричкович В. М.* Про розкладність матричних многочленів в добуток унітальних множників // Алгебра і топологія. – Львів: Вид-во Львів. держ. ун-ту. – 1996. – С. 112–124.
6. *Щедрик В. П.* Про один клас дільників матриць // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1997. – **40,** № 3. – С. 13–19.
   Те саме: *Shchedryk V. P.* On a class of divisors of matrices // J. Math. Sci. – 1999. – **96**, No. 2. – P. 2804–2810.
7. *Gochberg I., Lancaster P., Rodman L.* Matrix polynomials. – New York: Acad. Press, 1982. – 409 p.
8. *Maroulas J., Psarrakos P.* On factorization of matrix polynomials // Linear Algebra and its Appl. – 2000. – **304**. – P. 131–139.
9. *Newman M.* Integral matrices. – New York: Acad. Press, 1972. – 224 p.
10. *Shchedryk V. P.* Factorization of matrices over elementary divisor rings // Algebra and Discrete Math. – 2009. – No. 2. – P. 79–98.
11. *Shchedryk V.* On decomposition of complete linear group into product of some its subgroups // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2003. – Вип. 61. – С. 184–190.
12. *Shchedryk V. P.* Some properties of primitive matrices over Bezout *B*-domain // Algebra and Discrete Math. – 2005. – No. 2. – P. 46–57.
13. *Stefanovski J.* Spectral factorization of non-symmetric polynomial matrices // Linear Algebra and its Appl. – 2006. – **412**. – P. 412–440.

УНИТАЛЬНЫЕ ДЕЛИТЕЛИ С ОДНИМ ИНВАРИАНТНЫМ МНОЖИТЕЛЕМ МНОГОЧЛЕННЫХ МАТРИЦ

Для неособенной многочленной матрицы над бесконечным полем указаны необходимые и достаточные условия выделения унитального множителя из матричного многочлена с канонической диагональной формой $\operatorname{diag}(1,\ldots,1,\varphi(x))$.

UNITAL DIVISORS WITH ONE INVARIANT FACTOR OF POLYNOMIAL MATRICES

For nonsingular polynomial matrix over an infinite field the necessary and sufficient conditions of secretion of unital factor from matrix polynomial with canonical diagonal form $\operatorname{diag}(1,\ldots,1,\varphi(x))$ *are established.*

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
17.02.10