

ПОЗДОВЖНІЙ ЗСУВ ПРУЖНОГО СЕРЕДОВИЩА З ТОНКИМ ПРЯМОЛІНІЙНИМ ГОСТРОКІНЦЕВИМ П'ЄЗОЕЛЕКТРИЧНИМ ВКЛЮЧЕННЯМ НИЗЬКОЇ ЖОРСТКОСТІ

Запропоновано методику дослідження напружено-деформованого стану поблизу край гострокінцевого тонкого прямолінійного п'єзоелектричного включення змінної товщини та низької жорсткості, що знаходиться у пружному ізотропному середовищі. Методика ґрунтується на поєднанні асимптотичного аналізу розв'язків задачі та методу сингулярних інтегральних рівнянь, в основу чисельної реалізації яких закладено процедуру регуляризації Канторовича розбіжних інтегралів і метод колокацій.

Вступ. Дифракційні процеси у пружних середовищах з тонкостінними пружними неоднорідностями переважно вивчалися без урахування електричних властивостей матеріалів. В цьому зв'язку слід згадати, наприклад, праці [2, 4, 6, 20, 22, 24], де розглядалися задачі при різних обмеженнях на пружні властивості тонкого включення, а також відповідні статичні задачі (див., наприклад, огляд [12]). Проте об'єктом сучасних досліджень (актуальних для розробки новітніх засобів ультразвукової діагностики та неруйнівного контролю, створення композитних матеріалів з новими властивостями тощо) все частіше стають хвильові поля в електропружних неоднорідних структурах [16–18], в тому числі і з тонкостінними концентраторами напружень [10, 13, 15, 25].

У пропонуваній статті викладено методику визначення полів зміщень і напружень в околі гострокінцевого тонкого прямолінійного п'єзоелектричного включення змінної товщини та низької жорсткості, що знаходиться у пружному ізотропному середовищі. При розробці методики суттєвим є врахування обмеженості напружень при підході до гострого краю неоднорідності [7, 13, 20].

Важливою складовою запропонованої методики є створення алгоритму чисельної реалізації двовимірних сингулярних інтегральних рівнянь (СІР), які виникають у процесі дослідження поставленої задачі. Незважаючи на різноманіття підходів до розв'язання таких рівнянь (див. огляди в [4, 8, 9, 12, 20, 21, 23]), стійкі алгоритми на сьогодні розроблені лише для окремих спеціальних форм гострокінцевих тонких неоднорідностей [4–6]. Запропонована в статті чисельна схема розв'язання СІР, що базується на процедурі регуляризації Канторовича розбіжних інтегралів та методі колокацій, є стійкою при довільних формах гострокінцевих тонких пружних включень. Подібний підхід був запропонований раніше в [4, 19, 23] для розв'язання тривимірних СІР, коли підінтегральна функція при підході до краю області визначення має асимптотику типу «квадратного кореня».

Постановка задачі. Нехай у пружному ізотропному необмеженому середовищі з модулем зсуву μ та густиною ρ в умовах ідеального механічного контакту і за поздовжнього зсуву пружної системи знаходиться тонке прямолінійне п'єзоелектричне включення, що займає область $W_\varepsilon = \{(x_1, x_2) : |x_1| < a, 2|x_2| \leq h(x_1)\}$, де $h(x_1)$ та $2a$ – товщина та довжина неоднорідності, $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ – декартові координати. Мала відносна товщина включення характеризується параметром $\varepsilon = a^{-1} \max_{|x| < a} h(x) \ll 1$. Матеріал неоднорідності з пружною сталою c_{44} належить до кристалографічного класу $6mm$, а вісь симетрії шостого порядку перпендикулярна до площини

$x_1 x_2$ [1, 10, 13]. При усталених коливаннях композиту зміщення у матриці задовольняють рівняння Гельмгольца

$$\Delta u^s(\mathbf{x}) + k^2 u^s(\mathbf{x}) = 0, \quad u(\mathbf{x}) = u^s(\mathbf{x}) + u^{\text{in}}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus W_\varepsilon, \quad (1)$$

де $u(\mathbf{x})$ та $u^s(\mathbf{x})$ – повне та розсіяне (що задовольняє умову випромінювання Зоммерфельда) поля зміщень у матриці; $u^{\text{in}}(\mathbf{x})$ – задані зміщення у тілі без включення; k – хвильове число у матриці.

На поверхні включення ∂W_ε виконується умова рівності нулеві електричної індукції. При такій електричній умові (за ідеального механічного контакту компонент композиту) динамічну рівновагу тонкого п'єзоелектричного включення низької жорсткості з оточуючим ізотропним середовищем можна асимптотично наближено змоделювати граничними умовами, записаними на серединній лінії включення [10, 13]:

$$\Phi(x_1) = u(x_1, +0) - u(x_1, -0) = \frac{h(x_1)}{\gamma_*} \frac{\partial u(x_1, \pm 0)}{\partial x_2},$$

$$\frac{\partial u(x_1, +0)}{\partial x_2} = \frac{\partial u(x_1, -0)}{\partial x_2}, \quad |x_1| < a, \quad x_2 = 0. \quad (2)$$

Тут

$$\gamma_* = \gamma(1 + \eta^2), \quad \gamma = \frac{c_{44}}{\mu}, \quad \eta = \frac{e_{15}}{\sqrt{c_{44}\varepsilon_{11}}},$$

$\Phi(x_1)$ – стрибок зміщень у матриці на середині включення; e_{15} , ε_{11} – п'єзоелектрична стала і діелектрична проникність матеріалу неоднорідності; η – коефіцієнт електромеханічного зв'язку.

Надалі розглядатимемо гострокінцеві включення, коли асимптотика функції $h(x_1)$ при $x_1 \rightarrow \pm a$ має вигляд

$$h(x_1) \sim h_0^\pm |1 \mp x_1/a|^{\delta_\pm}, \quad x_1 \rightarrow \pm a, \quad (3)$$

$$h_0 = \text{const} \neq 0, \quad \delta_\pm > 1,$$

δ_\pm – параметри загострення країв включення.

Інтегральні рівняння задачі. Запишемо розв'язок задачі (1), (2) у вигляді інтегрального подання [14]

$$u^s(\mathbf{x}) = \int_{-a}^a \Phi(x_1^0) \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0)}{\partial x_2^0} dx_1^0, \quad (4)$$

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(kR), \quad R = |\mathbf{x} - \mathbf{x}^0|, \quad \mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0), \quad x_2^0 = 0,$$

де $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0)$ – функція Гріна; $H_0^{(1)}(kR)$ – функція Ганкеля першого роду нульового порядку.

Задовольняючи поданням (4) граничні умови (2), отримаємо інтегральне рівняння для визначення стрибка зміщень $\Phi(x_1)$ на серединній лінії включення

$$q_1(x_1)\Phi(x_1) + k^2 \int_{-a}^a \Phi(p)\mathcal{K}(k|x_1 - p|) dp = q_2(x_1), \quad |x_1| < a, \quad (5)$$

$$\mathcal{K}(t) = -\frac{i}{4} \frac{H_1^{(1)}(t)}{t},$$

$$q_1(x_1) = \gamma_* \frac{1}{h(x_1)}, \quad q_2(x_1) = \frac{\partial u^{\text{in}}(\mathbf{x})}{\partial x_2}, \quad x_2 = 0.$$

Тут $H_1^{(1)}(t)$ – функція Ганкеля першого роду першого порядку.

Враховуючи характер поведінки розв'язку задачі поблизу країв включення при умові (3) [2, 7, 20], функцію $\Phi(x_1)$ подамо у вигляді

$$\Phi(x_1) = \omega(t)\Phi_0(t), \quad (6)$$

де

$$\omega(t) = (1-t)^{\delta_+}(1+t)^{\delta_-}, \quad t = x_1/a, \quad \delta_{\pm} > 1,$$

$\Phi_0(t)$ – функція, регулярна при $t \in [-1, 1]$.

Ядро $\mathcal{K}(t)$ гіперсингулярного інтегрального рівняння (5) має таку асимптотику:

$$\mathcal{K}(t) = -\frac{1}{2\pi t^2} + \frac{1}{4\pi} \ln|t| + O(1), \quad t \rightarrow 0. \quad (7)$$

При регуляризації розбіжних інтегралів скористаємось процедурою, яка базується на відніманні відрізка ряду Тейлора функції $\Phi_0(t)$ (методом регуляризації Канторовича) [3, 8]. Враховуючи співвідношення (6), (7), перепишемо рівняння (5) у вигляді

$$\begin{aligned} aq_1(x)\omega(x)\Phi_0(x) - \frac{1}{2\pi} \left[\left(I_2(x) - \frac{k_*^2}{2} I_0(x) \right) \Phi_0(x) + I_1(x)\Phi_0'(x) \right] - \\ - \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\omega(t)}{(t-x)^2} [\Phi_0(t) - \Phi_0(x) - (t-x)\Phi_0'(x)] dt + \\ + \frac{k_*^2}{4\pi} \int_{-1}^1 \omega(t) [\Phi_0(t) - \Phi_0(x)] \ln|t-x| dt + \\ + \int_{-1}^1 \omega(t)\Phi_0(t)\mathcal{K}_1(t,x) dt = aq_2(x), \quad |x| < 1. \end{aligned} \quad (8)$$

Тут позначено

$$I_0(x) = \int_{-1}^1 \omega(t) \ln|x-t| dt,$$

$$I_j(x) = \int_{-1}^1 \frac{\omega(t)}{(t-x)^j} dt, \quad j = 1, 2,$$

$$\mathcal{K}_1(t,x) = k_*^2 \mathcal{K}(k_*^2|x-t|) + \frac{1}{2\pi(t-x)^2} - \frac{k_*^2}{4\pi} \ln|t-x|, \quad k_* = ka,$$

$\mathcal{K}_1(t,x)$ – регулярне ядро. Методика обчислення $I_0(x)$ наведена у [8], інтеграли $I_j(x)$, $j = 1, 2$, обчислюємо згідно з поданнями [8, 9]:

$$\begin{aligned} I_j(x) = (-1)^j 2^{1-j+\delta_++\delta_-} \mathbf{B}(1-j+\delta_+, 1+\delta_-) \times \\ \times F\left(j, -1+j-\delta_+-\delta_-; j-\delta_+; \frac{1-x}{2}\right) - \\ - 2^{\delta_-} \cos(\pi\delta_+) \mathbf{B}(1+\delta_+, -1+j-\delta_+)(1-x)^{1-j+\delta_+} \times \end{aligned}$$

$$\times F\left(-\delta_-, 1 + \delta_+; 2 - j + \delta_+; \frac{1-x}{2}\right), \quad j = 1, 2,$$

де $V(a, b)$ та $F(a, b; c; x)$ – бета-функція та гіпергеометрична функція.

Інтеграл в рівнянні (8) є регулярними і з достатньою точністю обчислюються з використанням формули трапецій при рівномірному розбитті відрізка інтегрування. Позначивши через L_* відрізок $[-1, 1]$ з вилученим інтервалом розбиття, який містить точку x , інтегральне рівняння (8) подамо у регуляризованому вигляді

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} [I_1^*(x) - I_1(x)] \Phi_0'(x) + \left[a q_1(x) \omega(x) + \frac{1}{2\pi} (I_2^*(x) - I_2(x)) - \right. \\ & \left. - \frac{k_*^2}{4\pi} (I_0^*(x) - I_0(x)) \right] \Phi_0(x) + \\ & + k_*^2 \int_{L_*} \omega(t) \Phi_0(t) \mathcal{K}(k_*^2 |t-x|) dt = a q_2(x), \quad |x| \leq 1. \quad (9) \end{aligned}$$

Тут

$$\begin{aligned} I_0^*(x) &= \int_{L_*} \omega(t) \ln|x-t| dt, \\ I_j^*(x) &= \int_{L_*} \frac{\omega(t)}{(t-x)^j} dt, \quad j = 1, 2. \end{aligned}$$

Інтеграл вздовж L_* у рівнянні (9) також обчислюємо з використанням формули трапецій.

Для отримання дискретних аналогів (5), (9) функцію $\Phi_0(x)$ та її похідну апроксимуємо згідно з лінійною та квадратичною інтерполяційними формулами Лагранжа [11], причому вузли колокацій вибираємо в центрах інтервалів рівномірного розбиття області визначення $\Phi_0(x)$. Зазначимо, що подібний підхід запропоновано раніше в [4, 19, 23] до розв'язання тривимірних СІР при аналізі напружено-деформованого стану пружних тіл з просторовими плоскими тріщинами та тонкими включеннями.

Напружено-деформований стан поблизу гострих країв включень. Для визначення структури розв'язків задачі (2), (3) поблизу країв неоднорідності скористаємось методом послідовного розчеплення асимптотичних розкладів [7, 20]. Асимптотику повного поля зміщень $u(\mathbf{x})$ подамо як

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}) &= a_0 + \rho_{\pm} (a_1^{\text{in}} \cos \varphi_{\pm} + b_1 \sin \varphi_{\pm}) + o(\rho_{\pm}), \quad \rho_{\pm} \rightarrow 0, \\ & -\pi \leq \varphi_{\pm} \leq \pi, \quad (10) \end{aligned}$$

де $(\rho_{\pm}, \varphi_{\pm})$ – локальні полярні системи координат поблизу кінців включення при $x_1 \rightarrow \pm a$ (неоднорідність розміщена на лінії $\varphi_{\pm} = \pm \pi$); a_1^{in} – відомий коефіцієнт асимптотичного розкладу (заданого) зміщення $u^{\text{in}}(\mathbf{x})$ у тілі без включення:

$$u^{\text{in}}(\mathbf{x}) = a_0^{\text{in}} + \rho_{\pm} (a_1^{\text{in}} \cos \varphi_{\pm} + b_1^{\text{in}} \sin \varphi_{\pm}) + o(\rho_{\pm}).$$

Величина b_1 у (10), яка визначає рівень напружень в матриці поблизу кінців, зв'язана зі стрибком зміщень $\Phi(x_1)$ співвідношенням

$$b_1 = 2^{\delta_{\mp}} \gamma_* a (h_0^{\pm})^{-1} \Phi_0(\pm 1).$$

Для прикладу розглянемо випадок, коли

$$u^{\text{in}}(\mathbf{x}) = u_0 \exp[ik(x_1 \sin \theta_{\text{in}} - x_2 \cos \theta_{\text{in}})],$$

$$h(x_1) = \varepsilon a(1 - x_1/a)^{\delta_+} (1 + x_1/a)^{\delta_-},$$

де u_0 та θ_{in} – амплітуда та кут падіння набігаючої на включення плоскої гармонічної хвилі $u^{\text{in}}(\mathbf{x})$.

На рис. 1, рис. 2 наведено спектральні залежності нормованого узагальненого коефіцієнта інтенсивності $K_0 = \Phi_0(\pm 1)/u_0$ для значень коефіцієнта електромеханічного зв'язку $\eta = 0, 0.3, 0.6, 0.9$ (коли у включенні відсутній п'єзоэффект, тоді $\eta = 0$). Обчислення виконано для $\gamma = 0.1$ (рис. 1), $\gamma = 0.9$ (рис. 2) при $\varepsilon = 0.1$, $\theta_{\text{in}} = 0$.

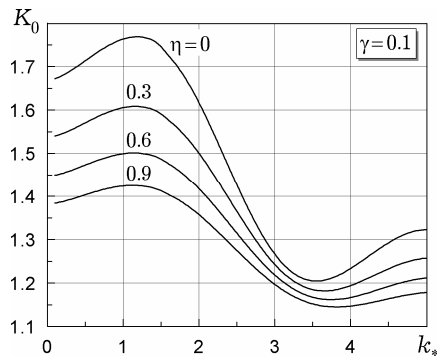


Рис. 1

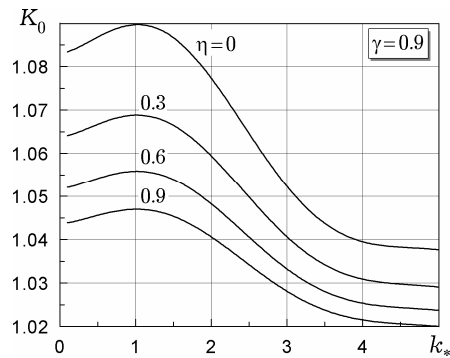


Рис. 2

Як видно із наведених графіків, зростання коефіцієнта електромеханічного зв'язку призводить до зменшення рівня напружень поблизу гострих кінців тонких включень малої жорсткості. Вплив п'єзоэффекту найбільш помітний у частотних діапазонах, в яких узагальнений коефіцієнт інтенсивності напружень K_0 набуває максимальних значень. Існують також частоти, при яких вплив п'єзоелектричних властивостей неоднорідності на величину параметра K_0 практично нівелюється.

Висновки. Розроблено методику визначення полів зміщень і напружень в околі гострокінцевих тонких прямокутних п'єзоелектричних включень змінної товщини та низької жорсткості, яку можна поширити на випадок криволінійних неоднорідностей.

Запропоновано стійкий алгоритм розв'язання двовимірних гіперсингулярних інтегральних рівнянь при довільному характері поведінки їх розв'язків поблизу країв області визначення.

На основі чисельного аналізу задачі можна зробити такі загальні механічні висновки: зростання коефіцієнта електромеханічного зв'язку призводить до зменшення рівня напружень поблизу гострих кінців тонких включень малої жорсткості; вплив п'єзоэффекту найбільш помітний у частотних діапазонах, в яких узагальнений коефіцієнт інтенсивності напружень набуває максимальних значень. Існують частоти, при яких вплив п'єзоелектричних властивостей неоднорідності на рівень напружень в околі її країв практично нівелюється.

1. Балакирев М. К., Гилинский И. А. Волны в пьезокристаллах. – Новосибирск: Наука, 1982. – 239 с.
2. Емец В. Ф., Кит Г. С., Кунец Я. И. Асимптотическое поведение решения задачи рассеяния упругой волны тонкостенным инородным включением // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1999. – № 3. – С. 55–63.
3. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. – Москва: Гостехиздат, 1952. – 695 с.

4. Кит Г. С., Кунец Я. И., Мыхаськів В. В. Взаимодействие стационарной волны с тонким дискообразным включением малой жесткости в упругом теле // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2004. – № 5. – С. 82–89.
5. Мартиняк Р. М., Чулак К. А. Термопружний контакт півпросторів, що мають однакові термічні дистортивності, за наявності теплопроникного міжповерхневого просвіту // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2008. – **51**, № 3. – С. 163–175.
6. Мыхаськів В. В., Кунец Я. І., Міщенко В. О. Напруження у тривимірному тілі з тонким податливим включенням за фронтом імпульсних хвиль // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2003. – **39**, № 3. – С. 63–68.
7. Мовчан А. Б., Назаров С. А. Напряженно-деформированное состояние в вершине острого включения // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1986. – № 3. – С. 155–163.
8. Назарчук Э. Т. Численное исследование дифракции волн. – Киев: Наук. думка, 1989. – 256 с.
9. Попов Г. Я. Избранные труды: В 2 т. – Одесса: Изд.-полиграф. дом ВМВ, 2007. – Т. 1. – 440 с.
10. Рабош Р. В. Динамічна взаємодія пружного середовища з тонкостінним криволінійним п'єзоелектричним включенням при поздовжніх коливаннях композита // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2009. – **52**, № 1. – С. 101–106.
11. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. – Москва: Наука, 1979. – 832 с.
12. Сулим Г. Т. Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями. – Львів: Досл.-вид. центр НТШ, 2007. – 716 с.
13. Сулим Г. Т., Кунец Я. І., Рабош Р. В. Асимптотичний аналіз динамічної взаємодії тонкого прямолінійного п'єзоелектричного включення з пружним середовищем за поздовжнього зсуву // Вісн. Донецьк. ун-ту. – 2008. – № 1. – С. 137–141.
14. Шендеров Е. Л. Излучение и рассеяние звука. – Ленинград: Судостроение, 1989. – 301 с.
15. Du J. K., Shen Y. P., Gao B. Scattering of anti-plane shear waves by a single crack in an unbounded transversely isotropic electro-magneto-elastic medium // J. Appl. Math. and Mech. – 2004. – **18**, No. 12. – P. 1344–1353.
16. Feng W. J., Su R. K. L., Liu Y. Q. Scattering of SH-waves by an arc-shaped interface crack between a cylindrical magneto-electro-elastic inclusion and matrix with the symmetry of 6mm // Acta Mechanica. – 2006. – **183**. – P. 81–102.
17. Hasheminejad S. M., Rajabi M. Scattering and active acoustic control from a submerged piezoelectric-coupled orthotropic hollow cylinder // J. Sound and Vibration. – 2008. – **318**. – P. 50–73.
18. Huang G. L., Sun C. T. The dynamic behaviour of a piezoelectric actuator bonded to an anisotropic elastic medium // Int. J. Solids and Struct. – 2006. – **43**. – P. 1291–1307.
19. Kit H. S., Khaj M. V., Mykhas'kiv V. V. Analysis of dynamic stress concentration in an infinite body with parallel penny-shaped cracks by BIEM // Eng. Fract. Mech. – 1996. – **55**, No. 2. – P. 191–207.
20. Kit H. S., Kunets Ya. I., Yemets V. F. Elastodynamic scattering from a thin-walled inclusion of low rigidity // Int. J. Eng. Sci. – 1999. – **37**. – P. 331–345.
21. Matus V. V., Emets V. F. T-matrix method formulation applied to the study of flexural waves scattering from a through obstacle in a plate // J. Sound and Vibration. – 2010. – **329**, No. 14. – P. 2843–2850.
22. Moiseenok A. P., Popov V. G. Interaction of plane nonstationary waves with a thin elastic inclusion under smooth contact conditions // Mech. of Solids. – 2009. – **44**, No. 4. – P. 621–631.
23. Mykhas'kiv V. V., Khay O. M. Interaction between rigid-disk inclusion and penny-shaped crack under elastic time-harmonic wave incidence // Int. J. Solids and Struct. – 2009. – **46**. – P. 602–616.
24. Popov V. G., Moiseenok A. P. Solution of the dynamic antiplane problem for a body with an inclusion by the method of finite differences by time // Materials Sci. – 2005. – **41**, No. 4. – P. 452–461.
25. Zhang B., Bostrom A., Niklasson A. J. Antiplane shear waves from a piezoelectric strip actuator: exact versus effective boundary condition solutions // Smart Mater. Struct. – 2004. – **13**. – P. 161–168.

**ПРОДОЛЬНОЕ СМЕЩЕНИЕ УПРУГОЙ СРЕДЫ С ТОНКИМ ПРЯМОЛИНЕЙНЫМ
ОСТРОКОНЕЧНЫМ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИМ ВКЛЮЧЕНИЕМ НИЗКОЙ ЖЕСТКОСТИ**

Предложена методика исследования напряженно-деформированного состояния вблизи краев остроконечного тонкого прямолинейного пьезоэлектрического включения переменной толщины и низкой жесткости, находящегося в упругой изотропной среде. Методика базируется на сочетании асимптотического анализа решений задачи и метода сингулярных интегральных уравнений, в основу численной реализации которых положены процедура регуляризации Канторовича расходящихся интегралов и метод коллокаций.

**LONGITUDINAL SHEAR OF ELASTIC MEDIUM WITH THIN RECTILINEAR PEAKED
PIEZOELECTRIC INCLUSION OF LOW RIGIDITY**

A procedure of study the stress-strain state near the edges of thin rectilinear peaked piezoelectric inclusion of variable thickness and low stiffness, which is located in an elastic isotropic medium, is proposed. The procedure is based on combination of asymptotic analysis of solutions of the problem and the method of singular integral equations, based on numerical realization of Kantorovich regularization procedure for divergent integrals and the collocations method.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
31.05.10