

## ИДЕНТИФИКАЦИЯ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ТОНКОСТЕННЫХ ОБОЛОЧЕК МЕТОДОМ ДЕКОМПОЗИЦИИ

*Разработан декомпозиционный подход для решения обратной задачи деформирования тонкостенной системы. Разложение вектора параметров приводит к необходимости решения параллельных задач существенно меньшей размерности. В результате декомпозиции происходит регуляризация задачи, улучшается обусловленность матриц, подлежащих обращению.*

**Введение.** Влияние нестационарности нагружения, технологических и приобретенных в процессе эксплуатации повреждений, изменения граничных условий может оказаться весьма существенным при оценке реальной несущей способности тонкостенных элементов. Методы обратных задач дают возможность исследовать указанные изменения путем использования дополнительной информации об известном поведении реальной системы в процессе деформирования [5, 7, 8]. Основными проблемами, возникающими при решении таких задач, являются их плохая обусловленность [2] и высокая размерность, что приводит к необходимости создания методов и алгоритмов, устраняющих указанные трудности [9]. В настоящее время основным подходом при решении обратных задач является замена дифференциальной формы модели интегральной, что предполагает построение функции Грина для соответствующей задачи аналитическими или численными методами [5], при этом трудности, связанные с плохой обусловленностью задачи, остаются.

Идея декомпозиции при решении плохо обусловленных задач, представленных параметрически, предложена в работе [1], где предполагается произвольная декомпозиция вектора неизвестных параметров, что позволяет снизить размерность задачи параметрической идентификации и сформировать устойчивые оценки неизвестного вектора параметров.

В настоящей работе развивается подход, сочетающий параметрическую формулировку прямой задачи и выбор способа декомпозиции неизвестных параметров обратной задачи в соответствии с вводимым критерием и последующее решение обратной задачи на основе параллельных алгоритмов.

**Постановка задачи.** Рассматривается упругая изотропная полая тонкостенная оболочка, занимающая ограниченную область пространства  $\Omega = \{X \mid X = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\}$  (возможно, многосвязную), ограниченную контуром  $\Gamma$ , с соответствующими граничными условиями на этом контуре.

Напряженно-деформированное состояние рассматриваемой системы, следуя И. И. Воровичу, описывается системой разрешающих обобщенных уравнений относительно вектора  $W = \{w, \Phi\}$ , где  $w$  – функция нормальных перемещений и  $\Phi$  – функция напряжений. Функционалы обобщенного решения, сформулированные как скалярные произведения, будут иметь такой вид:

$$\begin{aligned} (w \cdot \xi)_{\Psi_X} = & \iint_{\Omega(H^\Gamma)} \left[ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} \frac{\partial w}{\partial x_1} \frac{\partial \xi}{\partial x_1} + k_{22} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} \xi + k_{11} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} \xi + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} \frac{\partial w}{\partial x_2} \frac{\partial \xi}{\partial x_2} + \right. \\ & \left. + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial w}{\partial x_2} \frac{\partial \xi}{\partial x_1} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial w}{\partial x_1} \frac{\partial \xi}{\partial x_2} \right] dx_1 dx_2 + \\ & + \iint_{\Omega(H^\Gamma)} (\tilde{T}_{pt}^{ij} k_{ij} + q) \xi dx_1 dx_2 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \iint_{\Omega(H^\Gamma)} \tilde{T}_{pt}^{ij} \frac{\partial w}{\partial x_1} \frac{\partial \xi}{\partial x_2} dx_1 dx_2 + \int_{\Gamma} \tilde{M}^m ds, \quad (1) \\
(\Phi \cdot \theta)_{\Psi_t} = & - \iint_{\Omega(H^\Gamma)} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x_1} \right)^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_2^2} + k_{22} w \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_1^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x_2} \right)^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_1^2} - \right. \\
& \left. - \frac{\partial w}{\partial x_1} \frac{\partial w}{\partial x_2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_1 \partial x_2} \right] dx_1 dx_2 - \iint_{\Omega(H^\Gamma)} \tilde{T}_{pt}^{ij} \left[ \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_2^2} \right] dx_1 dx_2. \quad (2)
\end{aligned}$$

Здесь  $k_{ij}$  – кривизны поверхности в направлениях  $x_1, x_2$ ,  $i, j = 1, 2$ ;  $q$  – проекция вектора нагрузки на нормаль к поверхности  $S$ ;  $\tilde{T}_{pt}^{ij}$  – частное решение системы уравнений равновесия, характеризующее неоднородный случай;  $\tilde{M}^m$  – изгибающий момент, приложенный на  $\Gamma$ ;  $H^\Gamma$  – функция, описывающая контуры области  $\Omega$ .

В качестве граничных условий считаем выполненными условия  $w|_{\Gamma} = 0$ , остальные условия на границе  $\Gamma$  являются естественными [3]. Сочетание граничных условий таково, что возможно образование специальных функциональных пространств  $\Psi_\chi, \Psi_t$  [3] со скалярными произведениями вида

$$\begin{aligned}
(w \cdot \xi)_{\Psi_\chi} = & \iint_{\Omega(H^\Gamma)} \mathcal{D}_1(H^0) \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x_2^2} + \right. \\
& \left. + \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x_1 \partial x_2} \right] dx_1 dx_2, \\
(\Phi \cdot \theta)_{\Psi_t} = & \iint_{\Omega(H^\Gamma)} \mathcal{D}_2(H^0) \left[ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_1^2} + \right. \\
& \left. + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_1 \partial x_2} \right] dx_1 dx_2,
\end{aligned}$$

где  $\mathcal{D}_1(H^0), \mathcal{D}_2(H^0)$  являются функциями  $H^0(X)$  и характеризуют геометрические и физические параметры оболочки.

Пара функций  $(w(X), \Phi(X))$ ,  $w(X) \in \Psi_\chi, \Phi(X) \in \Psi_t$ , принадлежащая пространству пар функций со скалярным произведением

$$((w_1, \Phi_1) \cdot (w_2, \Phi_2)) = (w_1 \cdot w_2)_{\Psi_\chi} + (\Phi_1 \cdot \Phi_2)_{\Psi_t}$$

и удовлетворяющая интегральным соотношениям (1), (2) при любых  $\xi, \theta$ , является обобщенным решением нелинейной краевой задачи [3].

В точках  $X_n, n = 1, \dots, N$ , ограниченной пространственной области  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  известны (измеряются) значения нормальных перемещений:

$$w(X_n) = w_n^*. \quad (3)$$

Решение обратной задачи предполагает по известным следам (3) решения прямой задачи (1), (2):

- 1) определение функций  $H^\Gamma(X)$ , описывающих граничные контуры области  $\Omega$ ;
- 2) определение функции  $H^0(X)$ , описывающей параметры модели;
- 3) определение нагрузочного комплекса  $F = [q, \tilde{T}_{pt}^{ij}, \tilde{M}^m]$ , характеризующего внешнее воздействие.

Задача состоит в определении неизвестных функций  $H^0(X)$ ,  $H^\Gamma(X)$ ,  $F$  таких, что обобщенное решение  $w(X_n, H)$ , где  $H = \{H^0, H^\Gamma, F\}$  – вектор неизвестных функций задачи, удовлетворяет условию [4]

$$\varepsilon(w, H) = (w(X_n, H) - w_n^*) = 0, \quad n = 1, \dots, N. \quad (4)$$

**Метод решения.** Для формирования компонент  $w(X_n, H)$  условия (4) необходимо построить обобщенное решение прямой задачи (1), (2). Решение прямой задачи позволяет определить напряженно-деформированное состояние конструкции, возникающее в результате воздействия внешнего нагрузочного комплекса  $F = [q, \tilde{T}_{pt}^{ij}, \tilde{M}^m]$ , построить вектор нормальных перемещений  $w(X_n, H)$ , который совместно с заданным вектором  $w_n^*$  позволяет сформировать вектор невязки  $\varepsilon(w, H) = (w(X_n, H) - w_n^*)$ . Для решения прямой задачи будем использовать соотношения (1), (2). Параметризация всех неизвестных функций задачи осуществляется путем их аппроксимации с помощью метода конечных элементов (МКЭ).

Для построения системы уравнений МКЭ выполняется дискретизация области  $\Omega$  следующим образом:

– для решения прямой задачи вводится сетка с координатами узлов  $X_s$ , где  $X_s = \{x_{1s}, x_{2s}\}$ ,  $s = 1, \dots, S$  и соответствующими узловыми значениями функции  $w$  в виде вектора  $w(X_s) = \{w_s\}$ ;

– для представления условия (4) в дискретной форме вводится сетка с координатами узлов  $X_n$ , где  $X_n = \{x_{1n}, x_{2n}\}$ ,  $n = 1, \dots, N$ , все  $X_n$  из числа  $X_s$ , и заданными значениями функции  $w(X_n) = \{w_n^*\}$ ;

– для описания вектора неизвестных параметров вводится сетка с координатами узлов  $X_m$ ,  $m = 1, \dots, M$ , все  $X_m$  из числа  $X_s$ .

Рассматриваемая система представляется в виде ансамбля четырехузловых конечных элементов. Неизвестные функции на элементе задаются для локальной системы координат  $(\mu, \eta)$  при помощи аппроксимаций

$$\begin{aligned} w^e &= \sum_{r=1}^4 w_r B_r(\mu) B_r(\eta), & \Phi^e &= \sum_{r=1}^4 \Phi_r B_r(\mu) B_r(\eta), \\ \xi^e &= \sum_{r=1}^4 B_r(\mu) B_r(\eta), & \theta^e &= \sum_{r=1}^4 B_r(\mu) B_r(\eta), \end{aligned} \quad (5)$$

где  $w_r$ ,  $\Phi_r$  – значения функций в узлах;  $B_r$  – функции формы. В качестве функций формы используются интерполяционные полиномы на базе полиномов Богнера – Фокса – Шмидта, хорошо зарекомендовавшие себя в нелинейных задачах теории оболочек [6].

После выполнения соответствующей процедуры интегрирования и суммирования матриц элементов получаем систему уравнений в виде

$$KU = L, \quad (6)$$

где  $U_s = \{U_s\}^\top = \left[ w_s, \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)_s, \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)_s, \Phi_s, \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_s, \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_s, \dots \right]^\top$  – вектор значений

искомых функций в  $s$ -м узле,  $s = 1, \dots, S$ ;  $K = [C]^\top [D][C]$  – матрица жесткости;  $C$  – матрица функций формы;  $D$  – матрица упругости для всего ансамбля элементов;  $L$  – вектор, характеризующий внешнее воздействие.

В результате решения системы уравнений (6) получаем вектор перемещений  $w_s = w(X_s, P)$ ,  $s = 1, \dots, S$ , соответствующий обобщенному решению

(1), (2), который вместе с заданным вектором  $w_n^*$  позволяет сформировать дискретный аналог (4).

Для определения неизвестных параметров задачи организуется итерационный процесс. Представляя дискретный аналог условия (4) на  $k$ -м шаге итерационного процесса в виде разложения в ряд Тейлора аналогично [4]:

$$\varepsilon(w_n, H^{(k)}) = \varepsilon(w_n, H^{(k-1)}) + \Delta H^{(k)\top} \cdot \frac{d\varepsilon(w_n, H^{(k-1)})}{dH} = 0, \quad (7)$$

получим выражение для определения приращений параметров

$$R \cdot \Delta H^{(k)} = -\varepsilon(w_n, H^{(k-1)}), \quad (8)$$

где матрица  $R = \left[ \frac{d\varepsilon(w_i, H^{(k-1)})}{dH_m} \right]$ ,  $i = 1, \dots, N$ ,  $m = 1, \dots, M$ , характеризует реакцию деформируемой системы на изменение параметров;  $w_n$  – вектор значений функции  $w(X, H)$  в точках  $X_n$ .

Число итераций  $k$  определяется из условия

$$\varepsilon(w_n, H^{(k)}) \leq \varepsilon^*, \quad (9)$$

где  $\varepsilon^*$  – заданная малая величина.

Введем предположение о существовании наиболее информативных компонент  $\Delta H^1 = \{\Delta H_i^1\}$ ,  $i = 1, \dots, M_1$ ,  $M_1 < M$ , вектора параметров  $\Delta H = \{\Delta H_i\}$ ,  $i = 1, \dots, M$ , таких, что выполняется условие  $\|\Delta H - \Delta H^1\|^2 \rightarrow \min$ ,

и норма определяется как  $\|\Delta H - \Delta H^1\| = \sqrt{|\Delta H_1 - \Delta H_1^1|^2 + \dots + |\Delta H_M - \Delta H_M^1|^2}$ .

Тогда неизвестный вектор приращений параметров  $\Delta H = \{\Delta H_m\}_{m=1, M}$  можно представить в виде двух независимых вектора  $\Delta H^1$  и  $\Delta H^2$ , имеющих размерности  $M_1$  и  $M_2$  соответственно,  $M_1 + M_2 = M$ .

Зададим функции принадлежности  $u_i^p$ ,  $i = 1, \dots, M$ ,  $p = 1, 2$ , компонент вектора  $\Delta H$  векторам  $\Delta H^1$  и  $\Delta H^2$  в виде:

$$\begin{aligned} u_{r_1}^1(X) &= \delta(X - X_{r_1}), & r_1 \in I^1, & & I^1 &= \{r_{p_1}, \dots, r_{p_{M_1}}\}, \\ u_{r_2}^2(X) &= \delta(X - X_{r_2}), & r_2 \in I^2, & & I^2 &= \{r_{k_1}, \dots, r_{k_{M_2}}\}, \\ I^1 \cap I^2 &= \emptyset, \end{aligned} \quad (10)$$

где  $\delta(X - X_{r_p})$  – функция Дирака;  $M_1$  – заданное число ненулевых компонент вектора  $\Delta H^1$ .

Сформируем матрицы

$$\begin{aligned} [D]_{M \times M} &= \text{diag} \{\delta(X - X_r)\}, & r &= 1, \dots, M, \\ [D_1]_{M \times M} &= \text{diag} \{u_{r_1}^1\}, \\ [D_2]_{M \times M} &= [D] - [D_1]. \end{aligned}$$

Для описания векторов  $\Delta H^1$  и  $\Delta H^2$  будем использовать представления

$$\Delta \tilde{H}^1 = \int_{\Omega} D_1 \Delta H d\Omega, \quad \Delta \tilde{H}^2 = \int_{\Omega} D_2 \Delta H d\Omega$$

или в векторной форме

$$\Delta \tilde{H}^1 = \begin{bmatrix} \Delta H^1 \\ 0 \end{bmatrix}_{M \times 1}, \quad \Delta \tilde{H}^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta H^2 \end{bmatrix}_{M \times 1}, \quad [\Delta \tilde{H}^1] + [\Delta \tilde{H}^2] = [\Delta H].$$

Здесь

$$[\Delta H^1]_{M_1 \times 1} = \{\Delta H_{i_1}, \dots, \Delta H_{i_{M_1}}\}^\top,$$

$$[\Delta H^2]_{M_2 \times 1} = \{\Delta H_{j_{M_1+1}}, \dots, \Delta H_{j_M}\}^\top.$$

Векторы  $\Delta H^1$  и  $\Delta H^2$  будем определять независимо друг от друга в виде двух параллельных алгоритмов:

$$\Delta H^{1(k)} = \int_{\Omega} Q_1(X) \varepsilon(w_n, H^{(k)}) d\Omega, \quad (11)$$

$$\Delta H^{2(k)} = \int_{\Omega} Q_2(X) \varepsilon(w_n, H^{(k)}) d\Omega, \quad (12)$$

где  $Q_i(X) = [Q_{i_{mn}} \cdot \delta(X), m = 1, \dots, M_i, n = 1, \dots, N]$ ,  $i = 1, 2$ , – матрицы в которые входят искомые коэффициенты;  $(k)$  – индекс, характеризующий номер итерации процесса (8), в дальнейшем будет опущен.

На каждом шаге итерационного процесса функционал для условия  $\|\Delta H - \Delta H^1\|^2 \rightarrow \min$  будет иметь вид

$$J_1(Q_1, Q_2) = \int_{\Omega} \left( \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} \varepsilon(w_n, H) - \begin{bmatrix} Q_1 \\ 0 \end{bmatrix} \varepsilon^1(w_n, H) \right)^\top \times \\ \times \left( \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} \varepsilon(w_n, H) - \begin{bmatrix} Q_1 \\ 0 \end{bmatrix} \varepsilon^1(w_n, H) \right) d\Omega \rightarrow \min, \quad (13)$$

где  $\varepsilon(w_n, H)$  – невязка вида  $\varepsilon(w_n, H) = (w(X_n, H) - w_n^*)$ ,  $n = 1, \dots, N$ ;  $w(X_n, H)$  – нормальные перемещения, являющиеся решением прямой задачи (1), (2) при фиксированных значениях вектора параметров  $H$ ;  $w_n^*$  – измеренные значения нормальных перемещений;  $\varepsilon^1(w_n, H)$  – невязка, вычисленная при  $H = H^1$ , а интеграл рассматривается в смысле Стилтгеса.

Требуется найти вид оптимальных матриц  $Q_1$ ,  $Q_2$ , обеспечивающих минимизацию функционала (13), при этом по аналогии с [1] необходимо выполнить условия несмещенности

$$Q_i R_i - [E]_{M_i \times M_i} = [0]_{M_i \times M_i} \quad (14)$$

и инвариантности оценивания

$$Q_i R_j = [0]_{M_i \times M_j}, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \quad (15)$$

где  $[E]$  и  $[0]$  – единичная и нулевая матрицы соответствующей размерности;  $R_i = [R_i]_{N \times M_i}$  – матрицы с ненулевыми элементами, образованные из матриц  $[R]_{N \times M} \cdot [D_i]_{M \times M}$ .

Эти условия присоединяются к функционалу (13) с использованием множителей Лагранжа:

$$J_2(Q_1, Q_2, \bar{\Psi}) = J_1(Q_1, Q_2) + \int_{\Omega} \sum_i \bar{\Psi}_i g_i d\Omega + \int_{\Omega} \sum_i \bar{\eta}_i f_i d\Omega, \quad (16)$$

где  $\bar{\Psi}^\top = \{\bar{\Psi}_i\}$ ,  $\bar{\eta}^\top = \{\bar{\eta}_i\}$  – векторы множителей Лагранжа;  $g_i = Q_i R_j$ ,  $f_i = E_i - Q_i R_i$ ,  $i \neq j$ ,  $i \leftrightarrow j$ ,  $i, j = 1, 2$ .

Учитывая матричную запись функционала  $J_1$  (13) и ограничений (14), (15), функционал (16) представим в виде

$$\begin{aligned}
J_2(Q_i, \Psi_i, \eta_i) = & \int_{\Omega} \left( \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} \varepsilon - \begin{bmatrix} Q_1 \\ 0 \end{bmatrix} \varepsilon^1 \right)^\top \left( \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} \varepsilon - \begin{bmatrix} Q_1 \\ 0 \end{bmatrix} \varepsilon^1 \right) + \Psi_{1m}^\top R_2^\top Q_{1m} + \\
& + \Psi_{2m}^\top R_1^\top Q_{2m} + [E_{1m}^\top - Q_{1m}^\top R_1] \eta_{1m} + \\
& + [E_{2m}^\top - Q_{2m}^\top R_2] \eta_{2m} d\Omega \rightarrow \min, \tag{17}
\end{aligned}$$

где  $\Psi_{im} = [\Psi_{imn}, n = 1, \dots, N]^\top$ ,  $\eta_{im} = [\eta_{imn}, n = 1, \dots, N]^\top$  – соответствующие векторные множители Лагранжа;  $E_{im}$  – вектор-столбец размерности  $M_i \times 1$ , у которого на  $m$ -й позиции находится единица, а на остальных позициях – нули;  $Q_{im} = [q_{imn}, n = 1, \dots, N]^\top$  – вектор-столбец искомых коэффициентов матрицы,  $i = 1, 2$ ,  $m = 1, \dots, M_i$ .

Так как функции принадлежности компонент вектора  $\Delta H$  векторам  $\Delta H^i$ ,  $i = 1, 2$ ,  $u_m^i$  ограничены:  $0 \leq u_m^i \leq 1$ ,  $m = 1, \dots, M_i$ , и множество  $U$  представляется в виде  $U = \{u_m^i\} = \{(u_1^i, \dots, u_{M_i}^i) : 0 \leq u_m^i \leq 1, m = 1, \dots, M_i\}$ ,

то функция  $L(u) = \sum_{m=1}^{M_i} J'_{2u_m}(u) u_m^i$  достигает своей нижней грани на  $U$  в точке  $\bar{u}^i = \{\bar{u}_1^i, \dots, \bar{u}_{M_i}^i\}$ , где

$$\bar{u}_m^i = \begin{cases} 1, & (\Psi_{jm}^\top R_i^\top Q_{jm} - Q_{jm}^\top R_j \eta_{jm}) < 0, \\ 0, & (\Psi_{jm}^\top R_i^\top Q_{jm} - Q_{jm}^\top R_j \eta_{jm}) > 0, \end{cases} \quad i = 1, 2, \quad m = 1, \dots, M_i. \tag{18}$$

Условие (18) позволяет записать представление для  $\bar{u}^i \in U$  в компактном виде:

$$\bar{u}^i = \frac{1}{2} [1 - \text{sgn}(\Psi_{jm}^\top R_i^\top Q_{jm} - Q_{jm}^\top R_j \eta_{jm})]. \tag{19}$$

Необходимые условия оптимальности для определения матриц  $Q_1$ ,  $Q_2$  получим, дифференцируя (17) по аргументам  $Q_{im}$ ,  $\Psi_{im}$ ,  $\eta_{im}$ :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial J_{2m}}{\partial Q_{im}} &= 2PQ_{im} + R_j \Psi_{im} - R_i \eta_{im} = [0]_{N \times 1}, \\
\frac{\partial J_{2m}}{\partial \eta_{im}} &= E_{im} - R_i^\top Q_{im} = [0]_{M_i \times 1}, \\
\frac{\partial J_{2m}}{\partial \Psi_{im}} &= R_j^\top Q_{im} = [0]_{M_j \times 1}, \quad i, j = 1, 2. \tag{20}
\end{aligned}$$

Здесь матрица  $P$  представляется как

$$P = \begin{bmatrix} (\varepsilon_1 - \varepsilon_1^1)(\varepsilon_1 - \varepsilon_1^1) & \dots & (\varepsilon_1 - \varepsilon_1^1)(\varepsilon_{M_1} - \varepsilon_{M_1}^1) & \varepsilon_1 \varepsilon_{M_1+1}^1 & \dots & \varepsilon_1 \varepsilon_N^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\varepsilon_{M_1} - \varepsilon_{M_1}^1)(\varepsilon_1 - \varepsilon_1^1) & \dots & (\varepsilon_{M_1} - \varepsilon_{M_1}^1)(\varepsilon_{M_1} - \varepsilon_{M_1}^1) & \varepsilon_{M_1} \varepsilon_{M_1+1}^1 & \dots & \varepsilon_{M_1} \varepsilon_N^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varepsilon_{M_1+1} \varepsilon_1^1 & \dots & \dots & \dots & \dots & \varepsilon_{M_1+1} \varepsilon_N^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varepsilon_N \varepsilon_1^1 & \dots & \dots & \dots & \dots & \varepsilon_N \varepsilon_N^1 \end{bmatrix}_{N \times N}.$$

Для сокращения записи дальнейших преобразований введем следующие обозначения:  $Z_i = P^{-1}R_i$ ;  $Z_j = P^{-1}R_j$ ;  $\Phi_{ii} = R_i^\top P^{-1}R_i$ ;  $\Phi_{jj} = R_j^\top P^{-1}R_j$ ;  $\Phi_{ij} = R_i^\top P^{-1}R_j$ ;  $\Phi_{ji} = R_j^\top P^{-1}R_i$ , тогда из первого уравнения системы (20) находим

$$Q_{im} = 2^{-1}(Z_i \eta_{im} - Z_j \psi_{im}). \quad (21)$$

Умножая левую и правую части формулы (21) слева на матрицу  $R_j^\top$  и учитывая условие инвариантности оценивания, получаем

$$\psi_{im} = \Phi_{jj}^{-1} \Phi_{ji} \eta_{im}. \quad (22)$$

Аналогично, умножая (21) слева на матрицу  $R_i^\top$  и учитывая условие несмещенности оценивания, получим

$$\eta_{im} = 2\Phi_{ii}^{-1}(E_{im} + 2^{-1}\Phi_{ij}\psi_{im}). \quad (23)$$

Разрешая уравнения (22) и (23) относительно  $\psi_{im}$ ,  $\eta_{im}$ , получим выражения для определения множителей Лагранжа в явном виде, что дает возможность произвести проверку выполнения условий (18). В случае, если эти условия не выполняются, необходимо сформировать новый вектор функций принадлежности компонент вектора  $\Delta H$  векторам  $\Delta H^i$ ,  $i = 1, 2$ .

Затем из (21), (22) и (23) для  $Q_{im}$  получим выражение в виде

$$Q_{im} = (Z_i - Z_j \Phi_{jj}^{-1} \Phi_{ji})(E_{M_i \times M_i} - \Phi_{ii}^{-1} \Phi_{ij} \Phi_{jj}^{-1} \Phi_{ji})^{-1} \Phi_{ii}^{-1} E_{im} \quad (24)$$

или выражение

$$Q_{im} = F_{jj} Z_i (R_i^\top F_{jj} Z_i)^{-1} E_{im}, \quad (25)$$

полученное преобразованием формулы (24) с использованием обозначений

$$\begin{aligned} Z_i - Z_j \Phi_{jj}^{-1} \Phi_{ji} &= F_{jj} Z_i, \\ (E_{M_i \times M_i} - \Phi_{ii}^{-1} \Phi_{ij} \Phi_{jj}^{-1} \Phi_{ji})^{-1} \Phi_{ii}^{-1} &= (R_i^\top F_{jj} Z_i)^{-1}, \\ F_{jj} &= (E_{N \times N} - Z_j \Phi_{jj}^{-1} R_j^\top). \end{aligned}$$

Для искомых оптимальных матриц  $Q_i$ , учитывая (25), имеем

$$Q_i = [F_{jj} Z_i (R_i^\top F_{jj} Z_i)^{-1}]_{M_i \times N}, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2. \quad (26)$$

Окончательные выражения для вычисления компонент вектора приращений параметров  $\Delta H^i$ ,  $i = 1, 2$ :

$$[\Delta H^i]_{M_i \times 1} = [F_{jj} Z_i (R_i^\top F_{jj} Z_i)^{-1}]_{M_i \times N} [\Delta]_{N \times 1}. \quad (27)$$

В отличие от классического подхода, в котором, при сведении задачи к системе нормальных уравнений, формируется матрица  $A = R^\top \cdot R$ , содержащая произведения исходных данных, предложенный подход позволяет идентифицировать вектор параметров, используя исходную матрицу  $R$ . Анализ полученных выражений (26), (27) показывает, что, применяя предложенный подход декомпозиции вектора параметров, при выполнении вычислений необходимо производить обращение матриц  $F_{jj}$  размера  $M_j \times M_j$ , а также матрицы  $R_i^\top F_{jj} Z_i$  размера  $M_i \times M_i$ , в отличие от сведения задачи к системе нормальных уравнений, где выполняется обращение матриц размера  $M \times M$ . При больших размерах матриц и их плохой обусловленности

предлагаемый подход является более эффективным в вычислительном плане. Кроме того, решение (27) позволяет выделить доминирующие компоненты вектора параметров процесса  $H$  при его идентификации.

**Алгоритм идентификации.** Описанный декомпозиционный подход к определению неизвестных параметров может быть представлен следующим алгоритмом.

- 1°. Задать  $H^{(0)}$  – начальное приближение вектора параметров;  $k^*$ ,  $p^*$  – заданное число итераций;  $k = 1$ ;  $p = 0$ ;  $\alpha^*$  – заданная точность;  $u^{1(0)}$  – вектор функций принадлежности, сформированный в соответствии с выбранными  $M_1$  компонентами вектора параметров  $H^{(0)}$ .
- 2°. Инициализировать переменные:  $H^{(k)} = H^{(k-1)}$ .
- 3°. Построить матрицу  $R(H^{(k)})$ , используя решение прямой задачи (1), (2).
- 4°. Сформировать матрицы  $D_1$  и  $D_2$ .
- 5°. Построить матрицы  $R_1$  и  $R_2$ , где  $[R_i] = [R]_{N \times M} \cdot [D_i]_{M \times M}$ ,  $i = 1, 2$ .
- 6°. Вычислить значения компонент векторов невязок  $\varepsilon$  и  $\varepsilon^1$ ; сформировать матрицу  $P$ .
- 7°. Вычислить значения компонент векторов  $\Psi_{im}$ ,  $\eta_{im}$  и матриц  $Q_1$ ,  $Q_2$ .
- 8°. В соответствии с условием (18) сформировать векторы функций принадлежности  $\bar{u}^{i(p)} = \{u_1^i, \dots, u_{M_i}^i\}$ ,  $i = 1, 2$ .
- 9°. Проверить выполнение условия:  $\forall u_j^{i(p)} \in \bar{u}^{i(p)}$ ,  $u_j^{i(p)} = 1$ ,  $j = 1, \dots, M_i$ , если истина, то перейти к п. 10°, иначе задать  $p = p + 1$ ; проверить выполнение условия  $p \leq p^*$ , если истина, то сформировать новые векторы функций принадлежности  $u^{i(p)}$ ,  $i = 1, 2$ , в соответствии с условием  $u_j^{1(p)} \in \begin{cases} \bar{u}^1, & \text{если } u_j^{1(p)} = 1, \\ \bar{u}^2, & \text{если } u_j^{1(p)} = 0, \end{cases}$   $1 \leftrightarrow 2$ , и перейти к п. 4°, иначе перейти к п. 12°.
- 10°. Определить компоненты векторов приращений параметров  $\Delta H^{(k)1}$ ,  $\Delta H^{(k)2}$  с использованием (27), компоненты векторов  $H^{(k)1}$  и  $H^{(k)2}$ , вычислить невязку  $\varepsilon(H^{(k)})$ .
- 11°. Проверить выполнение условия  $\varepsilon(H^{(k)}) \leq \alpha^*$ , если истина, то перейти к п. 13°, иначе задать  $k = k + 1$ ; проверить выполнение условия  $k \leq k^*$ , если истина, то перейти к п. 2°, иначе перейти к п. 12°.
- 12°. Выбрать новые  $H^{(0)}$  – начальное приближение,  $u^{i(0)}$  – вектор функций принадлежности, перейти к п. 2°.
- 13°. Конец.

**Результаты численного эксперимента.** Изложенный алгоритм был применен для решения следующих обратных задач:

– восстановление отклонений толщины тонкостенной цилиндрической прямоугольной в плане панели ( $L/R = 2.4$ ;  $R/h = 100$ ;  $L$ ,  $R$ ,  $h$  и  $\phi$  – длина, радиус, толщина и угол раствора панели;  $E = 2 \cdot 10^6$  Н/м<sup>2</sup>;  $\nu = 0.3$ ; предел текучести материала панели  $\sigma_T = 2.4 \cdot 10^3$  Н/м<sup>2</sup>), расположенных в некоторой локальной области (на рис. 1 области, где наблюдается отклонение толщины от эталонных значений, затемнены);



– идентификация локального повреждения типа пробоины (на рис. 2 действительное отверстие имеет форму треугольника) тонкостенной пластины ( $L/h = 100$ ;  $L$  и  $h$  – длина и толщина пластины;  $E = 2 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2$ ;  $\nu = 0.3$ ;  $\sigma_T = 2.4 \cdot 10^3 \text{ Н/м}^2$ ) по измеренным значениям нормальных перемещений, возникающих в результате воздействия нагружения.

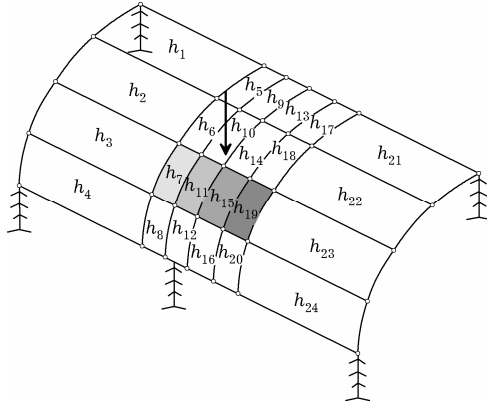


Рис. 1. Локальное отклонение толщины от эталонных значений.

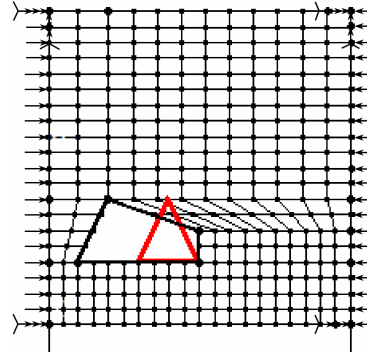


Рис. 2. Локальное повреждение.

Характер нагружения выбирали таким образом, чтобы наблюдаемое влияние искомых параметров на отклик системы было наибольшим. В первом случае – это сосредоточенная сила, приложенная в центре панели, во втором – сжатие по продольным кромкам пластины.

Для формирования вектора  $w_n^*$  использовали решения прямых задач для заданной разнотолщинности или области повреждения, которые затем идентифицировались с помощью предложенного алгоритма.

Для итерационной процедуры идентификации толщины исследуемой конструкции в качестве начального приближения выбирали значения, которые должны быть обеспечены требованиями технологического процесса (эталонные значения). В качестве эталонной рассматривалась панель толщиной  $h = 0.08 \text{ м}$ .

Для идентификации локального повреждения в качестве начального приближения выбирали область, где наблюдались наибольшие отклонения узловых значений нормальных перемещений от соответствующих значений, определенных для неповрежденной конструкции. На рис. 2 эта область имеет форму четырехугольника.

Восстановление значений толщины панели и идентификация повреждения выполнялись в итерационных процессах. При восстановлении толщины в качестве вектора параметров выбирали значения толщин в областях  $h_1, h_2, \dots, h_{24}$ , на рис. 1 эти области пронумерованы. Декомпозиция вектора параметров на первом шаге итерационного процесса может быть выполнена произвольно, здесь вектор параметров  $H$  ( $M = 24$ ) был разделен на два вектора  $H^1$  и  $H^2$  так, что  $M_1 = M_2 = 12$ . В результате выполнения шагов  $2^\circ$ – $9^\circ$  алгоритма из условия (18) формировались векторы функций принадлежности  $u^i = \{u_j^i\}$ ,  $i = 1, 2$ ,  $u_j^i \in \{0, 1\}$ . В соответствии условием п.  $9^\circ$  алгоритма результирующий вектор функций принадлежности определяет вариант декомпозиции вектора параметров. В табл. 1 представлен результат выполнения итерационной процедуры декомпозиции.

Далее с учетом выполненной декомпозиции проводилась идентификация векторов параметров  $H^1$  и  $H^2$ . Критерием окончания итерационного процесса является выполнение условия:  $\varepsilon(H) \leq \alpha^*$ , где  $\alpha^* = 10^{-7}$ . Результаты идентификации векторов параметров  $H^1$  и  $H^2$  представлены в табл. 1'.

Для случая идентификации локального повреждения в качестве вектора параметров выбирались возможные перемещения границ области начального приближения (рис. 3). Результаты выполнения процедуры декомпозиции и идентификации вектора параметров представлены в табл. 2.

Для случая идентификации локального повреждения в качестве вектора параметров выбирались координаты границ области начального приближения (рис. 3).

Граница области повреждения аппроксимировалась ломанной линией с координатами узловых точек  $X_s$ . Результаты выполнения процедуры декомпозиции и идентификации вектора параметров представлены в табл. 2'.

Результат идентификации локального повреждения представлен на рис. 4, пунктирная линия иллюстрирует результат приближения формы и месторасположения дефекта к действительному повреждению.

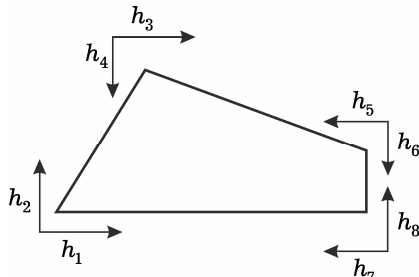


Рис. 3. Компоненты вектора параметров для процедуры декомпозиции.

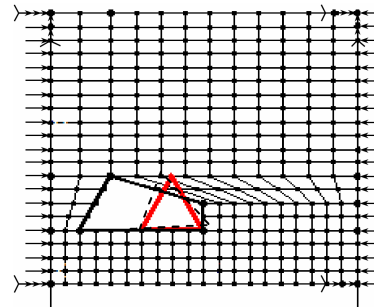


Рис. 4. Результат идентификации области повреждения.

Таблица 1. Результат выполнения процедуры декомпозиции для идентификации значений толщины панели

Результат 1-й итерации				Результат 3-й итерации			
$H^1$	$u^1$	$H^2$	$u^2$	$H^1$	$u^1$	$H^2$	$u^2$
$h_1$	1	$h_{13}$	1	$h_1$	1	$h_2$	1
$h_2$	0	$h_{14}$	0	$h_4$	1	$h_3$	1
$h_3$	0	$h_{15}$	0	$h_7$	1	$h_5$	1
$h_4$	1	$h_{16}$	1	$h_8$	1	$h_6$	1
$h_5$	0	$h_{17}$	0	$h_{10}$	1	$h_9$	0
$h_6$	0	$h_{18}$	0	$h_{11}$	1	$h_{13}$	1
$h_7$	1	$h_{19}$	1	$h_{12}$	1	$h_{17}$	1
$h_8$	1	$h_{20}$	0	$h_{14}$	1	$h_{18}$	1
$h_9$	0	$h_{21}$	1	$h_{15}$	1	$h_{20}$	1
$h_{10}$	1	$h_{22}$	0	$h_{16}$	1	$h_{22}$	1
$h_{11}$	1	$h_{23}$	0	$h_{19}$	1	$h_{23}$	1
$h_{12}$	1	$h_{24}$	1	$h_{21}$	1		
				$h_{24}$	1		

Таблица 1'. Результат процедуры идентификации вектора параметров для выполненной декомпозиции

Результат декомпозиции и последующей идентификации для вектора $H^1$				Результат декомпозиции и последующей идентификации для вектора $H^2$			
$H^1$	$u^1$	действительный $H^1$	восстановленный $H^1$	$H^2$	$u^2$	действительный $H^2$	восстановленный $H^2$
$h_1$	1	0.080	0.078945	$h_2$	1	0.08	0.079142
$h_4$	1	0.080	0.080052	$h_3$	1	0.08	0.080104
$h_7$	1	0.075	0.074728	$h_5$	1	0.08	0.080073
$h_8$	1	0.080	0.080210	$h_6$	1	0.08	0.079474
$h_9$	1	0.080	0.080069	$h_{13}$	1	0.08	0.080012
$h_{10}$	1	0.080	0.079787	$h_{17}$	1	0.08	0.079795
$h_{11}$	1	0.070	0.069839	$h_{18}$	1	0.08	0.080342
$h_{12}$	1	0.080	0.079841	$h_{20}$	1	0.08	0.079153
$h_{14}$	1	0.080	0.080078	$h_{22}$	1	0.08	0.080164
$h_{15}$	1	0.065	0.066103	$h_{23}$	1	0.08	0.080076
$h_{16}$	1	0.080	0.080004				
$h_{19}$	1	0.060	0.058796				
$h_{21}$	1	0.080	0.079587				
$h_{24}$	1	0.080	0.080014				

Таблица 2. Результат выполнения процедуры декомпозиции для идентификации локального повреждения

Результат 1-й итерации				Результат 3-й итерации			
$\Delta H^1$	$u^1$	$\Delta H^2$	$u^2$	$\Delta H^1$	$u^1$	$\Delta H^2$	$u^2$
$h_1$	1	$h_5$	0	$h_1$	1	$h_7$	1
$h_2$	0	$h_6$	0	$h_2$	0	$h_8$	0
$h_3$	1	$h_7$	0	$h_3$	1		
$h_4$	1	$h_8$	1	$h_4$	1		
				$h_5$	1		
				$h_6$	1		

Таблица 2'. Результат процедуры идентификации вектора параметров для выполненной декомпозиции

Результат декомпозиции и последующей идентификации для вектора $\Delta H^1$			Результат декомпозиции и последующей идентификации для вектора $\Delta H^2$		
$\Delta H^1$	$u^1$	восстановленный $\Delta H^1$	$\Delta H^2$	$u^2$	восстановленный $\Delta H^2$
$h_1$	1	9.8997	$h_2$	1	0.0532
$h_3$	1	10.0371	$h_8$	1	0.03178
$h_4$	1	0.1638			
$h_5$	1	0.2397			
$h_6$	1	4.7956			
$h_7$	1	0.2138			

Полученные результаты показывают, что погрешность приближения к действительным значениям вектора параметров составляет не более 1–2%, что является допустимым.

**Выводы.** Предложенный подход позволяет идентифицировать вектор параметров тонкостенной конструкции с заданной точностью. Разложение вектора параметров приводит к параллельным задачам параметрической идентификации существенно меньшей размерности. В результате декомпозиции происходит регуляризация задачи, улучшается обусловленность матриц, подлежащих обращению.

1. Бульчева Е. Ю., Бульчев Ю. Г., Бурлай И. В. Декомпозиционный подход к решению плохо обусловленных задач параметрической идентификации // Изв. РАН. Теория и системы управления. – 2004. – № 5. – С. 28–31.
2. Ватульян А. О. Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела. – Москва: Физматлит, 2007. – 222 с.
3. Ворович И. И. Математические проблемы нелинейной теории пологих оболочек. – Москва: Наука, 1989. – 373 с.
4. Льюнг Л. Идентификация систем. Теория для пользователя. – Москва: Наука, 1991. – 431 с.
5. Скопецкий В. В., Стоян В. А., Зваридчук В. Б. Идентификационно-псевдоинверсный подход к решению прямых и обратных задач динамики систем с распределенными параметрами // Кибернетика и системный анализ. – 2004. – № 4. – С. 32–51.
6. Bogner F. K., Fox R. L., Schmit L. A. Finite deflection structural analysis using plate and shell discrete elements // AIAA Journal. – 1968. – 6, No. 5. – P. 781–791.
7. Ciarletta M., Iovane G., Sumbatyan M. A. Inverse problem on crack reconstruction in the elastic half-space: anti-plane case // Inverse Problems in Science and Engineering. – 2006. – 14, No. 7. – P. 725–745.
8. Gokhale N. H., Barbone P. E., Oberai A. A. Solution of the nonlinear elasticity imaging inverse problem: the compressible case // Inverse Problems. – 2008. – 24, No. 4. – doi: 10.1088/0266-5611/24/4/045010.
9. Klann E., Ramlau R. Regularization by fractional filter methods and data smoothing // Inverse Problems. – 2008. – 24, No. 2. – doi: 10.1088/0266-5611/24/2/025018.

#### ІДЕНТИФІКАЦІЯ ОБЕРНЕНИХ ЗАДАЧ ДЕФОРМУВАННЯ ТОНКОСТІННИХ ОБОЛОНОК МЕТОДОМ ДЕКОМПОЗИЦІЇ

*Розроблено декомпозиційний підхід до розв'язання оберненої задачі деформування тонкостінної системи. Розкладання вектора параметрів приводить до необхідності розв'язання паралельних задач параметричної ідентифікації істотно меншої розмірності. У результаті декомпозиції відбувається регуляризація задачі, поліпшується обумовленість матриць, що підлягають оберненню.*

#### IDENTIFICATION OF INVERSE PROBLEMS OF THIN-WALLED SHELLS DEFORMATION BY DECOMPOSITION METHOD

*A decomposition approach to solve the inverse problem of a thin-walled system deformation has been developed. The parameter vector decomposition causes the necessity of solution the parallel problems of essentially less dimensionality. The decomposition will bring the problem regularization, the matrices conditionality improving which are to be inverted.*

Днепропетр. нац. ун-т  
им. О. Гончара, Днепропетровск

Получено  
25.05.09