

ДИНАМІЧНИЙ КОНТАКТ СФЕРИЧНОГО ВКЛЮЧЕННЯ З МАТРИЦЕЮ ЗА ПАДІННЯ ПРУЖНОЇ ХВИЛІ

Методом граничних елементів досліджено динамічні переміщення і напруження у безмежній пружній матриці зі сферичним пружним включенням, викликані поширенням пружної хвилі. Вихідну задачу зведено до системи граничних інтегральних рівнянь відносно контактних переміщень і зусиль на поверхні з'єднання включення з матрицею. Шляхом числового розв'язання рівнянь проаналізовано вплив напрямку поширення і частоти хвиль на актуальні фізичні параметри, які залежать від пружних характеристик складових композита.

Вступ. Вивчення напружено-деформованого стану в композитних матеріалах з різного роду включеннями за динамічних збурень є необхідним для виявлення їх експлуатаційних можливостей і вдосконалення технології їх неруйнівного контролю. Властивості відповідних композитів визначаються пружними характеристиками всіх складових, формою, розташуванням і розподілом зміцнюючих частинок. Відомі розв'язки двовимірних задач дифракції пружних хвиль на циліндричних [8], кубічних, призматичних [10] і ромбоподібних [9] включеннях. З використанням методу Gaunaurd – Überall у праці [5] отримано аналітичний розв'язок задачі розсіяння низькочастотних плоских пружних хвиль сферичним включенням, де введено поняття «ефективної сфери». У [1–4, 6] розглянуто основні особливості використання методів граничних інтегральних рівнянь (МГІР) і граничних елементів (МГЕ) щодо тривимірних задач із наявними сферичними, дисковими, кубічними концентраторами напружень, зокрема, в роботах [4, 6] проведено аналіз хвильових полів у матеріалах, які містять включення і тріщини одночасно. Однак задачі формулюються у спрощеному варіанті – розглядаються композити з однаковими густинами та коефіцієнтами Пуассона складових матеріалів, а аналіз ефектів розсіяння хвиль включеннями проводиться лише за фіксованих значень хвильових чисел [7].

У цій роботі числовий МГЕ застосовано до тривимірних задач дифракції пружних хвиль на сферичному включенні, розташованому в безмежній матриці. Реалізація методу передбачає інтегральні подання динамічних переміщень і напружень у композиті через контактні фізичні параметри на поверхні з'єднання включення з матрицею і виведення ГІР відносно контактних величин. Числові розрахунки проведено для актуальних в інженерній практиці комбінацій матеріалів і неперервного діапазону зміни частоти коливань.

1. Гранично-інтегральне формулювання задачі. Розглянемо тривимірне пружне неоднорідне тіло, яке складається з безмежної матриці та сферичного включення радіуса a , що має поверхню S із зовнішньою нормаллю $\mathbf{n}(n_1, n_2, n_3)$ (рис. 1).

Матриця і включення характеризуються густинами ρ^M , ρ^I , модулями зсуву G^M , G^I і коефіцієнтами Пуассона ν^M , ν^I відповідно. Тут і надалі індексом « M » позначено величини, що відносяться до матриці, а індексом « I » – до включення.

У тілі поширюється гармонічна за часом t пружна хвиля переміщень

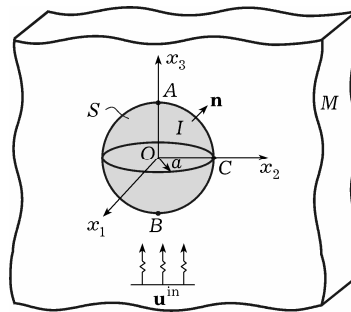


Рис. 1

$$\mathbf{u}^{\text{in}}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}^{\text{in}}(\mathbf{x}) \exp(-i\omega t) \quad (1)$$

з циклічною частотою ω і відомим розподілом у просторі $\mathbf{x}(x_1, x_2, x_3)$ амплітуди $\mathbf{u}^{\text{in}}(\mathbf{x})$. Для простоти подальших викладок спільний експоненціальний часовий множник $\exp(-i\omega t)$ вилучимо з розв'язку ($i = \sqrt{-1}$).

Між складовими частинами композита реалізується ідеальний механічний контакт, тобто забезпечується неперервність переміщень $\mathbf{u}(u_1, u_2, u_3)$ і зусиль $\mathbf{t}(t_1, t_2, t_3)$ за перетину міжфазної поверхні S :

$$\mathbf{u}^M(\mathbf{x}) = \mathbf{u}^I(\mathbf{x}) = \mathbf{u}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{t}^M(\mathbf{x}) = \mathbf{t}^I(\mathbf{x}) = \mathbf{t}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in S. \quad (2)$$

На основі принципу суперпозиції і формули Сомільяно поле переміщень $\mathbf{u}^M(u_1^M, u_2^M, u_3^M)$ у матриці записується у вигляді

$$u_i^M(\mathbf{x}) = u_i^{\text{in}}(\mathbf{x}) + \iint_S [T_{ij}^M(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{n}) u_j^M(\mathbf{y}) - U_{ij}^M(\mathbf{x}, \mathbf{y}) t_j^M(\mathbf{y})] dS_{\mathbf{y}}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (3)$$

У співвідношенні (3) і надалі використовуємо підсумовування Айнштайна за індексами, що повторюються; $u_j^M(\mathbf{y})$, $t_j^M(\mathbf{y})$, $\mathbf{y} \in S$, – граничні (контактні) значення компонент переміщень і зусиль на поверхні S зі сторони матриці; динамічні ядра U_{ij}^M з порядком особливості $|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{-1}$ і ядра T_{ij}^M з порядком особливості $|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{-2}$ записуються таким чином:

$$\begin{aligned} U_{ij}^M(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{1}{4\pi G^M k_{2M}^2} \left[f_1(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) \delta_{ij} - f_2(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) \frac{(x_i - y_i)(x_j - y_j)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2} \right], \\ T_{ij}^M(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{n}) &= \frac{1}{4\pi k_{2M}^2} \left\langle \left[g_2(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) + g_1(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) \right] \delta_{ij} + 2[g_3(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) - \right. \\ &\quad \left. - 2g_2(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) \frac{(x_i - y_i)(x_j - y_j)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2} \right] \frac{x_m - y_m}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} n_m(\mathbf{y}) + \\ &\quad + \frac{2}{1 - 2\nu^M} \left\{ \nu^M [g_1(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) - g_3(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|)] + \right. \\ &\quad \left. + g_2(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) \right\} \frac{x_i - y_i}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} n_j(\mathbf{y}) + [g_2(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) + \\ &\quad \left. + g_1(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) \right] \frac{x_j - y_j}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} n_i(\mathbf{y}) \right\rangle, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (4) \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} f_1(r) &= [(1 - ik_{1M}r) \exp(ik_{1M}r) - (1 - ik_{2M}r - k_{2M}^2 r^2) \exp(ik_{2M}r)] r^{-3}, \\ f_2(r) &= [(3 - 3ik_{1M}r - k_{1M}^2 r^2) \exp(ik_{1M}r) - \\ &\quad - (3 - 3ik_{2M}r - k_{2M}^2 r^2) \exp(ik_{2M}r)] r^{-3}, \\ g_1(r) &= [(3 - 3ik_{1M}r - k_{1M}^2 r^2) \exp(ik_{1M}r) - \\ &\quad - (3 - 3ik_{2M}r - 2k_{2M}^2 r^2 + ik_{2M}^3 r^3) \exp(ik_{2M}r)] r^{-4}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_2(r) &= [(3 - 3ik_{1M}r - k_{1M}^2r^2)\exp(ik_{1M}r) - \\
&\quad - (3 - 3ik_{2M}r - k_{2M}^2r^2)\exp(ik_{2M}r)]r^{-4}, \\
g_3(r) &= [(9 - 9ik_{1M}r - 4k_{1M}^2r^2 + ik_{1M}^3r^3)\exp(ik_{1M}r) - \\
&\quad - (9 - 9ik_{2M}r - 4k_{2M}^2r^2 + ik_{2M}^3r^3)\exp(ik_{2M}r)]r^{-4}, \quad (5)
\end{aligned}$$

$k_{jM} = \omega/c_j^M$, $j = 1, 2$, – хвильові числа для матеріалу матриці; $c_2^M = \sqrt{G^M/\rho^M}$, $c_1^M = c_2^M \sqrt{2(1-\nu^M)/(1-2\nu^M)}$ – відповідно швидкості поширення поперечної і поздовжньої хвиль у матриці; δ_{ij} – символ Кронекера.

Інтегральні подання переміщень у включенні мають такий вигляд:

$$u_i^I(\mathbf{x}) = \iint_S [U_{ij}^I(\mathbf{x}, \mathbf{y})t_j^I(\mathbf{y}) - T_{ij}^I(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{n})u_j^I(\mathbf{y})]dS_{\mathbf{y}}. \quad (6)$$

Динамічні ядра U_{ij}^I з порядком особливості $|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{-1}$ і T_{ij}^I з порядком особливості $|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{-2}$ отримуються з формул (4), (5) заміною характеристик матеріалів ρ^M , G^M , ν^M на ρ^I , G^I , ν^I відповідно.

Згідно з законом Гука з інтегральних подань переміщень (3), (6) можна дістати відповідні компоненти тензора напружень у матриці і включенні. Тоді на одиницю зростає порядок особливості в ядрах відповідних інтегральних зображень.

Задовольняючи інтегральними поданнями (3), (6) контактні умови (2), отримаємо систему шести ГІР відносно компонент переміщень і зусиль на поверхні включення:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}u_i(\mathbf{x}) - \iint_S T_{ij}^M(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{n})u_j(\mathbf{y})dS_{\mathbf{y}} - \iint_S U_{ij}^M(\mathbf{x}, \mathbf{y})t_j(\mathbf{y})dS_{\mathbf{y}} &= u_i^{\text{in}}(\mathbf{x}), \\
\frac{1}{2}u_i(\mathbf{x}) + \iint_S T_{ij}^I(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{n})u_j(\mathbf{y})dS_{\mathbf{y}} - \iint_S U_{ij}^I(\mathbf{x}, \mathbf{y})t_j(\mathbf{y})dS_{\mathbf{y}} &= 0, \\
i = 1, 2, 3, \quad \mathbf{x} \in S. \quad (7)
\end{aligned}$$

Регуляризуємо рівняння (7) за методикою [6] і запишемо їх у слабосингулярній формі:

$$\begin{aligned}
u_i(\mathbf{x}) - \iint_S \tilde{T}_{ij}^M(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{n})[u_j(\mathbf{y}) - u_j(\mathbf{x})]dS_{\mathbf{y}} + \iint_S \tilde{U}_{ij}^M(\mathbf{x}, \mathbf{y})t_j(\mathbf{y})dS_{\mathbf{y}} - \\
- \iint_S [T_{ij}^M(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{n}) - \tilde{T}_{ij}^M(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{n})]u_j(\mathbf{y})dS_{\mathbf{y}} + \\
+ \iint_S [U_{ij}^M(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \tilde{U}_{ij}^M(\mathbf{x}, \mathbf{y})]t_j(\mathbf{y})dS_{\mathbf{y}} &= u_i^{\text{in}}(\mathbf{x}), \\
\iint_S \tilde{T}_{ij}^I(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{n})[u_j(\mathbf{y}) - u_j(\mathbf{x})]dS_{\mathbf{y}} - \iint_S \tilde{U}_{ij}^I(\mathbf{x}, \mathbf{y})t_j(\mathbf{y})dS_{\mathbf{y}} + \\
+ \iint_S [T_{ij}^I(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{n}) - \tilde{T}_{ij}^I(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{n})]u_j(\mathbf{y})dS_{\mathbf{y}} - \\
- \iint_S [U_{ij}^I(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \tilde{U}_{ij}^I(\mathbf{x}, \mathbf{y})]t_j(\mathbf{y})dS_{\mathbf{y}} &= 0, \quad \mathbf{x} \in S, \quad (8)
\end{aligned}$$

де \tilde{U}_{ij}^D , \tilde{T}_{ij}^D , $D = M, I$, – статичні ядра, наведені в роботі [2]:

$$\tilde{U}_{ij}^D(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{16\pi G^D(1-v^D)|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \left[(3-4v^D)\delta_{ij} + \frac{(x_i-y_i)(x_j-y_j)}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2} \right],$$

$$\tilde{T}_{ij}^D(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{n}) = \frac{1}{8\pi(1-v^D)|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2} \left\{ \left[(1-2v^D)\delta_{ij} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + 3 \frac{(x_i-y_i)(x_j-y_j)}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2} \right] \frac{x_m-y_m}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} n_m(\mathbf{y}) - \right.$$

$$\left. - (1-2v^D) \left[\frac{x_i-y_i}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} n_j(\mathbf{y}) - \frac{x_j-y_j}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} n_i(\mathbf{y}) \right] \right\}.$$

Таким чином, система інтегральних рівнянь (8) внаслідок пониження порядку сингулярності підінтегральних виразів, що містять ядра \tilde{T}_{ij}^D , придатна до подальшої дискретизації МГЕ. Слід відзначити, що різниці між фундаментальними ядрами динамічних і статичних задач у (8) є регулярними.

2. Числові результати та висновки. Під час обчислень поверхню включення рівномірно розбивали на 16 квадратичних елементів уздовж сферичних координат φ та θ . На кожному елементі використовували квадратичну апроксимацію до контактних переміщень і лінійну апроксимацію до контактних зусиль. За критерій точності обчислень приймали максимальне розходження результатів у рамках 1% за згущення сітки елементів. Програмування здійснювали на базі алгоритмічного середовища FORTRAN. Програмний комплекс включав підпрограми для обчислення регулярних і сингулярних інтегралів по квадратній і трикутній областях (у полюсах включення), підпрограми для обчислення комплексних коефіцієнтів матриці системи лінійних алгебраїчних рівнянь, а також підпрограми для розв'язання цієї системи методом Гауса.

Розрахунки здійснювали для двох видів композитів із включенням, жорсткішим від матриці (див. табл. 1).

Таблиця 1

Пружні сталі	Композит I		Композит II	
	Алюмінієва матриця	Графітове включення	Епоксидна матриця	Скляне включення
ρ , кг/м ³	2706	3781	1250	2550
G , ГПа	26.7	188.1	1.28	29.9
ν	0.34	0.17	0.35	0.25

Розглядали вплив пружної плоскої поздовжньої хвилі, що поширюється уздовж осі Ox_3 та обумовлює основне поле переміщень

$$u_3^{\text{in}}(\mathbf{x}) = U_0 \exp(ik_{1M}x_3), \quad u_1^{\text{in}} = u_2^{\text{in}} = 0, \quad (9)$$

де U_0 – постійна задана амплітуда хвилі.

Залежності віднесених до U_0 амплітуд контактних радіальних переміщень $|u_r|$ і віднесених до $2G^M U_0(1-v^M)/(1-2v^M)a$ амплітуд радіальних напружень $|\sigma_{rr}|$ на поверхні сферичного включення від нормалізованого хвильового числа $\chi = k_{2M}a$ зображено на рис. 2, рис. 3 (для композита I) і на рис. 4, рис. 5 (для композита II).

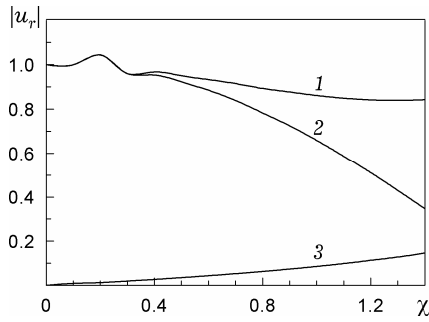


Рис. 2

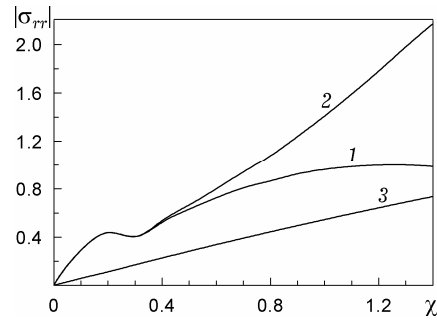


Рис. 3

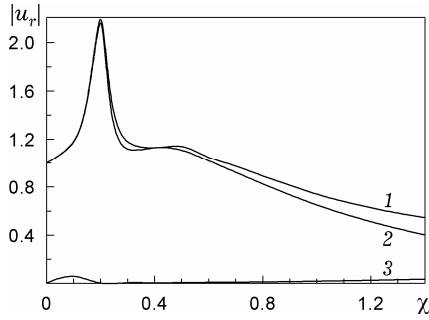


Рис. 4

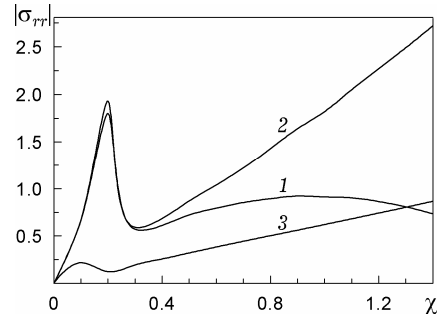


Рис. 5

Криві 1–3 описують хвильову картину в трьох різних точках поверхні включення, які відповідають двом полюсам A і B та «екваторіальній» точці C відповідно (див. рис. 1). Криві отримано шляхом частотного аналізу з інтервалом $\Delta\chi = 0.1$.

Початковими значеннями, коли $\Delta\chi = 0$, є одиничні для амплітуд радіальних переміщень у полюсах A і B включення та нульові для амплітуд радіальних переміщень у точці C , а також для амплітуд радіальних напружень у всіх точках, що відповідає тривіальному статичному розв'язку задачі. У низькочастотному діапазоні, з ростом хвильового числа χ , амплітуди розрахункових величин у точках A і B досягають локальних максимумів. Ця резонансна поведінка є більш виразною для композита II з більшим контрастом жорсткостей між включенням і матрицею (див. табл. 1), що викликано податливістю матричного матеріалу відносно матеріалу включення. У низькочастотній області відхилення амплітуд переміщень і напружень у точці B набігу хвилі на включення та точці A сходу хвилі із включення є незначним. Роздвоєння кривих, що відповідають цим точкам, спостерігається в області великих хвильових чисел. Зокрема, тоді амплітуда радіальних переміщень у точці B менша, ніж у точці A . Обернений ефект стосується амплітуд радіальних напружень.

Амплітуди радіальних переміщень і напружень в «екваторіальній» точці C менші, ніж відповідні значення у полюсах A і B включення, за винятком області $\chi > 1.3$ для композита II , коли амплітуда радіальних напружень у точці C більша, ніж у точці A . Залежності в «екваторіальній» точці мають монотонніший характер у порівнянні з точками A та B .

Проведені дослідження є першим етапом на шляху макроопису хвильової картини в композиті з розподіленими множинними включеннями, який ґрунтується на розв'язках задач для поодинокого розсіювача.

Робота виконана за сприяння гранту Президента України для підтримки наукових досліджень молодих учених (реєстраційний номер № GP/F27/0134).

1. Кит Г. С., Михаськів В. В., Хай О. М. Анализ установившихся колебаний плоского абсолютно жесткого включения в трехмерном упругом теле методом граничных элементов // Прикл. математика и механика. – 2002. – **66**, № 5. – С. 855–863.
2. Михаськів В. В., Стасюк Б. М. О численном решении трехмерных статических задач теории упругости для тела с включением неканонической формы // Прикл. механика. – 2007. – **43**, № 4. – С. 27–35.
Te same: Mykhas'kiv V. V., Stasyuk B. M. Numerical solution of three-dimensional static problems of elasticity for a body with a noncanonical inclusion // Int. Appl. Mech. – 2007. – **43**, No. 4. – P. 380–387.
3. Подільчук Ю. Н., Рубцов Ю. К. О развитии метода граничных элементов в статических и нестационарных пространственных задачах теории упругости // Прикл. механика. – 2004. – **40**, № 2. – С. 57–66.
Te same: Podil'chuk Yu. N., Rubtsov Yu. K. Development of the boundary-element method for three-dimensional problems of static and nonstationary elasticity // Int. Appl. Mech. – 2004. – **40**, No. 2. – P. 160–168.
4. Hirose S. Boundary integral equation method for transient analysis of 3-D cavities and inclusions // Engng Anal. with Boundary Elements. – 1991. – **8**. – P. 146–154.
5. Kerr F. H. The scattering of a plane elastic wave by spherical elastic inclusions // Int. J. Engng Sci. – 1992. – **30**. – P. 169–186.
6. Khay O., Mykhas'kiv V., Sladek J., Sladek V., Zhang Ch. Interaction of penny-shaped crack and spherical inclusion in 3D particulate elastic composite: BIEM calculation of mode-I dynamic stress intensity factor // Comput. Methods in Materials Sci. – 2009. – **9**. – P. 30–36.
7. Kitahara M., Nakagawa K., Achenbach J. D. Boundary-integral equation method for elastodynamic scattering by a compact inhomogeneity // Comput. Mech. – 1989. – **5**. – P. 129–144.
8. Lee J., Lee H., Mal A. A mixed volume and boundary integral technique for elastic wave field calculations in heterogeneous materials // Wave Motion. – 2004. – **39**. – P. 1–19.
9. Shindo Y., Nakamura T., Narita F. The application of the boundary element method to the problem of wave diffraction from a diamond shaped inclusion // The Open Mech. Journal. – 2008. – **2**. – P. 62–66.
10. Wang J., Michelitsch T. M., Gao H., Levin V. M. On the solution of the dynamic Eshelby problem for inclusions of various shapes // Int. J. Solids and Structures. – 2005. – **42**. – P. 353–363.

ДИНАМИЧЕСКИЙ КОНТАКТ СФЕРИЧЕСКОГО ВКЛЮЧЕНИЯ С МАТРИЦЕЙ ПРИ ПАДЕНИИ УПРУГОЙ ВОЛНЫ

Методом граничных элементов исследованы динамические перемещения и напряжения в бесконечной упругой матрице со сферическим упругим включением, которые вызваны распространением упругой волны. Исходная задача сведена к системе граничных интегральных уравнений относительно контактных перемещений и усилий на соединительной поверхности включения и матрицы. С помощью численного решения уравнений рассмотрено влияние направления распространения и частоты волн на актуальные физические параметры, зависящие от упругих характеристик составных частей композита.

DYNAMIC CONTACT OF A SPHERICAL INCLUSION WITH MATRIX AT INCIDENCE OF ELASTIC WAVE

By the boundary element method, the dynamic displacements and stresses in an infinite elastic matrix with spherical elastic inclusion, caused by elastic wave propagation, are investigated. The initial problem is reduced to a system of boundary integral equations relative to the contact displacements and stresses on the interface of inclusion and matrix. By numerical solution of equations the influence of direction of propagation and frequency of waves on the actual physical parameters depending on elastic characteristics of composite constituents is analyzed.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
28.10.09