УДК 517.938

С. А. Щоголев

ПРО ДЕЯКІ РЕЗОНАНСНІ ВИПАДКИ В КВАЗІЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ СИСТЕМАХ ІЗ ПОВІЛЬНО ЗМІННИМИ ПАРАМЕТРАМИ

Для квазілінійної диференціальної системи 2-го порядку, коефіцієнти якої мають вигляд рядів Фур'є з повільно змінними коефіцієнтами і частотою, знайдено ознаки існування часткового розв'язку аналогічної структури у випадку чисто уявних власних значень матриці лінійної частини, які задовольняють деяке резонансне співвідношення.

Вступ. Стаття присвячена дослідженню нелінійних коливань у диференціальних системах, які містять повільно змінні параметри [4–6, 9, 12–14], і продовжує дослідження робіт [1, 2, 11]. Основним об'єктом цих досліджень є квазілінійні диференціальні системи, коефіцієнти яких зображуються у вигляді абсолютно та рівномірно збіжних рядів Фур'є з повільно змінними коефіцієнтами та частотами, і метою досліджень є встановлення для таких систем ознак існування часткових розв'язків аналогічної структури. У такій постановці задача суттєво відрізняється від відомої задачі дослідження періодичних і квазіперіодичних розв'язків та інтегральних многовидів [5, 6].

Пропонована стаття містить повне обґрунтування і узагальнення результатів, сформульованих у [10].

Означення і постановка задачі.

Означення 1. Будемо говорити, що функція $f(t,\varepsilon)$ належить до класу S_m, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, якщо виконуються такі умови:

1) $f : G \to \mathbb{C}$, де $G = \{t, \varepsilon : t \in \mathbb{R},\ \varepsilon \in [0, \varepsilon_0],\ \varepsilon_0 \in \mathbb{R}^+\}$;

2) $f \in C^m(\mathbb{R})$ за t;

3) $\dfrac{d^k f}{dt^k} = \varepsilon^k f_k^*(t,\varepsilon), \qquad \sup\limits_G |f_k^*| < +\infty, \qquad 0 \le k \le m$.

Означення 2. Будемо говорити, що функція $f(t,\varepsilon,\theta(t,\varepsilon))$ належить до класу B_m, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, якщо ця функція зображується у вигляді

$$f(t,\varepsilon,\theta(t,\varepsilon)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(t,\varepsilon) \exp(in\,\theta(t,\varepsilon)),$$

причому

1) $f_n \in S_m, \qquad \dfrac{d^k f_n}{dt^k} = \varepsilon^k f_{nk}^*(t,\varepsilon), \qquad n \in \mathbb{Z}, \qquad 0 \le k \le m$;

2) $\| f \|_{B_m} \stackrel{\text{def}}{=} \sum\limits_{k=0}^{m} \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \sup\limits_G |f_{nk}| < +\infty$;

3) $\theta(t,\varepsilon) = \int\limits_0^t \varphi(\tau,\varepsilon)\,d\tau, \qquad \varphi : G \to \mathbb{R}^+, \qquad \varphi \in S_m, \qquad \inf\limits_G \varphi > 0$.

Позначимо $\forall f \in B_m$:

$$\Gamma_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(t,\varepsilon,\theta) \exp(-in\theta)\,d\theta, \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Нехай задано вектор $x(t,\varepsilon,\theta) = \operatorname{colon}(x_1(t,\varepsilon,\theta), \ldots, x_n(t,\varepsilon,\theta))$ і матрицю $P(t,\varepsilon,\theta) = (p_{jk}(t,\varepsilon,\theta))_{j,k=1,\ldots,n}$, елементи яких належать до класу B_m. Під

ISSN 0130–9420. Мат. методи та фіз.-мех. поля. 2010. – 53, № 3. – С. 85-92.

символом $(P)_{jk}$ будемо розуміти елемент p_{jk} матриці P. Векторну норму $\|x\|^*_{B_m}$ і матричну норму $\|P\|^*_{B_m}$ означимо як

$$\|x\|^*_{B_m} = \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|_{B_m}, \qquad \|P\|^*_{B_m} = \max_{1\le j\le n} \sum_{k=1}^{n} \left\|(P)_{jk}\right\|_{B_m}.$$

Розглянемо таку квазілінійну систему диференціальних рівнянь:

$$\frac{dx}{dt} = A(t,\varepsilon)x + f(t,\varepsilon,\theta(t,\varepsilon)) + \mu X(t,\varepsilon,\theta(t,\varepsilon),x), \tag{1}$$

де $x = \mathrm{colon}(x_1, x_2) \in D \subset \mathbb{C}$, $f = \mathrm{colon}(f_1, f_2)$, $f_j \in B_m$; $A(t,\varepsilon) = (a_{jk}(t,\varepsilon))_{j,k=1,2}$, $a_{jk} \in S_m$, причому власні значення матриці $A(t,\varepsilon)$ мають вигляд $\pm ir\varphi(t,\varepsilon)$, $r \in \mathbb{N}$; $X = \mathrm{colon}(X_1, X_2)$, де функції X_1, X_2 належать до класу B_m відносно t, ε, θ і мають в D неперервні частинні похідні до деякого порядку $2q+2$ включно; $\mu \in \mathbb{R}^+$.

Метою статті є встановлення умов, при яких система (1) має розв'язки у класах B_k, $0 \le k \le m$. Очевидно, що тут маємо справу з резонансним випадком, оскільки власні значення матриці $A(t,\varepsilon)$ чисто уявні, і власні частоти коливань системи є кратними частоті φ зовнішньої сили $f(t,\varepsilon,\theta)$. Випадок, коли дійсні частини власних значень матриці $A(t,\varepsilon)$ відокремлені від нуля в G, розглянуто у роботі [2], а випадок чисто уявних власних значень при умові відсутності резонансу − у роботі [1].

Допоміжні твердження.

Лема 1. *Нехай задано лінійну однорідну систему диференціальних рівнянь*

$$\frac{dx}{dt} = \left(i\varphi(t,\varepsilon)\Lambda + \sum_{s=1}^{q} \mu^s P_s(t,\varepsilon,\theta(t,\varepsilon)) \right) x, \tag{2}$$

$x = \mathrm{colon}(x_1, \dots, x_n)$; Λ − *дійсна діагональна стала матриця розмірності* n; *елементи квадратних матриць* P_s, $s = 1,\dots,q$, *належать до класу* B_m; $\mu \in \mathbb{R}^+$.

Тоді для достатньо малих значень μ *існує невироджене перетворення*

$$x = \Phi(t,\varepsilon,\theta,\mu)y, \tag{3}$$

де елементи матриці Φ *належать до класу* B_m, *яке зводить систему* (2) *до вигляду*

$$\frac{dy}{dt} = \left(\sum_{s=1}^{q} \mu^s U_s(t,\varepsilon) + \varepsilon \sum_{s=1}^{q} \mu^s V_s(t,\varepsilon,\theta) + \mu^{q+1} W(t,\varepsilon,\theta,\mu) \right) y. \tag{4}$$

Тут U_s, $s = 1,\dots,q$, − *квадратні матриці з елементами з класу* S_m, *а* V_s, $s = 1,\dots,q$, *і* W − *квадратні матриці з елементами з класу* B_{m-1}.

Д о в е д е н н я. Перетворенням

$$x = \exp(i\Lambda\theta)z \tag{5}$$

(коефіцієнти цього перетворення, очевидно, належать до класу B_m) зведемо систему (2) до вигляду

$$\frac{dz}{dt} = \left(\sum_{s=1}^{q} \mu^s R_s(t,\varepsilon,\theta) \right) z, \tag{6}$$

де $R_s = \exp(-i\Lambda\theta)P_s \exp(i\Lambda\theta)$ – матриці з елементами з B_m. Для того щоб перетворена система (6) набула вигляду (4), застосуємо до неї перетворення

$$z = \left(E + \sum_{s=1}^{q} \mu^s \Phi_s(t, \varepsilon, \theta)\right) y .$$

Відповідно до цього матриці Φ_s, U_s, V_s, $s = 1, \ldots, q$, визначимо таким чином:

$$(U_1)_{jk} = \Gamma_0\big((R_1)_{jk}\big),$$

$$(\Phi_1)_{jk} = \sum_{n=-\infty\ (n\neq 0)}^{\infty} \frac{\Gamma_n\big((R_1)_{jk}\big)}{in\varphi} \exp(in\theta),$$

$$(V_1)_{jk} = -\frac{1}{\varepsilon} \sum_{n=-\infty\ (n\neq 0)}^{\infty} \frac{1}{in} \frac{d}{dt}\left(\frac{\Gamma_n\big((R_1)_{jk}\big)}{\varphi}\right) \exp(in\theta),$$

$$(U_s)_{jk} = \Gamma_0\big((D_s)_{jk}\big),$$

$$(\Phi_s)_{jk} = \sum_{n=-\infty\ (n\neq 0)}^{\infty} \frac{\Gamma_n\big((D_s)_{jk}\big)}{in\varphi} \exp(in\theta),$$

$$(V_s)_{jk} = -\left(\sum_{\nu=1}^{s-1} \Phi_\nu V_{s-\nu}\right)_{jk} - \frac{1}{\varepsilon} \sum_{n=-\infty\ (n\neq 0)}^{\infty} \frac{1}{in} \frac{d}{dt}\left(\frac{\Gamma_n\big((D_s)_{jk}\big)}{\varphi}\right) \exp(in\theta),$$

де

$$D_s = R_s + \sum_{\nu=1}^{s-1} (R_\nu \Phi_{s-\nu} - \Phi_\nu U_{s-\nu}), \qquad j, k = 1, \ldots, n, \qquad s = 2, \ldots, q .$$

Нехай параметр μ настільки малий, що виконується нерівність

$$\sum_{s=1}^{q} \mu^s \left\|\Phi_s\right\|^*_{B_m} < 1 .$$

Тоді матрицю W визначимо за формулою

$$W = \left(E + \sum_{s=1}^{q} \mu^s \Phi_s\right)^{-1} \sum_{s=0}^{q-1} \left(\sum_{\nu+\delta=s+q+1} (R_\nu \Phi_\delta - \Phi_\nu U_\delta - \varepsilon \Phi_\nu V_\delta) \right) \mu^s .$$

Лему доведено. ◊

Позначимо $\forall\, n \neq \pm r$: $\Delta_n(t,\varepsilon) = \det\big(A(t,\varepsilon) - in\varphi(t,\varepsilon)E\big)$, а через $\Delta^0_{jn}(t,\varepsilon)$ позначимо визначники, які отримуються з $\Delta_n(t,\varepsilon)$ заміною в ньому j-го стовпця на $\operatorname{colon}\big(-\Gamma_n(f_1), -\Gamma_n(f_2)\big)$, $j = 1, 2$.

Введемо функції

$$x^0_1(t,\varepsilon,\theta) = M_0(t,\varepsilon) a_{12}(t,\varepsilon) \exp(-ir\theta) + N_0(t,\varepsilon) a_{12}(t,\varepsilon) \exp(ir\theta) + \\ + \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^0_{1n}(t,\varepsilon) \exp(in\theta), \tag{7}$$

$$x^0_2(t,\varepsilon,\theta) = -M_0(t,\varepsilon)\big(ir\varphi(t,\varepsilon) + a_{11}(t,\varepsilon)\big) \exp(-ir\theta) + N_0(t,\varepsilon)\big(ir\varphi(t,\varepsilon) - \\ - a_{11}(t,\varepsilon)\big) \exp(ir\theta) + \sum_{n=-\infty\ (n\neq \pm r)}^{\infty} x^0_{2n}(t,\varepsilon) \exp(in\theta), \tag{8}$$

де $x^0_{jn}(t,\varepsilon) = \dfrac{\Delta^0_{jn}(t,\varepsilon)}{\Delta_n(t,\varepsilon)}$, а функції $M_0(t,\varepsilon)$, $N_0(t,\varepsilon)$ визначаються із системи рівнянь

$$P(M_0, N_0) = 0, \qquad Q(M_0, N_0) = 0\,, \tag{9}$$

де

$$P(M_0, N_0) = \Gamma_{-r}\big(a_{12}(t,\varepsilon)X_2(t,\varepsilon,\theta,x_1^0,x_2^0) -$$

$$- (a_{22}(t,\varepsilon) - ir\varphi(t,\varepsilon))X_1(t,\varepsilon,\theta,x_1^0,x_2^0)\big)\,,$$

$$Q(M_0, N_0) = \Gamma_{r}\big(a_{12}(t,\varepsilon)X_2(t,\varepsilon,\theta,x_1^0,x_2^0) -$$

$$- (a_{22}(t,\varepsilon) + ir\varphi(t,\varepsilon))X_1(t,\varepsilon,\theta,x_1^0,x_2^0)\big)\,.$$

Лема 2. *Нехай система* (1) *така, що*

(***i***) $\inf\limits_G |a_{12}(t,\varepsilon)| > 0$;

(***ii***) *функції* f_1, f_2 *задовольняють умови*

$$-(a_{22}(t,\varepsilon) - ir\varphi(t,\varepsilon))\Gamma_r(f_1) + a_{12}(t,\varepsilon)\Gamma_r(f_2) \equiv 0\,,$$

$$-(a_{22}(t,\varepsilon) + ir\varphi(t,\varepsilon))\Gamma_{-r}(f_1) + a_{12}(t,\varepsilon)\Gamma_{-r}(f_2) \equiv 0\,;$$

(***iii***) *функції* X_1, X_2 *мають неперервні частинні похідні за* x_1, x_2 *в* D *до порядку* $2q+2$ *включно, а, якщо* $x_1, x_2 \in B_m$, *то ці частинні похідні також належать до класу* B_m;

(***iiii***) *система* (9) *має розв'язок* $M_0(t,\varepsilon), N_0(t,\varepsilon)$ *такий, що*

$$\inf_G \left| \det \frac{\partial(P,Q)}{\partial(M_0,N_0)} \right| > 0\,.$$

Тоді існує перетворення

$$x = g(t,\varepsilon,\theta,\mu) + \Psi(t,\varepsilon,\theta,\mu)\xi\,, \tag{10}$$

де елементи вектора g *і матриці* Ψ *належать до класу* B_m, *яке зводить систему* (1) *до вигляду*

$$\frac{d\xi}{dt} = \left(\sum_{s=1}^{q} H_s(t,\varepsilon)\mu^s\right)\xi + \mu^{2q}h(t,\varepsilon,\theta,\mu) + \varepsilon d(t,\varepsilon,\theta,\mu) +$$

$$+ \mu^{q+1}W_1(t,\varepsilon,\theta,\mu)\xi + \varepsilon A_2(t,\varepsilon,\theta,\mu)\xi + \mu\Xi(t,\varepsilon,\theta,\xi,\mu)\,, \tag{11}$$

де елементи матриць $H_1,\ldots,H_q$ *належать до класу* S_m, *елементи вектора* h *і матриці* W_1 *– до класу* B_m, *елементи вектора* d *і матриці* A_2 *– до класу* B_{m-1}. *Нелінійність* Ξ *належить до класу* B_m *відносно* t, ε, θ *і містить доданки, не нижче другого порядку відносно* ξ.

Д о в е д е н н я. Поряд з системою (1) розглянемо допоміжну систему

$$\varphi(t,\varepsilon)\frac{dx}{d\theta} = A(t,\varepsilon)x + f(t,\varepsilon,\theta) + \mu X(t,\varepsilon,\theta,x)\,,$$

де t, ε, φ розглядаються як сталі величини. До побудови 2π-періодичних за θ розв'язків таких систем можна застосувати метод малого параметра Пуанкаре [3, 7], згідно з яким 2π-періодичний розв'язок шукається у вигляді

$$x(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k(\theta)\mu^k\,, \tag{12}$$

де $x^k(\theta)$ – 2π-періодичні функції. Розглянемо векторні рівняння для визначення $2q$ перших членів ряду (12):

$$\varphi(t,\varepsilon)\frac{dx^0}{d\theta} = A(t,\varepsilon)x^0 + f(t,\varepsilon,\theta)\,, \tag{13}$$

$$\varphi(t,\varepsilon)\frac{dx^1}{d\theta} = A(t,\varepsilon)x^1 + X(t,\varepsilon,\theta,x^0)\,, \tag{14}$$

$$\varphi(t,\varepsilon)\frac{dx^2}{d\theta} = A(t,\varepsilon)x^2 + \frac{\partial X(t,\varepsilon,\theta,x^0)}{\partial x}x^1\,, \tag{15}$$

$$\varphi(t,\varepsilon)\frac{dx^s}{d\theta} = A(t,\varepsilon)x^s + \frac{\partial X(t,\varepsilon,\theta,x^0)}{\partial x}x^{s-1} +$$

$$+ F_s(t,\varepsilon,\theta,x^0,x^1,\ldots,x^{s-2}), \qquad s = 3,\ldots,2q-1. \tag{16}$$

Тут $\frac{\partial X}{\partial x}$ − матриця Якобі, а F_s − деякі поліноми відносно $x^0,\ldots,x^{s-2}$, коефіцієнти яких виражаються через похідні від функції X за x до $(s-1)$-го порядку включно, і внаслідок умови (***iii***) леми є функціями з класу B_m відносно t, ε, θ.

Умова (***ii***) леми забезпечує наявність 2π-періодичного розв'язку породжуючого рівняння (13), і цей розв'язок задається вектор-функцією $x^0 = \mathrm{colon}(x_1^0, x_2^0)$, де x_1^0, x_2^0 виражаються формулами (7)−(9). Внаслідок умови (***iiii***) леми $x_1^0, x_2^0 \in B_m$.

Умова (9) забезпечує наявність 2π-періодичного розв'язку $x^1(t,\varepsilon,\theta)$, компоненти x_1^1, x_2^1 знаходяться за формулами (7), (8) із заміною в них функцій $M_0(t,\varepsilon)$, $N_0(t,\varepsilon)$ на функції $M_1(t,\varepsilon), N_1(t,\varepsilon)$, а функцій f_1, f_2 − на функції $X_1(t,\varepsilon,\theta,x_1^0,x_2^0)$, $X_2(t,\varepsilon,\theta,x_1^0,x_2^0)$. Функції $M_1(t,\varepsilon), N_1(t,\varepsilon)$ визначаємо з неоднорідної системи лінійних алгебраїчних рівнянь з коефіцієнтами з класу S_m, матрицею якої є $\frac{\partial(P,Q)}{\partial(M_0,N_0)}$. Умова (***iiii***) гарантує однозначну розв'язність цієї системи і належність її розв'язку $M_1(t,\varepsilon), N_1(t,\varepsilon)$ до класу S_m. Аналогічно розв'язуємо рівняння (15), (16) і таким чином отримуємо $2q$ вектор-функцій $x^0, x^1,\ldots,x^{2q-1}$ з класу B_m.

Повернемось до системи (1) і здійснимо в ній заміну

$$x = y + x^0(t,\varepsilon,\theta) + \mu x^1(t,\varepsilon,\theta) + \ldots + \mu^{2q-1}x^{2q-1}(t,\varepsilon,\theta)\,, \tag{17}$$

де y − нова невідома вектор-функція, відносно якої отримаємо систему рівнянь

$$\frac{dy}{dt} = A(t,\varepsilon)y + \mu^{2q}h(t,\varepsilon,\theta,\mu) + \varepsilon c(t,\varepsilon,\theta,\mu) + \left(\sum_{\ell=1}^{q} V_\ell(t,\varepsilon,\theta)\mu^\ell\right)y +$$

$$+ \mu^{q+1}W(t,\varepsilon,\theta,\mu)y + \mu Y(t,\varepsilon,\theta,y,\mu)\,. \tag{18}$$

Елементи вектор-функції h і матриць $V_1,\ldots,V_q,W$ належать до класу B_m, а вектор-функції c − до класу B_{m-1}. Вектор-функція Y належить до класу B_m відносно t, ε, θ і містить доданки, не нижче 2-го порядку відносно y.

Зведемо систему (18) до майже діагонального вигляду за допомогою перетворення

$$y = L(t, \varepsilon) z\,, \qquad (19)$$

де

$$L(t, \varepsilon) = \begin{Vmatrix} a_{12}(t, \varepsilon) & a_{12}(t, \varepsilon) \\ -ir\varphi(t, \varepsilon) - a_{11}(t, \varepsilon) & ir\varphi(t, \varepsilon) - a_{11}(t, \varepsilon) \end{Vmatrix}.$$

Умова ($\boldsymbol{i}$) леми, а також умови $r \in \mathbb{N}$, $\inf_G \varphi > 0$ гарантують невиродженість перетворення (19) і внаслідок застосування його до системи (19) отримаємо

$$\frac{dz}{dt} = ir\varphi(t, \varepsilon) J z + \mu^{2q} h^*(t, \varepsilon, \theta, \mu) + \varepsilon c^*(t, \varepsilon, \theta, \mu) + \varepsilon A_1(t, \varepsilon) z +$$

$$+ \left(\sum_{\ell=1}^{q} P_\ell(t, \varepsilon, \theta) \mu^\ell \right) z + \mu^{q+1} W^*(t, \varepsilon, \theta, \mu) z + \mu Z(t, \varepsilon, \theta, z, \mu)\,, \qquad (20)$$

де $h^* = L^{-1} h$, $c^* = L^{-1} c$, $J = \mathrm{diag}\,(-1, 1)$, $P_\ell = L^{-1} V_\ell L$, $W^* = L^{-1} W L$, $A_1 = -\varepsilon^{-1} L^{-1} \dfrac{dL}{dt}$, $Z = L^{-1} Y(t, \varepsilon, \theta, Lz, \mu)$. Елементи матриці A_1 належать до класу S_{m-1}. Використовуючи тепер лему 1, за допомогою невиродженого перетворення з коефіцієнтами класу B_m зводимо систему (20) до вигляду (11).

Лему 2 доведено. ◊

Основні результати.

Теорема. *Нехай система* (1) *така, що*:

($\boldsymbol{i}$) *виконані всі умови леми* 2;

($\boldsymbol{ii}$) *для матриці* $H(t, \varepsilon, \mu) = \sum_{s=1}^{q} H_s(t, \varepsilon) \mu^{s-1}$ *в системі* (11) *існує матриця* $U(t, \varepsilon, \mu)$ *з елементами з* S_m, *яка задовольняє умови*

$\boldsymbol{1}^\circ$) $\exists \mu^* \in \mathbb{R}^+$ *таке, що* $\inf\limits_{]0, \mu^*]} \inf\limits_G |\det U(t, \varepsilon, \mu)| = u_0(\mu^*) > 0$,

$\boldsymbol{2}^\circ$) $U^{-1} H U = \Lambda_1(t, \varepsilon, \mu)$ − *діагональна матриця,*

$\boldsymbol{3}^\circ$) $\exists q_0 \in \mathbb{N}$, $1 \le q_0 \le q$ і $\gamma_0 > 0$ *такі, що* $\inf\limits_G |\mathrm{Re}\, \lambda_j(t, \varepsilon, \mu)| \ge \gamma_0 \mu^{q_0 - 1}$, $j = 1, 2$, *де* λ_1, λ_2 − *власні значення матриці* H.

Тоді для достатньо малих значень μ *і* $\varepsilon \mu^{-q_0}$ *система* (1) *має частковий розв'язок із класу* B_{m-1}.

Д о в е д е н н я. На підставі леми 2 зведемо систему (1) до вигляду (11) і в цій системі здійснимо підстановку

$$\xi = \mu^{2q - q_0} U(t, \varepsilon, \mu) \eta\,, \qquad (21)$$

де η − новий невідомий вектор, відносно якого внаслідок умови ($\boldsymbol{ii}$) теореми, а також властивостей нелінійності Ξ отримаємо систему

$$\frac{d\eta}{dt} = \mu \Lambda_1(t, \varepsilon, \mu) \eta + \mu^{q_0} g_1(t, \varepsilon, \theta, \mu) + \frac{\varepsilon}{\mu^{2q - q_0}} d_1(t, \varepsilon, \theta, \mu) +$$

$$+ \mu^{q+1} W_2(t, \varepsilon, \theta, \mu) \eta + \varepsilon A_3(t, \varepsilon, \theta, \mu) \eta +$$

$$+ \mu^{2q - q_0 + 1} F(t, \varepsilon, \theta, \eta, \mu)\,. \qquad (22)$$

Поряд з системою (22) розглянемо вкорочену лінійну неоднорідну систему

$$\frac{d\eta}{dt} = \mu\Lambda_1(t,\varepsilon,\mu)\eta + \mu^{q_0} g_1(t,\varepsilon,\theta,\mu) + \frac{\varepsilon}{\mu^{2q-q_0}} d_1(t,\varepsilon,\theta,\mu). \tag{23}$$

З огляду на умову ***3°***) з пункту (***ii***) теореми на підставі результатів робіт [1, 2] випливає, що система (23) має єдиний частковий розв'язок $\eta^0(t,\varepsilon,\theta,\mu)$ класу B_{m-1}, причому такий, що $\exists K > 0$

$$\left\|\eta^0\right\|^*_{B_{m-1}} \le K\left(\left\|g_1\right\|^*_{B_{m-1}} + \frac{\varepsilon}{\mu^{2q}}\left\|d_1\right\|^*_{B_{m-1}}\right).$$

Розв'язок системи (22) з компонентами, що належать до класу B_{m-1}, шукатимемо методом послідовних наближень, вибираючи за початкове наближення η^0, а подальші наближення визначаємо як розв'язки лінійних неоднорідних систем з компонентами з класу B_{m-1}:

$$\frac{d\eta^{s+1}}{dt} = \mu\Lambda_1(t,\varepsilon,\mu)\eta^{s+1} + \mu^{q_0} g_1(t,\varepsilon,\theta,\mu) +$$

$$+ \frac{\varepsilon}{\mu^{2q-q_0}} d_1(t,\varepsilon,\theta,\mu) + \mu^{q+1} W_2(t,\varepsilon,\theta,\mu)\eta^s +$$

$$+ \varepsilon A_3(t,\varepsilon,\theta,\mu)\eta^s + \mu^{2q-q_0+1} F(t,\varepsilon,\theta,\eta^s,\mu), \quad s = 0,1,2,\ldots. \tag{24}$$

Використовуючи звичайну методику принципу стискуючих відображень [8] з урахуванням властивостей початкової системи (1), легко показати, що при достатньо малих значеннях μ і $\varepsilon\mu^{-q_0}$ процес (24) збігається за нормою $\|\cdot\|^*_{B_{m-1}}$ до розв'язку системи (11) з компонентами з класу B_{m-1}. На підставі лем 1, 2 звідси випливає твердження теореми. ◊

Зауваження. При $q = q_0 = 1$ відповідний результат сформульовано в [10]. За цими ж умовами в [11] розглянуто систему $2N$-го порядку при наявності не тільки зовнішнього, але й внутрішнього резонансу.

Висновки. Отже, знайдено умови, при яких квазілінійна диференціальна система (1) має частковий розв'язок, компоненти якого зображуються у вигляді абсолютно та рівномірно збіжних рядів Фур'є з повільно змінними коефіцієнтами та частотою, при наявності резонансних співвідношень між власною частотою системи і частотою зовнішньої сили.

1. *Костин А. В., Щёголев С. А.* О решениях квазилинейной дифференциальной системы второго порядка, представимых рядами Фурье, содержащими медленно меняющиеся параметры // Укр. мат. журн. – 1998. – **50**, № 5. – С. 654–664.
   Те саме: *Kostin A. V., Shchegolev S. A.* On solutions of a second-order quasilinear differential system representable by Fourier series with slowly varying parameters // Ukr. Math. J. – 1998. – **50**, No. 5. – P. 741–753.
2. *Костин А. В., Щёголев С. А.* Об устойчивости колебаний, представимых рядами Фурье с медленно меняющимися параметрами // Дифференц. уравнения. – 2008. – **44**, № 1. – С. 45–51.
   Те саме: *Kostin A. V., Shchegolev S. A.* On the stability of oscillations representable by Fourier series with slowly varying parameters // Different. Equat. – 2008. – **44**, No. 1. – C. 47–53.
3. *Малкин И. Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. – Москва: Гостехиздат, 1956. – 491 с.
4. *Митропольский Ю. А.* Нелинейная механика. Асимптотические методы. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1995. – 397 с.
5. *Самойленко А. М.* Инвариантные тороидальные многообразия систем с медленно меняющимися переменными // Проблемы асимптотической теории нелинейных колебаний. – Киев, 1977. – С. 181–191.

6. *Самойленко А. М., Петришин Р. І.* Математичні аспекти теорії нелінійних коливань. – Київ: Наук. думка, 2004. – 474 с.
7. *Старжинский В. М.* Прикладные методы нелинейных колебаний. – Москва: Наука, 1977. – 256 с.
8. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. – Москва: Наука, 1980. – 496 с.
9. *Фещенко С. Ф., Шкиль Н. И., Николенко Л. Д.* Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1966. – 251 с.
10. *Щёголев С. А.* Резонансный случай существования решений квазилинейной дифференциальной системы второго порядка, представимых рядами Фурье, содержащими медленно меняющиеся параметры // Укр. мат. журн. – 1999. – **51**, № 2. – С. 285–288.

    Те саме: *Shchegolev S. A.* A resonance case of the existence of solutions of a quasilinear second-order differential system, which are represented by Fourier series with slowly varying parameters // Ukr. Math. J. – 1999. – **51**, No. 2. – P. 324–327.
11. *Щоголев С. А.* Про коливання у квазілінійних диференціальних системах з блочно-діагональною матрицею коефіцієнтів лінійної частини // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2007. – **50**, № 4. – С. 31–37.
12. *Grozdanovski T., Shepherd J., Stacey A.* Multi-scaling analysis of a logistic model with slowly varying coefficients // Appl. Math. Letters. – 2009. – **22**, No. 7. – P. 1091–1095.
13. *Pötzsche C.* Exponential dichotomies of linear dynamic equations on measure chains under slowly varying coefficients // J. Math. Analysis and Appl. – 2004. – **289**, No. 1. – P. 317–335.
14. *Shafiei M. H., Yazdanpanah M. J.* Stabilization of nonlinear systems with a slowly varying parameter by a control Lyapunov function // ISA Transactions. – 2010. – **49**, No. 2. – P. 215–221.

О НЕКОТОРЫХ РЕЗОНАНСНЫХ СЛУЧАЯХ В КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ С МЕДЛЕННО МЕНЯЮЩИМИСЯ ПАРАМЕТРАМИ

Для квазилинейной дифференциальной системы второго порядка, коэффициенты которой имеют вид рядов Фурье с медленно меняющимися коэффициентами и частотой, найдены признаки существования частного решения аналогичной структуры в случае чисто мнимых собственных значений матрицы линейной части, которые удовлетворяют некоторому резонансному соотношению.

ON SOME RESONANCE CASES IN QUASI-LINEAR DIFFERENTIAL SYSTEMS WITH SLOWLY VARYING PARAMETERS

For a quasi-linear second order differential system whose coefficients are represented as Fourier series with slowly varying coefficients and frequency, we establish a criterion of the existence of a partial solution having similar structure in the case of purely imaginary eigenvalues of matrix of the linear part which satisfy some resonance correlation.

Одеськ. нац. ун-т ім. І. І. Мечникова, Одеса

Одержано
12.03.09