УДК 517.956.3

Н. І. Білусяк[1], Б. Й. Пташник[1,2], С. М. Репетило[2]

КРАЙОВА ЗАДАЧА ЗІ ЗМІШАНИМИ УМОВАМИ ДЛЯ СЛАБКО НЕЛІНІЙНИХ ГІПЕРБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ

У циліндричній області досліджено однозначну розв'язність задачі зі змішаними крайовими умовами для неоднорідного лінійного гіперболічного рівняння високого порядку зі змінними за просторовими координатами коефіцієнтами. Для оцінок знизу малих знаменників, що виникли при побудові розв'язку задачі, використано метричний підхід. Отримані результати перенесено на випадок, коли рівняння збурено нелінійним доданком.

Вступ. Крайові задачі з даними на всій границі області для гіперболічних рівнянь не завжди є коректними, а їх розв'язність в обмежених областях пов'язана, взагалі, з проблемою малих знаменників (див. [8, 12] і бібліографію там). У працях [1–3, 8, 10–15] досліджено коректність крайових задач типу Діріхле для гіперболічних та безтипних рівнянь і систем рівнянь (лінійних і слабко нелінійних) зі сталими та змінними коефіцієнтами.

У цій роботі, яка примикає до праці [2] і є розвитком роботи [10], у $(p+1)$-вимірній циліндричній області, $p \ge 2$, досліджено однозначну розв'язність крайової задачі зі змішаними умовами на границі області для слабко нелінійного строго гіперболічного за Петровським рівняння порядку $2n$, $n \ge 1$, зі змінними за просторовими координатами коефіцієнтами у головній частині рівняння, коли на нижній основі циліндра задано парні похідні за часовою змінною від шуканого розв'язку, на верхній основі – непарні похідні, а на бічній поверхні циліндра задано умови типу умов Діріхле. Для випадку лінійного рівняння побудовано розв'язок у вигляді ряду за системою ортогональних функцій, а в нелінійному випадку вказано алгоритм побудови наближеного розв'язку.

Надалі використовуємо такі позначення: $\mathbb{Z}_+^p$ – множина точок простору $\mathbb{R}^p$ з цілими невід'ємними координатами; $s = (s_1, \ldots, s_p) \in \mathbb{Z}_+^p$, $|s| = s_1 + \ldots + s_p$, $\hat{s} = (s_0, s_1, \ldots, s_p) \in \mathbb{Z}_+^{p+1}$, $|\hat{s}| = s_0 + s_1 + \ldots + s_p$; $x = (x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}^p$; $D = \{(t, x) \in \mathbb{R}^{p+1} : t \in (0, T) \subset \mathbb{R}^1,\ x \in \Omega \subset \mathbb{R}^p\}$, де Ω – обмежена однозв'язна область з гладкою межею $\partial\Omega = \Gamma$, $\Sigma = \Gamma \times [0, T]$; $C^{j,\nu}$, $0 < \nu < 1$, – клас визначених в $\bar{\Omega}$ функцій, j-ті похідні яких задовольняють в $\bar{\Omega}$ умову Гельдера з показником ν; $A^{j,\nu}$ – клас замкнених областей, для яких функції, що задають у локальних координатах рівняння межових поверхонь цих областей, належать класу $C^{j,\nu}$; $C^m(\bar{D})$ – банахів простір функцій $v(t,x) := v(t, x_1, \ldots, x_p)$, неперервних із усіма похідними до порядку m включно в області $\bar{D}$; $\|v\|_{C^m(\bar{D})} := \sum_{0 \le |\hat{s}| \le m} \max_{(t,x) \in \bar{D}} \left| \dfrac{\partial^{|\hat{s}|} v(t,x)}{\partial t^{s_0} \partial x_1^{s_1} \ldots \partial x_p^{s_p}} \right|$; $C^{(0,r)}(\bar{D})$ – банахів простір функцій $v(t,x)$, які в області $\bar{D}$ неперервні за t та r раз неперервно диференційовні за x; $\|v\|_{C^{(0,r)}(\bar{D})} := \sum_{|s| \le r} \max_{(t,x) \in \bar{D}} \left| \dfrac{\partial^{|s|} v(t,x)}{\partial x_1^{s_1} \ldots \partial x_p^{s_p}} \right|$.

1. Постановка задачі. В області D розглядаємо задачу

$$\mathcal{L}u \equiv \sum_{s=0}^{n} a_s \frac{\partial^{2(n-s)}}{\partial t^{2(n-s)}} L^s u(t,x) = f(t,x) + \varepsilon \Phi(t, x, u(t,x)), \quad (t,x) \in D, \quad (1)$$

$$\frac{\partial^{2(r-1)}u(0,x)}{\partial t^{2(r-1)}}=0, \qquad \frac{\partial^{2r-1}u(T,x)}{\partial t^{2r-1}}=0, \qquad r=1,\dots,n, \qquad x\in\bar{\Omega}, \tag{2}$$

$$L^q u\big|_{\Sigma}=0, \qquad q=0,\dots,n-1, \tag{3}$$

де $a_s\in\mathbb{R}^1$, $a_0\neq 0$; $L:=\sum\limits_{i,j=1}^{p}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(p_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}\right)-q(x)$ – еліптичний в області Ω диференціальний вираз з дійснозначними достатньо гладкими в $\bar{\Omega}$ коефіцієнтами $p_{ij}(x)$ та $q(x)\ge 0$, $L^0u=u$, $L^qu=L(L^{q-1}u)$, $q=1,\dots,n$; $\varepsilon\in\mathbb{R}^1$; функція $\Phi(t,x,u)$ визначена та неперервна за змінною t і достатньо гладка за x та u в замкненій області $Q=\{(t,x,u):(t,x)\in\bar{D},\ u\in\bar{S}(u^0,r)\}$, де $\bar{S}(u^0,r)=\{u\in C^{2n}(\bar{D}):\left\|u-u^0\right\|_{C^{2n}(\bar{D})}\le r\}$, $u^0:=u^0(t,x)$ – розв'язок задачі (1)–(3) при $\varepsilon=0$.

Припустимо, що $\bar{\Omega}\in A^{2n,\nu}$, $p_{ij}(x)\in C^{2n-1,\nu}$, $i,j=1,\dots,p$, $q(x)\in C^{2n-2,\nu}$. Відомо [4, 7], що за вказаних припущень задача на власні значення

$$LX(x)=-\lambda X(x), \qquad X(x)\big|_{\Gamma}=0, \tag{4}$$

має повну ортонормовану в просторі $L_2(\Omega)$ систему власних функцій $\Upsilon=\{X_k(x),\ k\in\mathbb{N}\}$, а відповідні власні значення λ_k, $k\in\mathbb{N}$, цієї задачі, множину яких позначимо через Λ, є різними та додатними. При цьому $X_k(x)\in C^{2n}(\bar{\Omega})$, $k\in\mathbb{N}$, і справджуються оцінки

$$C_0k^{2/p}\le\lambda_k\le C_1k^{2/p}, \qquad 0<C_0\le C_1, \qquad k\in\mathbb{N}, \tag{5}$$

$$\max_{x\in\bar{\Omega}}\left|\frac{\partial^{|s|}X_k(x)}{\partial x_1^{s_1}\dots\partial x_p^{s_p}}\right|\le C_2\lambda_k^{p/4+|s|/2}, \qquad |s|=0,1,\dots,2n, \qquad k\in\mathbb{N}. \tag{6}$$

Тут і надалі через C_j, $j=0,1,\dots$, позначено додатні сталі, які не залежать від k.

Будемо вважати, що рівняння (1) є строго гіперболічним за Петровським в області D. Тоді всі корені $\gamma_1,\dots,\gamma_n$ рівняння

$$\sum_{s=0}^{n}a_s\gamma^{n-s}=0 \tag{7}$$

є різними та додатними.

2. Випадок лінійного рівняння $(\varepsilon=0)$**.** Розглянемо спочатку задачу з умовами (2), (3) для рівняння

$$\mathcal{L}u\equiv\sum_{s=0}^{n}a_s\,\frac{\partial^{2(n-s)}}{\partial t^{2(n-s)}}L^su(t,x)=f(t,x). \tag{8}$$

Нехай

$$f(t,x)=\sum_{k=1}^{\infty}f_k(t)X_k(x),$$

де

$$f_k(t)=\int\limits_{\Omega}f(t,x)X_k(x)\,dx, \qquad k\in\mathbb{N}. \tag{9}$$

Розв'язок задачі (2), (3), (8) шукаємо у вигляді ряду

$$u^0(t,x)=\sum_{k=1}^{\infty}u_k(t)X_k(x)\,. \tag{10}$$

Тоді кожна з функцій $u_k(t)$, $k\in\mathbb{N}$, є розв'язком такої крайової задачі:

$$\sum_{s=0}^{n}a_s(-\lambda_k)^s\,\frac{d^{2(n-s)}u_k(t)}{dt^{2(n-s)}}=f_k(t),\qquad t\in(0,T),\qquad \lambda_k\in\Lambda\,, \tag{11}$$

$$u_k^{(2(r-1))}(0)=0,\qquad u_k^{(2r-1)}(T)=0,\qquad r=1,\ldots,n\,. \tag{12}$$

Корені характеристичного рівняння

$$\sum_{s=0}^{n}a_s(-\lambda_k)^s\mu^{2(n-s)}=0\,,$$

яке відповідає однорідному рівнянню

$$\sum_{s=0}^{n}a_s(-\lambda_k)^s\,\frac{d^{2(n-s)}u_k(t)}{dt^{2(n-s)}}=0\,, \tag{11'}$$

мають вигляд

$$\mu_j=i\sqrt{\gamma_j\lambda_k}\,,\qquad \mu_{n+j}=-i\sqrt{\gamma_j\lambda_k}\,,\qquad j=1,\ldots,n\,,$$

де γ_j, $j=1,\ldots,n$, – корені рівняння (7).

Таким чином, для кожного $\lambda_k\in\Lambda$ фундаментальна система розв'язків рівняння (11′) є такою:

$$\left\{w_{kj}(t)=\exp\left(\beta_j t\right),\ w_{k,n+j}(t)=\exp\left(-\beta_j t\right),\ j=1,\ldots,n\right\},$$

де $\beta_j:=\beta_j(\lambda_k)=i\sqrt{\gamma_j\lambda_k}$, а характеристичний визначник задачі (11), (12) має вигляд

$$\Delta(\lambda_k):=\Delta(T,\lambda_k)=$$

$$=\begin{vmatrix}
1 & \ldots & 1 & 1 & \ldots & 1\\
\beta_1^2 & \ldots & \beta_n^2 & \beta_1^2 & \ldots & \beta_n^2\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
\beta_1^{2(n-1)} & \ldots & \beta_n^{2(n-1)} & \beta_1^{2(n-1)} & \ldots & \beta_n^{2(n-1)}\\
\beta_1e^{\beta_1T} & \ldots & \beta_ne^{\beta_nT} & -\beta_1e^{-\beta_1T} & \ldots & -\beta_ne^{-\beta_nT}\\
\beta_1^3e^{\beta_1T} & \ldots & \beta_n^3e^{\beta_nT} & -\beta_1^3e^{-\beta_1T} & \ldots & -\beta_n^3e^{-\beta_nT}\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
\beta_1^{2n-1}e^{\beta_1T} & \ldots & \beta_n^{2n-1}e^{\beta_nT} & -\beta_1^{2n-1}e^{-\beta_1T} & \ldots & -\beta_n^{2n-1}e^{-\beta_nT}
\end{vmatrix}$$

і обчислюється за формулою

$$\Delta(\lambda_k)=(-1)^n\prod_{1\le s<t\le n}\left(\beta_t^2-\beta_s^2\right)^2\prod_{j=1}^{n}\left(\beta_j(e^{\beta_jT}+e^{-\beta_jT})\right). \tag{13}$$

Задача (11), (12) не може мати двох різних розв'язків тоді й лише тоді, коли $\Delta(\lambda_k)\ne0$.

Зауважимо, що

$$e^{\beta_jT}+e^{-\beta_jT}=e^{iT\sqrt{\gamma_j\lambda_k}}+e^{-iT\sqrt{\gamma_j\lambda_k}}=2\cos\left(T\sqrt{\gamma_j\lambda_k}\right),$$

$$\lambda_k\in\Lambda,\qquad j=1,\ldots,n\,. \tag{14}$$

Теорема 1. *Для єдиності розв'язку задачі* (2), (3), (8) *у просторі* $C^{2n}(\bar{D})$ *необхідно та достатньо, щоб виконувались умови*

$$\forall \lambda_k \in \Lambda, \quad \forall m \in \mathbb{Z}_+ \qquad T\sqrt{\gamma_j \lambda_k} \neq (2m+1)\frac{\pi}{2}, \qquad j = 1,\ldots,n. \tag{15}$$

Д о в е д е н н я проводиться за схемою доведення теореми 7.5 з [9] із урахуванням формул (13), (14). ◊

Нехай виконуються умови (15). Тоді для кожного $\lambda_k \in \Lambda$ існує єдина функція Ґріна $G_k(t,\tau) := G(\lambda_k, t, \tau)$ задачі (11), (12), за допомогою якої її розв'язок зображується у вигляді

$$u_k(t) = \int_0^T G_k(t,\tau) f_k(\tau)\, d\tau. \tag{16}$$

У квадраті $K_T = \{(t,\tau) : 0 \le t,\ \tau \le T\}$ (крім сторін $\tau = 0$, $\tau = T$) функції $G_k(t,\tau)$, $k \in \mathbb{N}$, визначаються формулами

$$G_k(t,\tau) = \frac{\operatorname{sgn}(t-\tau)}{4} \sum_{q=1}^{n} \frac{e^{\beta_q (t-\tau)} + (-1)^n e^{-\beta_q (t-\tau)}}{\beta_q \prod\limits_{s=1, s\neq q}^{n} (\beta_q^2 - \beta_s^2)} +$$

$$+ \frac{1}{8} \sum_{s,r,q=1}^{n} (-1)^{r+q} S_{n-r+1}^{(q)} \beta_s^{2r-3} \times$$

$$\times \left[\beta_q \left(e^{\beta_s \tau}(-1)^{n-1} - e^{-\beta_s \tau}\right)\left(e^{\beta_q (T-t)} + (-1)^n e^{-\beta_q (T-t)}\right) + \right.$$

$$\left. + \beta_s \left(e^{\beta_q t}(-1)^n - e^{-\beta_q t}\right)\left(e^{\beta_s (T-\tau)} + (-1)^{n-1} e^{-\beta_s (T-\tau)}\right)\right] \times$$

$$\times \left[\beta_q \prod_{\ell=1, \ell\neq q}^{n} (\beta_q^2 - \beta_\ell^2) \prod_{h=1, h\neq s}^{n} (\beta_s^2 - \beta_h^2) \cos\left(T\sqrt{\gamma_q \lambda_k}\right)\right]^{-1}, \tag{17}$$

де $\lambda_k \in \Lambda$, $S_\ell^{(q)}$, $1 \le \ell \le n-1$, − сума всіх можливих добутків елементів $\beta_1^2, \ldots, \beta_{q-1}^2\ \beta_{q+1}^2, \ldots, \beta_n^2$, взятих по ℓ штук у кожному добутку, $S_0^{(q)} \equiv 1$.

На стороні $\tau = 0$ квадрата K_T кожну з функцій $G_k(t,\tau)$, $k \in \mathbb{N}$, доозначаємо за неперервністю справа, а на стороні $\tau = T$ − за неперервністю зліва.

На підставі формул (10), (16) формальний розв'язок задачі (2), (3), (8) зображується рядом

$$u^0(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^T G_k(t,\tau) f_k(\tau)\, d\tau\, X_k(x). \tag{18}$$

Ряд (18), взагалі кажучи, є розбіжним, оскільки модулі виразів $\cos\left(T\sqrt{\gamma_q \lambda_k}\right)$, $q = 1,\ldots,n$, що входять знаменниками у формули (17), є відмінними від нуля, однак можуть ставати як завгодно малими для нескінченної кількості значень $\lambda_k \in \Lambda$. Тому питання про існування розв'язку задачі (2), (3), (8) пов'язане з проблемою малих знаменників.

При дослідженні питання про існування класичного розв'язку задачі (2), (3), (8) використаємо елементарну нерівність

$$\sin x \ge 2x/\pi, \qquad 0 \le x \le \pi/2, \tag{19}$$

і наступні допоміжні твердження.

Лема 1. *Нехай* $\Phi(k)$, $k \in \mathbb{N}$, *– обмежена послідовність дійсних чисел. Тоді для майже всіх (стосовно міри Лебеґа в* $\mathbb{R}^1$ *) чисел* $a > 0$ *нерівність*

$$\left|\Phi(k) - \frac{\ell a}{\sqrt[p]{k}}\right| < \frac{1}{k^{\beta}}, \qquad \beta = 1 + \frac{1}{p+\delta}, \tag{20}$$

де δ *– як завгодно мале додатне число, має не більше ніж скінченну кількість розв'язків у цілих числах* k і ℓ $\left(k \in \mathbb{N},\ \ell \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}\right)$.

Д о в е д е н н я проводиться за схемою доведення леми 2.4 з праці [8, розд. 1]. ◊

Лема 2. *Для майже всіх (стосовно міри Лебеґа в* $\mathbb{R}^1$ *) чисел* T *нерівності*

$$\left|\cos\left(T\sqrt{\gamma_q\lambda_k}\right)\right| \ge 2Tk^{-1-\delta}, \qquad \delta > 0, \qquad q = 1,\dots,n, \tag{21}$$

справджуються для всіх (крім скінченної кількості) значень $\lambda_k \in \Lambda$.

Д о в е д е н н я. Врахувавши нерівність (19), отримуємо оцінки

$$\left|\cos\left(T\sqrt{\gamma_q\lambda_k}\right)\right| = \left|\sin\left(T\sqrt{\gamma_q\lambda_k} + \pi/2\right)\right| =$$

$$= \left|\sin\left|T\sqrt{\gamma_q\lambda_k} + \pi/2 - m(\lambda_k, q)\pi\right|\right| \ge$$

$$\ge \frac{2}{\pi}\left|T\sqrt{\gamma_q\lambda_k} + \pi/2 - m(\lambda_k, q)\pi\right| =$$

$$= 2T\sqrt[p]{k}\left|\frac{\dfrac{\sqrt{\gamma_q\lambda_k}}{\pi} + \dfrac{1}{2T}}{\sqrt[p]{k}} - \frac{m(\lambda_k, q)\dfrac{1}{T}}{\sqrt[p]{k}}\right|, \qquad q = 1,\dots,n, \tag{22}$$

де $m(\lambda_k, q) \in \mathbb{Z}$ таке, що

$$\left|T\sqrt{\gamma_q\lambda_k} + \pi/2 - m(\lambda_k, q)\pi\right| \le \pi/2.$$

З оцінок (5), (22), леми 1 і неперервності функції $y = \dfrac{1}{T}$ при $T > 0$ випливає доведення леми. ◊

Теорема 2. *Нехай справджуються умови* (15), *коефіцієнти диференціального виразу* L *задовольняють умови* $p_{ij} \in C^{2h-3}(\bar{\Omega})$, $i, j \in \{1,\dots,p\}$, $q \in C^{2h-4}(\bar{\Omega})$; $f \in C^{(0,2h)}(\bar{D})$, $L^g f\big|_{\Sigma} = 0$, $g = 0,1,\dots,h-1$, *де* $h = [5(p+2)/4]$. *Тоді для майже всіх (стосовно міри Лебеґа в* $\mathbb{R}^1$ *) чисел* T *існує розв'язок задачі* (2), (3), (8) *з простору* $C^{2n}(\bar{D})$, *який неперервно залежить від функції* $f(t,x)$. *Цей розв'язок зображується формулами* (9), (17), (18).

Д о в е д е н н я. На підставі формул (17), оцінок (5), (6) та леми 2 отримуємо, що для майже всіх (стосовно міри Лебеґа в $\mathbb{R}^1$) чисел T справджуються оцінки

$$\max_{0\le t\le T}\left|\frac{d^q}{dt^q}\int_0^T G_k(t,\tau) f_k(\tau)\, d\tau\right| \le C_3 \lambda_k^{(q+3)/2-n} k^{1+\delta}\bar{f}_k, \qquad \delta > 0,$$

$$q = 0,1,\dots,2n, \qquad k \in \mathbb{N}, \tag{23}$$

де

$$C_3 = \frac{1}{8}n^3 \max_{q\in\{1,\dots,2n\}}\left(\left(\min_{j\in\{1,\dots,n\}}\left|\gamma_j\right|\right)^{q-1/2+n}\left(\min_{\substack{j,q\in\{1,\dots,n\},\\ j\ne q}}\left|\gamma_j - \gamma_q\right|\right)^{-2n+2}\right),$$

$$\bar{f}_k = \max_{t\in[0,T]}\left|f_k(t)\right|.$$

Оскільки диференціальний вираз L є лінійним і самоспряженим, то, застосовуючи h разів до рівностей (9) другу формулу Ґріна [4, 7], отримуємо

$$f_k(t) = \int_\Omega f X_k\,dx = -\frac{1}{\lambda_k}\int_\Omega f L X_k\,dx = -\frac{1}{\lambda_k}\int_\Omega L f X_k\,dx =$$

$$= \frac{1}{\lambda_k^2}\int_\Omega L f L X_k\,dx = \frac{1}{\lambda_k^2}\int_\Omega L^2 f X_k\,dx = \ldots =$$

$$= (-1)^h \frac{1}{\lambda_k^h}\int_\Omega L^h f X_k\,dx, \qquad k \in \mathbb{N}. \tag{24}$$

Із формул (24), нерівності Коші – Буняковського [6] та нормованості функцій $X_k(x)$, $k \in \mathbb{N}$, випливає, що

$$\overline{f}_k \le \frac{1}{\lambda_k^h}\sqrt{\int_\Omega X_k^2\,dx}\sqrt{\int_\Omega (L^h f)^2\,dx} \le C_4 \lambda_k^{-h}\,\|f(t,x)\|_{C^{(0,2h)}(\overline{D})}, \tag{25}$$

де $C_4 = \sqrt{\operatorname{mes}\Omega}\,\max\{\max_{i,j\in\{1,\ldots,p\}}\|p_{ij}\|_{C^{2h-3}(\overline{\Omega})},\ \|q\|_{C^{2h-4}(\overline{\Omega})}\}$.

Враховуючи оцінки (5), (6), (23), (25), отримуємо, що для майже всіх (стосовно міри Лебеґа в $\mathbb{R}^1$) чисел T справджується така оцінка для норми розв'язку задачі (2), (3), (8):

$$\|u^0\|_{C^{2n}(\overline{D})} \le \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{0\le|\hat{s}|\le 2n}\max_{0\le t\le T}\left|\frac{d^{s_0}}{dt^{s_0}}\int_0^T G_k(t,\tau) f_k(\tau)\,d\tau\right|\max_{x\in\Omega}\left|\frac{\partial^{|s|}X_k(x)}{\partial x_1^{s_1}\ldots\partial x_p^{s_p}}\right| \le$$

$$\le (2n+1)^{p+1} C_2 C_3 \sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{3/2-n} k^{1+\delta}\lambda_k^{p/4+n}\overline{f}_k \le$$

$$\le (2n+1)^{p+1} C_2 C_3 C_4\,\|f\|_{C^{(0,2h)}(\overline{D})}\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{p/4+3/2-h} k^{1+\delta} \le$$

$$\le (2n+1)^{p+1} C_1^{(p+6)/4-h} C_2 C_3 C_4\,\|f\|_{C^{(0,2h)}(\overline{D})}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^\alpha}, \tag{26}$$

де $\alpha = (2h-3)/p - 3/2 - \delta$, а δ – як завгодно мале додатне число.

Якщо $0 < \delta < 1/p$, то $\alpha > 1$, тому ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^\alpha}$ є збіжним. Позначимо його суму через $K(\alpha)$. Тоді з оцінки (26) отримуємо

$$\|u^0\|_{C^{2n}(\overline{D})} \le (2n+1)^{p+1} C_1^{(p+6)/4-h} C_2 C_3 C_4 K(\alpha)\,\|f\|_{C^{(0,2h)}(\overline{D})} \equiv \rho. \tag{27}$$

З нерівності (27) випливає доведення теореми. ◊

3. Випадок слабко нелінійного рівняння. Розглянемо тепер задачу (1)–(3), коли $\varepsilon \ne 0$. Ця задача еквівалентна нелінійному інтегральному рівнянню

$$u(t,x) = u^0(t,x) + \varepsilon\int_D \mathcal{K}(t,x,\tau,\xi)\Phi(\tau,\xi,u(\tau,\xi))\,d\tau\,d\xi \tag{28}$$

за умови, що ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} G_k(t,\tau) X_k(x) X_k(\xi) \tag{29}$$

рівномірно збігається в області $\overline{D}\times\overline{D}$ до функції $\mathcal{K}(t,x,\tau,\xi)$, де функції $G_k(t,\tau)$, $k \in \mathbb{N}$, визначені формулами (17).

Лема 3. *Для майже всіх (стосовно міри Лебеґа в* $\mathbb{R}^1$*) чисел* T *ряд* (29) *рівномірно збігається в області* $\bar{D}\times\bar{D}$ *при* $n \ge [3(p+1)/2]+1$.

Д о в е д е н н я. На підставі оцінок (5), (6), рівностей (17) та леми 2 отримуємо, що для майже всіх (стосовно міри Лебеґа в $\mathbb{R}^1$) чисел T справджуються оцінки

$$\max_{\bar{D}\times\bar{D}} \left|G_k(t,\tau)X_k(x)X_k(\xi)\right| \le C_5 k^{(3-2n)/p+2+\delta}, \qquad \delta>0, \qquad k\in\mathbb{N}. \tag{30}$$

Із оцінок (30) випливає, що ряд (29) мажорується таким числовим рядом із додатними членами:

$$C_5 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{(2n-3)/p-2-\delta}}. \tag{31}$$

Якщо $0<\delta<1/p$, $n\ge[3(p+1)/2]+1$, то ряд (31) є збіжним. Тому для майже всіх (стосовно міри Лебеґа в $\mathbb{R}^1$) чисел T ряд (29) є рівномірно збіжним в області $\bar{D}\times\bar{D}$. ◊

Запишемо рівняння (28) у вигляді операторного рівняння

$$u(t,x) = A_{u^0}(t,x),$$

де A_v – нелінійний інтегральний оператор, визначений у кулі $\bar{S}(u^0,r)$ формулою

$$A_v u(t,x) := v(t,x) + \varepsilon \int_D \mathcal{K}(t,x,\tau,\xi)\Phi\big(\tau,\xi,u(\tau,\xi)\big)\,d\tau\,d\xi. \tag{32}$$

Позначимо

$$\bar{\Phi} = \max_{0\le|\hat{s}|\le 2h+1} \max_Q \left| \frac{\partial^{|\hat{s}|}\Phi(t,x,u)}{\partial u^{s_0}\partial x_1^{s_1}\ldots\partial x_p^{s_p}} \right|,$$

$$\Psi = C_1^{(p+6)/4-h} C_2 C_3 C_4 C_6 (2n+1)^{p+1}(1+r+\rho)^{2h}\,\bar{\Phi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{\alpha}},$$

де C_1, C_2, C_3, C_4, ρ – сталі з оцінок (5), (6), (23), (25), (27); $C_6 = C_6(h,p)$ – кількість доданків у виразі $L^h\big(\Phi(t,x,u(t,x))\big)$; $\alpha = (2h-3)/p - 3/2 - \delta$, $0<\delta<1/p$.

Теорема 3. *Нехай* $n\ge[3(p+1)/2]+1$, *виконуються умови теореми 2, функція* $\Phi(t,x,u)$ *в області* Q *неперервна за* t *та має неперервні похідні за змінними* x *і* u *до порядку* $2h+1$, *причому для кожної функції* $u\in\bar{S}(u^0,r)$ *справджуються умови*

$$L^g\Phi\big|_\Sigma = 0, \qquad L^g\frac{\partial\Phi}{\partial u}\Big|_\Sigma = 0, \qquad g = 0,1,\ldots,h-1,$$

де $h=[5(p+2)/4]$. *Тоді для майже всіх (стосовно міри Лебеґа в* $\mathbb{R}^1$*) чисел* T *і для всіх* ε *таких, що* $|\varepsilon|<\min\{r/\Psi,\ 1/\Psi\}$, *існує єдиний розв'язок задачі* (1)–(3), *який належить кулі* $\bar{S}(u^0,r)\subset C^{2n}(\bar{D})$ *і неперервно залежить від функції* $f(t,x)$.

Д о в е д е н н я. Нехай $|\varepsilon|\Psi<r$. Позначимо через V сукупність функцій $v\in C^{2n}(\bar{D})$, для яких

$$\left\|v-u^0\right\|_{C^{2n}(\bar{D})} \le \chi := r - |\varepsilon|\Psi.$$

Покажемо, що для довільної функції $v(t,x)$ із V оператор A_v переводить кулю $\bar{S}(u^0,r)$ в себе. Нехай $u \in \bar{S}(u^0,r)$. Тоді

$$\Phi(t,x,u(t,x)) = \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_k(t) X_k(x),$$

де

$$\Phi_k(t) = \int_\Omega \Phi(t,x,u(t,x)) X_k(x)\,dx, \qquad k \in \mathbb{N}. \tag{33}$$

За умов теореми, на підставі формули (33), рівностей вигляду (24), нерівності Коші – Буняковського [6], нормованості функцій $X_k(x)$, $k \in \mathbb{N}$, та правила диференціювання складної функції $\Phi(t,x,u(t,x))$, знаходимо

$$\max_{0\le t\le T} |\Phi_k(t)| = \max_{0\le t\le T} \left| \int_\Omega \Phi(t,x,u(t,x)) X_k(x)\,dx \right| =$$

$$= \max_{0\le t\le T} \left| (-1)^h \frac{1}{\lambda_k^h} \int_\Omega L^h \Phi X_k\,dx \right| \le$$

$$\le C_6 \frac{1}{\lambda_k^h} \max\{ \max_{1\le i,j\le p} \|p_{ij}\|_{C^{2h-3}(\bar{\Omega})}, \|q\|_{C^{2h-4}(\bar{\Omega})} \} \times$$

$$\times \max_{0\le|\hat{s}|\le 2h+1} \max_{Q} \left| \frac{\partial^{|\hat{s}|}\Phi(t,x,u)}{\partial u^{s_0} \partial x_1^{s_1} \ldots \partial x_p^{s_p}} \right| (1 + \|u\|_{C^{2n}(\bar{D})})^{2h} \sqrt{\operatorname{mes}\Omega} \le$$

$$\le C_4 C_6 (1 + \|u\|_{C^{2n}(\bar{D})})^{2h} \bar{\Phi} \lambda_k^{-h} \le C_4 C_6 (1 + \|u - u^0\|_{C^{2n}(\bar{D})} +$$

$$+ \|u^0\|_{C^{2n}(\bar{D})})^{2h} \bar{\Phi} \lambda_k^{-h} \le C_4 C_6 (1 + r + \rho)^{2h} \bar{\Phi} \lambda_k^{-h}, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{34}$$

де ρ – стала з оцінки (27).

Із формули (32), враховуючи оцінки (5), (6), (23), (34), отримуємо

$$\|A_v u(t,x) - u^0(t,x)\|_{C^{2n}(\bar{D})} \le \|v - u^0\|_{C^{2n}(\bar{D})} +$$

$$+ |\varepsilon| \left\| \int_D \mathcal{K}(t,x,\tau,\xi) \Phi(\tau,\xi,u(\tau,\xi))\,d\tau\,d\xi \right\|_{C^{2n}(\bar{D})} = \|v - u^0\|_{C^{2n}(\bar{D})} +$$

$$+ |\varepsilon| \left\| \int_D \sum_{k=1}^{\infty} G_k(t,\tau) \Phi(\tau,\xi,u(\tau,\xi)) X_k(x) X_k(\xi)\,d\tau\,d\xi \right\|_{C^{2n}(\bar{D})} \le$$

$$\le \chi + |\varepsilon| \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{0\le|\hat{s}|\le 2n} \max_{x\in\bar{\Omega}} \left| \frac{\partial^{|s|} X_k(x)}{\partial x_1^{s_1} \ldots \partial x_p^{s_p}} \right| \max_{0\le t\le T} \left| \frac{d^{s_0}}{dt^{s_0}} \int_0^T G_k(t,\tau) \Phi_k(\tau)\,d\tau \right| \le$$

$$\le \chi + |\varepsilon| (2n+1)^{p+1} C_2 C_3 \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{3/2-n} k^{1+\delta} \lambda_k^{p/4+n} \max_{0\le t\le T} |\Phi_k(t)| \le$$

$$\le \chi + |\varepsilon| (2n+1)^{p+1} C_2 C_3 \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{p/4+3/2-h} k^{1+\delta} C_4 C_6 (1 + r + \rho)^{2h} \bar{\Phi} \le$$

$$\le \chi + |\varepsilon| C_1^{(p+6)/4-h]} C_2 C_3 C_4 C_6 (2n+1)^{p+1} (1 + r + \rho)^{2h} \bar{\Phi} \times$$

$$\times \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{(2h-3)/p-3/2-\delta}} = \chi + |\varepsilon| \Psi = r.$$

Покажемо, що для довільної функції $v \in V$ оператор A_v є оператором стиску, якщо $|\varepsilon| < 1/\Psi$. Нехай $u_1, u_2 \in \bar{S}(u^0, r)$. Позначимо

$$\tilde{u}(t,x) = (1-\Theta)u_1(t,x) + \Theta u_2(t,x), \qquad \Theta \in (0,1).$$

На підставі формули (32), враховуючи оцінки (5), (6), (23), рівності вигляду (24), нерівність Коші – Буняковського [6], нормованість функцій $X_k(x)$, $k \in \mathbb{N}$, та формулу Лагранжа про скінченні прирости, одержуємо оцінку

$$\|A_v u_1(t,x) - A_v u_2(t,x)\|_{C^{2n}(\bar{D})} =$$

$$= |\varepsilon| \left\| \int_D \mathcal{K}(t,x,\tau,\xi)\big(\Phi(\tau,\xi,u_1(\tau,\xi)) - \Phi(\tau,\xi,u_2(\tau,\xi))\big)\, d\tau\, d\xi \right\|_{C^{2n}(\bar{D})} =$$

$$= |\varepsilon| \left\| \int_D \mathcal{K}(t,x,\tau,\xi) \frac{\partial \Phi\big(\tau,\xi,\tilde{u}(\tau,\xi)\big)}{\partial u} \big(u_1(\tau,\xi) - u_2(\tau,\xi)\big)\, d\tau\, d\xi \right\|_{C^{2n}(\bar{D})} \le$$

$$\le |\varepsilon| \max_{(t,x)\in\bar{D}} |u_1(t,x) - u_2(t,x)| \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{0 \le |\hat{s}| \le 2n} \max_{(t,x)\in\bar{D}} \left| \frac{\partial^{|s|} X_k(x)}{\partial x_1^{s_1} \ldots \partial x_p^{s_p}} \times \right.$$

$$\left. \times \frac{d^{s_0}}{dt^{s_0}} \int_D G_k(t,\tau) \frac{\partial \Phi\big(\tau,\xi,\tilde{u}(\tau,\xi)\big)}{\partial u} X_k(\xi)\, d\tau\, d\xi \right| \le |\varepsilon| \|u_1 - u_2\|_{C^{2n}(\bar{D})} \times$$

$$\times \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{0 \le |\hat{s}| \le 2n} \max_{x\in\bar{\Omega}} \left| \frac{\partial^{|s|} X_k(x)}{\partial x_1^{s_1} \ldots \partial x_p^{s_p}} \right| \max_{0\le t\le T} \left| \int_\Omega \frac{\partial \Phi\big(t,\xi,\tilde{u}(t,\xi)\big)}{\partial u} X_k(\xi) d\xi \right| \times$$

$$\times \max_{0\le t\le T} \left| \frac{d^{s_0}}{dt^{s_0}} \int_0^T G_k(t,\tau)\, d\tau \right| \le |\varepsilon| \|u_1 - u_2\|_{C^{2n}(\bar{D})} (2n+1)^{p+1} C_2 C_3 \times$$

$$\times \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{p/4+n} \lambda_k^{3/2-n} k^{1+\delta} \max_{0\le t\le T} \left| (-1)^h \frac{1}{\lambda_k^h} \int_\Omega L^h \frac{\partial \Phi(\tau,\xi,\tilde{u}(\tau,\xi))}{\partial u} X_k(\xi)\, d\xi \right| \le$$

$$\le |\varepsilon| \|u_1 - u_2\|_{C^{2n}(\bar{D})} (2n+1)^{p+1} C_2 C_3 C_4 C_6 \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{p/4+3/2-h} k^{1+\delta} \times$$

$$\times (1 + r + \rho)^{2h} \bar{\Phi} \le |\varepsilon| \|u_1 - u_2\|_{C^{2n}(\bar{D})} C_1^{(p+6)/4-h} \times$$

$$\times C_2 C_3 C_4 C_6 (2n+1)^{p+1} (1 + r + \rho)^{2h} \bar{\Phi} \times$$

$$\times \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{(2h-3)/p-3/2-\delta}} = |\varepsilon| \|u_1 - u_2\|_{C^{2n}(\bar{D})} \Psi. \qquad (35)$$

Якщо $|\varepsilon| < 1/\Psi$, то з нерівності (35) випливає, що A_v є оператором стиску. Крім того, оператор A_v є неперервним за ν. Тому згідно з теоремами 1 та 3 із [5] та теоремою 2 рівняння (28), а разом з ним і задача (1)–(3) має єдиний розв'язок, який належить кулі $\bar{S}(u^0, r)$ і неперервно залежить від $f(t,x)$. Теорему доведено. ◊

Наближений розв'язок задачі (1)–(3) можна шукати методом послідовних наближень. Послідовні наближення отримують за формулами

$$u_n(t,x) := u_0(t,x) + \varepsilon \int_D \mathcal{K}(t,x,\tau,\xi)\Phi(\tau,\xi,u_{n-1})\,d\tau\,d\xi\,, \qquad n = 1,2,\ldots\,,$$

де $u_0(t,x)$ – розв'язок задачі (1)–(3) при $\varepsilon = 0$. Швидкість збіжності послідовності $\{u_n\}$ до точного розв'язку $u^*(t,x)$ задачі (1)–(3) визначається нерівністю [5]

$$\left\| u_n - u^* \right\|_{C^{2n}(\bar{D})} \le \frac{(|\varepsilon|\,\Psi)^n}{1 - |\varepsilon|\,\Psi} \left\| u_1 - u_0 \right\|_{C^{2n}(\bar{D})}.$$

Результати роботи можна поширити на випадок, коли рівняння (1) є нестрого гіперболічним.

Робота виконана за часткової фінансової підтримки ДФФД України (проект № 29.1/005).

1. *Березанский Ю. М.* О задаче типа Дирихле для уравнения колебания струны // Укр. мат. журн. – 1960. – **12**, № 4. – С. 363–372.
2. *Білусяк Н. І., Пташник Б. Й.* Крайова задача для слабконелінійних гіперболічних рівнянь зі змінними коефіцієнтами // Укр. мат. журн. – 2001. – **53**, № 9. – С. 1281–1286.
   Те саме: *Bilusyak N. I., Ptashnyk B. Yo.* Boundary-value problem for weakly nonlinear hyperbolic equation with variable coefficients // Ukr. Math. Sci. – 2001. – **53**, No. 9. – P. 1546–1553.
3. *Буряченко Е. А.* Разрешимость однородной задачи Дирихле в круге для уравнений порядка $2m$ в случае кратных характеристик, имеющих углы наклона // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2008. – **51,** № 1. – С. 33–41.
   Те саме: *Buryachenko E. A.* Solvability of the homogeneous Dirichlet problem in a disk for equations of order $2m$ in the case of multiple characteristics with inclination angles // J. Math. Sci. – 2009. – **160**, No. 3. – P. 319–329.
4. *Ильин В. А., Шишмарев И. А.* Равномерные в замкнутой области оценки для собственных функций эллиптического оператора и их производных // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1960. – **24**, № 6. – С. 883–896.
5. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. – Москва: Наука, 1977. – 742 с.
6. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. – Москва: Наука, 1981. – 544 с.
7. *Михайлов В. П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. – Москва: Наука, 1983. – 424 с.
8. *Пташник Б. И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – Киев: Наук. думка, 1984. – 264 с.
9. *Пташник Б. Й., Ільків В. С., Кміть І. Я., Поліщук В. М.* Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. – Київ: Наук. думка, 2002. – 416 с.
10. *Пташник Б. Й., Репетило С. М.* Крайова задача з мішаними умовами для лінійного гіперболічного рівняння високого порядку зі змінними коефіцієнтами // Доп. НАН України. – 2010. – № 4. – С. 19–24.
11. *Ben-Naoum A. K.* On the Dirihlet problem for the nonlinear wave equation in bounded domains with corner points // Bull. Belg. Math. Soc. – 1996. – No. 3. – P. 345–361.
12. *Bourgin D. G., Duffin R.* The Dirichlet problem for the vibrating string equation // Bull. Amer. Math. Soc. – 1939. – **45**, No. 12. – P. 851–858.
13. *Chirakkal V. Easwaran.* A scaled characteristics method for the asymptotic solution of weakly nonlinear wave equations // Electronic Journal of Differential Equations. – 1998. – **1998**, No. 03. – P. 1–10.
14. *Kiguradze T., Lakshmikantham V.* On the Dirihlet problem for four-order linear hyperbolic equations // Nonlinear Anal.: Theory, Meth. & Appl. – 2002. – **49A**, No. 2. – P. 197–219.
15. *Matthews J. V., Schaeffer D. G.* A Well-posed free boundary value problem for a hyperbolic equation with Dirichlet boundary conditions // SIAM. J. Math. Anal. – 2004. – **36**, No. 1. – P. 256–271.
16. *Nowakowski A., Nowakowska I.* Dirichlet problem for semilinear hyperbolic equation // Nonlinear Anal.: Theory, Meth. & Appl. – 2005. – **63**, No. 5-7. – P. e43–e52.

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА СО СМЕШАННЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ СЛАБО НЕЛИНЕЙНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

В цилиндрической области исследована однозначная разрешимость задачи со смешанными граничными условиями для неоднородного линейного гиперболического уравнения высокого порядка с переменными по пространственным координатам коэффициентами. Для оценок снизу малых знаменателей, возникающих при построении решения задачи, использован метрический подход. Полученные результаты перенесены на случай, когда уравнение возмущено нелинейным слагаемым.

BOUNDARY-VALUE PROBLEM WITH MIXED CONDITIONS FOR WEAKLY NONLINEAR HYPERBOLIC EQUATIONS

In a cylindrical domain the unique solvability of the problem with mixed boundary conditions for inhomogeneous linear hyperbolic equation of high order with coefficients variable in the spatial coordinates is studied. For estimations from below of small denominators that appeared during construction of solution of the problem the metric approach is used. The obtained results are extended to the case of equation, perturbed by a nonlinear summand.

[1] Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів,
[2] Нац. ун-т «Львів. політехніка», Львів

Одержано
25.11.09