УДК 519.65

І. І. Демків

ІНТЕРПОЛЯЦІЙНИЙ ФУНКЦІОНАЛЬНИЙ МНОГОЧЛЕН ТРЕТЬОГО СТЕПЕНЯ, ЩО НЕ ВИКОРИСТОВУЄ ПРАВИЛА ПІДСТАНОВКИ

Пропонується і обґрунтовується конструкція функціонального полінома типу Ньютона, яка не вимагає виконання правила підстановки, що досягається за рахунок розширення класу поліномів, у якому шукається інтерполянт.

1. Питаннями узагальнення класичної теорії інтерполювання функцій однієї змінної на випадок нелінійних функціоналів та операторів займалися ряд авторів, зокрема L. Filipsson [7], P. Kergin [9], С. Ю. Ульм, В. В. Полль [5], W. A. Porter [10], P. M. Prenter [11], П. І. Соболевський [4], Л. О. Янович [6], M. V. Ignatenko, L. A. Yanovich [8] (див. також цитовану там літературу).

Побудовані інтерполяційні формули при цьому містили інтеграли, під знак яких входили похідні, диференціали Гато оператора, що інтерполюються, або інтеграли Стілтьєса за оператором скалярного аргументу.

Автори робіт [1–3] запропонували шукати інтерполянти типу Ньютона у класі функціональних поліномів вигляду

$$P_n(x(\cdot)) = K_0 + \sum_{s=1}^{n} \int_0^1 \int_{z_1}^1 \ldots \int_{z_{s-1}}^1 K_s(\mathbf{z}^s) \prod_{i=1}^{s} [x(z_i) - x_{i-1}(z_i)]\, dz_s \ldots dz_1 , \qquad (1)$$

де через $x_i(z) \in Q[0,1]$, $i = 0,1,\ldots$, позначено довільні фіксовані елементи з простору $Q[0,1]$ кусково-неперервних на відрізку $[0,1]$ функцій зі скінченною кількістю точок розриву першого роду. Для відшукання ядер K_0, $K_s(\mathbf{z}^s)$, $s = 1,\ldots,n$, було введено континуальну множину вузлів

$$x^n(z, \boldsymbol{\xi}^n) = x_0(z) + \sum_{i=1}^{n} H(z - \xi_i)[x_i(z) - x_{i-1}(z)], \qquad z \in [0,1],$$

$$\boldsymbol{\xi}^n = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \in \bar{\Omega}_n =$$

$$= \{\mathbf{z}^n = (z_1, z_2, \ldots, z_n) : 0 \le z_1 \le z_2 \le \ldots \le z_n \le 1\},$$

і сформульовано континуальні інтерполяційні умови

$$P_n^I(x^n(\cdot, \boldsymbol{\xi}^n)) = F(x^n(\cdot, \boldsymbol{\xi}^n)) \qquad \forall \boldsymbol{\xi}^n \in \bar{\Omega}_n ,$$

де $H(z)$ – функція Гевісайда.

У вищезгаданих роботах [1–3] показано, що необхідними умовами інтерполяційності полінома (1) на континуальних вузлах $x^n(z, \boldsymbol{\xi}^n)$ є означення його ядер за формулами

$$K_0 = F(x_0(\cdot)),$$

$$K_s(\mathbf{z}^s) = (-1)^s \prod_{i=1}^{s} [x_i(z_i) - x_{i-1}(z_i)]^{-1} D_{\mathbf{z}^s} F(x^s(\cdot, \mathbf{z}^s)), \quad s = 1,\ldots,n,$$

де $D_{\mathbf{z}^i} = \dfrac{\partial^i}{\partial z_1 \ldots \partial z_i}$. Для забезпечення достатньої умови інтерполяційності полінома $P_n(x(\cdot))$ на континуальних вузлах $x^n(z, \boldsymbol{\xi}^n)$ вимагалось виконання правила підстановки

 ISSN 0130–9420. Мат. методи та фіз.-мех. поля. 2010. – 53, № 3. – С. 46-59.

$$D_{\mathbf{z}^p}\left[F(x^{p+1}(\cdot,\mathbf{z}^{p+1}))\Big|_{z_{p+1}=z_p}\right]=\left[D_{\mathbf{z}^p}F(x^{p+1}(\cdot,\mathbf{z}^{p+1}))\right]\Big|_{z_{p+1}=z_p}\times$$

$$\times\frac{x_{p+1}(z_p)-x_{p-1}(z_p)}{x_p(z_p)-x_{p-1}(z_p)},\qquad p=1,\dots,n. \tag{2}$$

Правило підстановки (2) накладає певні обмеження на функціонали $F(x(\cdot))$. Цього можна позбутися, якщо розширити клас поліномів (1). Так, в [1] вказано, що при $n=2$ інтерполяційний поліном слід шукати у вигляді

$$P_2(x(\cdot))=K_0+\int_0^1 K_1(z_1)[x(z_1)-x_0(z_1)]\,dz_1+$$

$$+\int_0^1\int_{z_1}^1 K_2(\mathbf{z}^2)\prod_{i=1}^2[x(z_i)-x_{i-1}(z_i)]\,dz_2\,dz_1+$$

$$+\int_0^1 K_{1,1}(z_1)\prod_{i=1}^2[x(z_1)-x_{i-1}(z_1)]\,dz_1, \tag{3}$$

де $K_i(\mathbf{z}^i)\in L_\infty(\Omega_i)$, $i=1,2$, $K_{1,1}(z_1)\in L_\infty[0,1]$. Тоді, якщо $F(x(\cdot))\in\mathcal{E}_\infty^2$, де через $\mathcal{E}_\infty^n$ означено клас функціоналів $F(x(\cdot)):L_1(0,1)\to\mathbb{R}^1$ таких, що

$$f_p(\mathbf{z}^p)=\prod_{i=1}^p[x_i(z_i)-x_{i-1}(z_i)]^{-1}D_{\mathbf{z}^p}F(x^p(\cdot,\mathbf{z}^p))\in L_\infty(\Omega_p),\qquad p=1,2,$$

і, крім того,

$$f_{1,1}(z_1)=[x_2(z_1)-x_0(z_1)]^{-1}[x_2(z_1)-x_1(z_1)]^{-1}\left\{\frac{d}{dz_1}\left[F(x^2(\cdot,\mathbf{z}^2))\Big|_{z_2=z_1}\right]-\right.$$

$$\left.-\frac{x_2(z_1)-x_0(z_1)}{x_1(z_1)-x_0(z_1)}\frac{\partial F(x^2(\cdot,\mathbf{z}^2))}{\partial z_1}\Bigg|_{z_2=z_1}\right\}\in L_\infty[0,1],\qquad n=1,2,$$

то поліном (3) буде інтерполяційним на континуальній множині вузлів $x^2(\cdot,\boldsymbol{\xi}^2)$, $0\le\xi_1\le\xi_2\le1$, тоді й тільки тоді, коли його ядра визначаються за формулами

$$K_0=F(x_0(\cdot)),\qquad K_p(\mathbf{z}^p)=(-1)^p f_p(\mathbf{z}^p),\qquad p=1,2,$$

$$K_{1,1}(z_1)=-f_{1,1}(z_1).$$

У цій роботі пропонується і обґрунтовується конструкція функціонального полінома типу Ньютона $P_3^I(x(\cdot))$, яка не вимагає виконання правила підстановки, що досягається за рахунок розширення класу поліномів (1), у якому шукається інтерполянт.

2. Поставимо задачу:

знайти такий поліном $P_n^I(x(\cdot))$, який для функціонала $F:Q[0,1]\to\mathbb{R}^1$ є інтерполяційним на континуальній множині вузлів $x^n(z,\boldsymbol{\xi}^n)$, $0\le\xi_1\le\xi_2\le\ldots\le\xi_n\le1$, тобто задовольняє інтерполяційні умови

$$P_n^I(x^n(\cdot,\boldsymbol{\xi}^n))=F(x^n(\cdot,\boldsymbol{\xi}^n))\qquad\forall\,\boldsymbol{\xi}^n\in\Omega_n,\qquad n=3.$$

Інтерполяційний поліном будемо шукати у вигляді

$$P_3^I(x(\cdot))=\sum_{k=0}^3 p_k^I(x(\cdot)), \tag{4}$$

де

$$p_0^I(x(\cdot)) = F(x_0(\cdot)),$$

$$p_1^I(x(\cdot)) = \int_0^1 K_{1,0}(z_1)[x(z_1) - x_0(z_1)]\,dz_1,$$

$$p_2^I(x(\cdot)) = p_{2,0}^I(x(\cdot)) + p_{2,1}^I(x(\cdot)) = \int_0^1 \int_{z_1}^1 K_{2,0}(\mathbf{z}^2)\prod_{i=1}^{2}[x(z_i) - x_{i-1}(z_i)]\,dz_i +$$

$$+\int_0^1 K_{2,1}(z_1)\prod_{i=1}^{2}[x(z_1) - x_{i-1}(z_1)]\,dz_1,$$

$$p_3^I(x(\cdot)) = \sum_{k=0}^{4} p_{3,k}^I(x(\cdot)) = \int_0^1 \int_{z_1}^1 \int_{z_2}^1 K_{3,0}(\mathbf{z}^3)\prod_{i=1}^{3}[x(z_i) - x_{i-1}(z_i)]\,dz_i +$$

$$+\int_0^1 \int_{z_1}^1 K_{3,1}(z_1,z_3)\prod_{i=1}^{2}[x(z_1) - x_{i-1}(z_1)][x(z_3) - x_2(z_3)]\,dz_3\,dz_1 +$$

$$+\int_0^1 \int_{z_1}^1 K_{3,2}(\mathbf{z}^2)\prod_{i=1}^{2}[x(z_i) - x_{i-1}(z_i)][x(z_2) - x_2(z_2)]\,dz_2\,dz_1 +$$

$$+\int_0^1 K_{3,3}(z_1)\prod_{i=1}^{3}[x(z_1) - x_{i-1}(z_1)]\,dz_1 +$$

$$+\int_0^1 K_{3,4}(z_1)[x(z_1) - x_0(z_1)]\prod_{i=1}^{2}[x(z_1) - x_i(z_1)]\,dz_1. \tag{5}$$

Справджується

Теорема 1. *Для того щоб поліном (4) був інтерполяційним для функціонала $F(x(\cdot))$ на континуальному вузлі $x^3(z,\boldsymbol{\xi}^3)$ $\forall\,\boldsymbol{\xi}^3 \in \bar{\Omega}_3$ при відповідних умовах гладкості на функціонал $F(x(\cdot))$, необхідно та достатньо, щоб його ядра визначалися за формулами*

$$K_{s,0}(\mathbf{z}^s) = (-1)^s\prod_{i=1}^{s}[x_i(z_i) - x_{i-1}(z_i)]^{-1} D_{\mathbf{z}^s}F\big(x^s(\cdot,\mathbf{z}^s)\big),\quad s = 1,2,3,$$

$$K_{2,1}(z_1) = \left[\left.\frac{\partial F\big(x^2(\cdot,\mathbf{z}^2)\big)}{\partial z_1}\right|_{z_2=z_1} - \frac{x_1(z_1) - x_0(z_1)}{x_2(z_1) - x_0(z_1)}\times\right.$$

$$\left.\times\frac{d}{dz_1}F\big(x^2(\cdot,(z_1,z_1)^\top)\big)\right]\prod_{i=1}^{2}[x_i(z_1) - x_{i-1}(z_1)]^{-1},$$

$$K_{3,1}(z_1,z_3) = \prod_{i=1}^{2}[x_i(z_1) - x_{i-1}(z_1)]^{-1}\cdot[x_3(z_3) - x_2(z_3)]^{-1}\times$$

$$\times\left[\frac{x_1(z_1) - x_0(z_1)}{x_2(z_1) - x_0(z_1)}\cdot\frac{\partial^2 F\big(x^3(\cdot,(z_1,z_1,z_3)^\top)\big)}{\partial z_1\partial z_3} - \right.$$

$$\left.-\left.\frac{\partial^2 F\big(x^3(\cdot,\mathbf{z}^3)\big)}{\partial z_1\partial z_3}\right|_{z_2=z_1}\right],$$

$$K_{3,2}(\mathbf{z}^2) = \prod_{i=1}^{2}[x_i(z_i) - x_{i-1}(z_i)]^{-1}\cdot[x_3(z_2) - x_2(z_2)]^{-1}\times$$

$$\times\left[\frac{x_2(z_2)-x_1(z_2)}{x_3(z_2)-x_1(z_2)}\cdot\frac{\partial^2 F\big(x^3(\cdot,(z_1,z_2,z_2)^\top)\big)}{\partial z_1\partial z_2} - \left.\frac{\partial^2 F\big(x^3(\cdot,\mathbf{z}^3)\big)}{\partial z_1\partial z_2}\right|_{z_3=z_2}\right],$$

$$K_{3,3}(z_1) = \prod_{i=1}^{3}[x_i(z_1) - x_{i-1}(z_1)]^{-1}\left[\frac{x_1(z_1) - x_0(z_1)}{x_2(z_1) - x_0(z_1)} \times\right.$$

$$\left.\times \left.\frac{\partial F(x^3(\cdot,(z_1,z_1,z_3)^\top))}{\partial z_1}\right|_{z_3=z_1} - \left.\frac{\partial F(x^3(\cdot,\mathbf{z}^3))}{\partial z_1}\right|_{\substack{z_2=z_1\\ z_3=z_1}}\right],$$

$$K_{3,4}(z_1) = [x_1(z_1) - x_0(z_1)]^{-1}\prod_{i=1}^{2}[x_3(z_1) - x_i(z_1)]^{-1} \times$$

$$\times\left[\left.\frac{\partial F(x^3(\cdot,(z_1,z_2,z_2)^\top))}{\partial z_1}\right|_{z_2=z_1} -\right.$$

$$\left. - \frac{x_1(z_1) - x_0(z_1)}{x_3(z_1) - x_0(z_1)} \cdot \frac{\partial F(x^3(\cdot,(z_1,z_1,z_1)^\top))}{\partial z_1}\right]. \tag{6}$$

Д о в е д е н н я. Позначимо

$$L_{3,1}(z_1,z_3) = \frac{x_1(z_1) - x_0(z_1)}{x_2(z_1) - x_0(z_1)} \cdot \frac{\partial^2 F(x^3(\cdot,(z_1,z_2,z_2)^\top))}{\partial z_1 \partial z_3} - \left.\frac{\partial^2 F(x^3(\cdot,\mathbf{z}^3))}{\partial z_1 \partial z_3}\right|_{z_2=z_1},$$

$$L_{3,2}(z_1,z_2) = \frac{x_2(z_2) - x_1(z_2)}{x_3(z_2) - x_1(z_2)} \cdot \frac{\partial^2 F(x^3(\cdot,(z_1,z_2,z_2)^\top))}{\partial z_1 \partial z_2} - \left.\frac{\partial^2 F(x^3(\cdot,\mathbf{z}^3))}{\partial z_1 \partial z_2}\right|_{z_3=z_2}.$$

Спочатку доведемо *достатні* умови. Для цього підставимо континуальний вузол $x^3(z,\boldsymbol{\xi}^3)$ у формулу (4) і доведемо, що виконується умова інтерполяційності $P_3^I(x^3(\cdot,\boldsymbol{\xi}^3)) = F(x^3(\cdot,\boldsymbol{\xi}^3))$. Маємо

$$p_{3,0}^I(x^3(\cdot,\boldsymbol{\xi}^3)) = -\int_{\xi_1}^{\xi_2}\int_{\xi_2}^{\xi_3}\int_{\xi_3}^{1} \frac{\partial^3 F(x^3(\cdot,\mathbf{z}^3))}{\partial z_1 \partial z_2 \partial z_3}\,dz_3\,dz_2\,dz_1 -$$

$$-\int_{\xi_1}^{\xi_2}\int_{\xi_3}^{1}\int_{z_2}^{1} \frac{\partial^3 F(x^3(\cdot,\mathbf{z}^3))}{\partial z_1 \partial z_2 \partial z_3} \cdot \frac{x_3(z_2) - x_1(z_2)}{x_2(z_2) - x_1(z_2)}\,dz_3\,dz_2\,dz_1 -$$

$$-\int_{\xi_2}^{\xi_3}\int_{z_1}^{\xi_3}\int_{\xi_3}^{1} \frac{\partial^3 F(x^3(\cdot,\mathbf{z}^3))}{\partial z_1 \partial z_2 \partial z_3} \cdot \frac{x_2(z_1) - x_0(z_1)}{x_1(z_1) - x_0(z_1)}\,dz_3\,dz_2\,dz_1 -$$

$$-\int_{\xi_2}^{\xi_3}\int_{\xi_3}^{1}\int_{z_2}^{1} \frac{\partial^3 F(x^3(\cdot,\mathbf{z}^3))}{\partial z_1 \partial z_2 \partial z_3} \prod_{i=1}^{2}\frac{x_{i+1}(z_i) - x_{i-1}(z_i)}{x_i(z_i) - x_{i-1}(z_i)}\,dz_3\,dz_2\,dz_1 -$$

$$-\int_{\xi_3}^{1}\int_{z_1}^{1}\int_{z_2}^{1} \frac{\partial^3 F(x^3(\cdot,\mathbf{z}^3))}{\partial z_1 \partial z_2 \partial z_3} \prod_{i=1}^{2}\frac{x_3(z_i) - x_{i-1}(z_i)}{x_i(z_i) - x_{i-1}(z_i)}\,dz_3\,dz_2\,dz_1 =$$

$$= -p_{2,0}^I(x^3(\cdot,\boldsymbol{\xi}^3)) + \int_{\xi_1}^{\xi_2}\int_{\xi_2}^{\xi_3} \frac{\partial^2 F(x^3(\cdot,(z_1,z_2,\xi_3)^\top))}{\partial z_1 \partial z_2}\,dz_2\,dz_1 +$$

$$+\int_{\xi_1}^{\xi_2}\int_{\xi_3}^{1} \frac{x_3(z_2) - x_1(z_2)}{x_2(z_2) - x_1(z_2)} \cdot \left.\frac{\partial^2 F(x^3(\cdot,\mathbf{z}^3))}{\partial z_1 \partial z_2}\right|_{z_3=z_2}\,dz_2\,dz_1 +$$

$$+\int_{\xi_2}^{\xi_3} \frac{x_2(z_1) - x_0(z_1)}{x_1(z_1) - x_0(z_1)}\left[\frac{\partial F(x^3(\cdot,(z_1,\xi_3,\xi_3)^\top))}{\partial z_1} -\right.$$

$$
-\left.\frac{\partial F\big(x^3(\,\cdot\,,(z_1,z_2,\xi_3)^\top)\big)}{\partial z_1}\right|_{z_2=z_1}\Bigg]dz_1+\int\limits_{\xi_2}^{\xi_3}\frac{x_2(z_1)-x_0(z_1)}{x_1(z_1)-x_0(z_1)}\times
$$

$$
\times\int\limits_{\xi_3}^{1}\frac{x_3(z_2)-x_1(z_2)}{x_2(z_2)-x_1(z_2)}\cdot\left.\frac{\partial^2 F\big(x^3(\,\cdot\,,\mathbf{z}^3)\big)}{\partial z_1\partial z_2}\right|_{z_3=z_2}dz_2\,dz_1+
$$

$$
+\int\limits_{\xi_3}^{1}\int\limits_{z_1}^{1}\prod_{i=1}^{2}\frac{x_3(z_i)-x_{i-1}(z_i)}{x_i(z_i)-x_{i-1}(z_i)}\cdot\left.\frac{\partial^2 F\big(x^3(\,\cdot\,,\mathbf{z}^3)\big)}{\partial z_1\partial z_2}\right|_{z_3=z_2}dz_2\,dz_1\,. \qquad (7)
$$

Далі запишемо

$$
p^I_{3,1}(x^3(\,\cdot\,,\boldsymbol{\xi}^3))=\int\limits_{\xi_2}^{\xi_3}\int\limits_{\xi_3}^{1}\frac{x_2(z_1)-x_0(z_1)}{x_1(z_1)-x_0(z_1)}L_{3,1}(z_1,z_3)\,dz_3\,dz_1+
$$

$$
+\int\limits_{\xi_3}^{1}\int\limits_{z_1}^{1}\prod_{i=1}^{2}\frac{x_3(z_1)-x_{i-1}(z_1)}{x_i(z_1)-x_{i-1}(z_1)}L_{3,1}(z_1,z_3)\,dz_3\,dz_1=
$$

$$
=-\int\limits_{\xi_2}^{\xi_3}\frac{x_2(z_1)-x_0(z_1)}{x_1(z_1)-x_0(z_1)}\Bigg[\left.\frac{\partial F\big(x^2(\,\cdot\,,\mathbf{z}^2)\big)}{\partial z_1}\right|_{z_2=z_1}-
$$

$$
-\frac{x_1(z_1)-x_0(z_1)}{x_2(z_1)-x_0(z_1)}\cdot\frac{\partial F\big(x^2(\,\cdot\,,(z_1,z_1)^\top)\big)}{\partial z_1}-
$$

$$
-\left.\frac{\partial F\big(x^3(\,\cdot\,,(z_1,z_2,\xi_3)^\top)\big)}{\partial z_1}\right|_{z_2=z_1}+
$$

$$
+\frac{x_1(z_1)-x_0(z_1)}{x_2(z_1)-x_0(z_1)}\cdot\frac{\partial F\big(x^3(\,\cdot\,,(z_1,z_1,\xi_3)^\top)\big)}{\partial z_1}\Bigg]dz_1-
$$

$$
-\int\limits_{\xi_3}^{1}\prod_{i=1}^{2}\frac{x_3(z_1)-x_{i-1}(z_1)}{x_i(z_1)-x_{i-1}(z_1)}\Bigg[\left.\frac{\partial F\big(x^2(\,\cdot\,,\mathbf{z}^2)\big)}{\partial z_1}\right|_{z_2=z_1}-
$$

$$
-\frac{x_1(z_1)-x_0(z_1)}{x_2(z_1)-x_0(z_1)}\cdot\frac{\partial F\big(x^2(\,\cdot\,,(z_1,z_1)^\top)\big)}{\partial z_1}\Bigg]dz_1-p^I_{3,3}(x^3(\,\cdot\,,\boldsymbol{\xi}^3))=
$$

$$
=-p^I_{2,1}(x^3(\,\cdot\,,\boldsymbol{\xi}^3))-p^I_{3,3}(x^3(\,\cdot\,,\boldsymbol{\xi}^3))+
$$

$$
+\int\limits_{\xi_2}^{\xi_3}\frac{x_2(z_1)-x_0(z_1)}{x_1(z_1)-x_0(z_1)}\Bigg[\left.\frac{\partial F(x^3(\,\cdot\,,(z_1,z_2,\xi_3)^\top))}{\partial z_1}\right|_{z_2=z_1}-
$$

$$
-\frac{x_1(z_1)-x_0(z_1)}{x_2(z_1)-x_0(z_1)}\frac{\partial F(x^3(\,\cdot\,,(z_1,z_1,\xi_3)^\top))}{\partial z_1}\Bigg]dz_1\,. \qquad (8)
$$

Продовжуючи, одержуємо

$$
p^I_{3,2}(x^3(\,\cdot\,,\boldsymbol{\xi}^3))=\int\limits_{\xi_1}^{\xi_2}\int\limits_{\xi_3}^{1}\frac{x_3(z_2)-x_1(z_2)}{x_2(z_2)-x_1(z_2)}L_{3,2}(z_1,z_2)\,dz_2\,dz_1+
$$

$$
+\int\limits_{\xi_2}^{\xi_3}\int\limits_{\xi_3}^{1}\prod_{i=1}^{2}\frac{x_{i+1}(z_i)-x_{i-1}(z_i)}{x_i(z_i)-x_{i-1}(z_i)}L_{3,2}(z_1,z_2)\,dz_2\,dz_1+
$$

$$
+\int\limits_{\xi_3}^{1}\int\limits_{z_1}^{1}\prod_{i=1}^{2}\frac{x_3(z_i)-x_{i-1}(z_i)}{x_i(z_i)-x_{i-1}(z_i)}L_{3,2}(z_1,z_2)\,dz_2\,dz_1\,. \qquad (9)
$$

З (5)–(9) випливає, що

$$p_3^I(x^3(\cdot,\boldsymbol{\xi}^3)) = -p_2^I(x^3(\cdot,\boldsymbol{\xi}^3)) + \int_{\xi_1}^{\xi_2}\int_{\xi_2}^{\xi_3} \frac{\partial^2 F(x^3(\cdot,(z_1,z_2,\xi_3)^\top))}{\partial z_1 \partial z_2} dz_2\, dz_1 +$$

$$+ \int_{\xi_1}^{\xi_2}\int_{\xi_3}^{1} \frac{\partial^2 F(x^3(\cdot,(z_1,z_2,z_2)^\top))}{\partial z_1 \partial z_2} dz_2\, dz_1 + \int_{\xi_2}^{\xi_3}\left[\frac{x_2(z_1)-x_0(z_1)}{x_1(z_1)-x_0(z_1)}\times\right.$$

$$\left.\times \frac{\partial F(x^3(\cdot,(z_1,\xi_3,\xi_3)^\top))}{\partial z_1} - \frac{\partial F(x^3(\cdot,(z_1,z_1,\xi_3)^\top))}{\partial z_1}\right] dz_1 +$$

$$+ \int_{\xi_2}^{\xi_3} \frac{x_2(z_1)-x_0(z_1)}{x_1(z_1)-x_0(z_1)} \int_{\xi_3}^{1} \frac{\partial^2 F(x^3(\cdot,(z_1,z_2,z_2)^\top))}{\partial z_1 \partial z_2} dz_2\, dz_1 +$$

$$+ \int_{\xi_3}^{1}\int_{z_1}^{1} \frac{x_3(z_1)-x_0(z_1)}{x_1(z_1)-x_0(z_1)} \cdot \frac{\partial^2 F(x^3(\cdot,(z_1,z_2,z_2)^\top))}{\partial z_1 \partial z_2} dz_2\, dz_1 -$$

$$- p_{3,3}^I(x^3(\cdot,\boldsymbol{\xi}^3)) + p_{3,3}^I(x^3(\cdot,\boldsymbol{\xi}^3)) + p_{3,4}^I(x^3(\cdot,\boldsymbol{\xi}^3)) =$$

$$= -p_2^I(x^3(\cdot,\boldsymbol{\xi}^3)) + F(x^3(\cdot,(\xi_2,\xi_3,\xi_3)^\top)) -$$

$$- F(x^3(\cdot,(\xi_1,\xi_3,\xi_3)^\top)) - F(x^3(\cdot,(\xi_2,\xi_2,\xi_3)^\top)) + F(x^3(\cdot,\boldsymbol{\xi}^3)) +$$

$$+ \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{\partial F(x^1(\cdot,z_1))}{\partial z_1} dz_1 - F(x^3(\cdot,(\xi_2,\xi_3,\xi_3)^\top)) +$$

$$+ F(x^3(\cdot,(\xi_1,\xi_3,\xi_3)^\top)) + \int_{\xi_2}^{\xi_3} \frac{x_2(z_1)-x_0(z_1)}{x_1(z_1)-x_0(z_1)} \times$$

$$\times \frac{\partial F(x^3(\cdot,(z_1,\xi_3,\xi_3)^\top))}{\partial z_1} dz_1 - F(x^3(\cdot,(\xi_3,\xi_3,\xi_3)^\top)) +$$

$$+ F(x^3(\cdot,(\xi_2,\xi_2,\xi_3)^\top)) + \int_{\xi_2}^{\xi_3} \frac{x_2(z_1)-x_0(z_1)}{x_1(z_1)-x_0(z_1)} \times$$

$$\times \frac{\partial F(x^1(\cdot,z_1))}{\partial z_1} dz_1 - \int_{\xi_2}^{\xi_3} \frac{x_2(z_1)-x_0(z_1)}{x_1(z_1)-x_0(z_1)} \times$$

$$\times \frac{\partial F(x^3(\cdot,(z_1,\xi_3,\xi_3)^\top))}{\partial z_1} dz_1 + \int_{\xi_3}^{1} \frac{x_3(z_1)-x_0(z_1)}{x_1(z_1)-x_0(z_1)} \times$$

$$\times \left[\frac{\partial F(x^1(\cdot,z_1))}{\partial z_1} - \left.\frac{\partial F(x^3(\cdot,(z_1,z_2,z_2)^\top))}{\partial z_1}\right|_{z_2=z_1}\right] dz_1 +$$

$$+ \int_{\xi_3}^{1} \frac{dF(x^3(\cdot,(z_1,z_1,z_1)^\top))}{dz_1} dz_1 + p_{3,4}^I(x^3(\cdot,\boldsymbol{\xi}^3)) =$$

$$= -p_1^I(x^3(\cdot,\boldsymbol{\xi}^3)) - p_2^I(x^3(\cdot,\boldsymbol{\xi}^3)) +$$

$$+ F(x^3(\cdot,\boldsymbol{\xi}^3)) - F(x^3(\cdot,(\xi_3,\xi_3,\xi_3)^\top)) -$$

$$- \int_{\xi_3}^{1} \frac{x_3(z_1)-x_0(z_1)}{x_1(z_1)-x_0(z_1)} \cdot \left.\frac{\partial F(x^3(\cdot,(z_1,z_2,z_2)^\top))}{\partial z_1}\right|_{z_2=z_1} dz_1 +$$

$$+\int_{\xi_3}^{1}\left[\frac{x_3(z_1)-x_0(z_1)}{x_1(z_1)-x_0(z_1)}\cdot\frac{\partial F\left(x^3(\cdot,(z_1,z_2,z_2)^\top)\right)}{\partial z_1}\Bigg|_{z_2=z_1}-\right.$$

$$\left.-\frac{dF\left(x^3(\cdot,(z_1,z_1,z_1)^\top)\right)}{dz_1}\right]dz_1=$$

$$=-p_1^I\left(x^3(\cdot,\boldsymbol{\xi}^3)\right)-p_2^I\left(x^3(\cdot,\boldsymbol{\xi}^3)\right)+F\left(x^3(\cdot,\boldsymbol{\xi}^3)\right)-$$

$$-F\left(x^3(\cdot,(\xi_3,\xi_3,\xi_3)^\top)\right)-F(x_0(\cdot))+F\left(x^3(\cdot,(\xi_3,\xi_3,\xi_3)^\top)\right).$$

Звідси одержуємо

$$P_3^I\left(x^3(\cdot,\boldsymbol{\xi}^3)\right)=F\left(x^3(\cdot,\boldsymbol{\xi}^3)\right),$$

що й треба було довести.

Доведемо *необхідні* умови (*обернене твердження*). Нехай функціональний поліном (4) є інтерполяційним для функціонала $F(x(\cdot))$ на континуальному вузлі $x^3(z,\boldsymbol{\xi}^3)$ $\forall\boldsymbol{\xi}^3\in\bar{\Omega}_3$. Покажемо, що його ядра визначаються за формулами (6).

Підставимо в обидві частини полінома (4) континуальний вузол $x^3\left(z,(\xi_1,\xi_2,\xi_2)^\top\right)$ і врахуємо його інтерполяційність. Спочатку обчислимо

$$p_{3,0}^I\left(x^3(\cdot,(\xi_1,\xi_2,\xi_2)^\top)\right)=$$

$$=-\int_{\xi_1}^{\xi_2}\int_{\xi_2}^{1}\int_{z_2}^{1}\frac{\partial^3F\left(x^3(\cdot,\mathbf{z}^3)\right)}{\partial z_1\partial z_2\partial z_3}\frac{x_3(z_2)-x_1(z_2)}{x_2(z_2)-x_1(z_2)}dz_3\,dz_2\,dz_1-$$

$$-\int_{\xi_2}^{1}\int_{z_1}^{1}\int_{z_2}^{1}\frac{\partial^3F\left(x^3(\cdot,\mathbf{z}^3)\right)}{\partial z_1\partial z_2\partial z_3}\cdot\frac{x_3(z_1)-x_0(z_1)}{x_1(z_1)-x_0(z_1)}\times$$

$$\times\frac{x_3(z_2)-x_1(z_2)}{x_2(z_2)-x_1(z_2)}dz_3\,dz_2\,dz_1=$$

$$=-\int_{\xi_2}^{1}\frac{x_3(z_2)-x_1(z_2)}{x_2(z_2)-x_1(z_2)}\frac{dF\left(x^3(\cdot,(\xi_2,z_2,1)^\top)\right)}{dz_2}dz_2+$$

$$+\int_{\xi_2}^{1}\frac{x_3(z_2)-x_1(z_2)}{x_2(z_2)-x_1(z_2)}\frac{\partial F\left(x^3(\cdot,(\xi_2,z_2,z_3)^\top)\right)}{\partial z_2}\Bigg|_{z_3=z_2}dz_2+$$

$$+\int_{\xi_2}^{1}\frac{x_3(z_2)-x_1(z_2)}{x_2(z_2)-x_1(z_2)}\frac{dF\left(x^3(\cdot,(\xi_1,z_2,1)^\top)\right)}{dz_2}dz_2-$$

$$-\int_{\xi_2}^{1}\frac{x_3(z_2)-x_1(z_2)}{x_2(z_2)-x_1(z_2)}\frac{\partial F\left(x^3(\cdot,(\xi_1,z_2,z_3)^\top)\right)}{\partial z_2}\Bigg|_{z_3=z_2}dz_2-$$

$$-\int_{\xi_2}^{1}\int_{z_1}^{1}\frac{\partial^2F\left(x^3(\cdot,(z_1,z_2,1)^\top)\right)}{\partial z_1\partial z_2}\cdot\frac{x_3(z_1)-x_0(z_1)}{x_1(z_1)-x_0(z_1)}\times$$

$$\times\frac{x_3(z_2)-x_1(z_2)}{x_2(z_2)-x_1(z_2)}dz_2\,dz_1+\int_{\xi_2}^{1}\int_{z_1}^{1}\frac{\partial^2F\left(x^3(\cdot,\mathbf{z}^3)\right)}{\partial z_1\partial z_2}\Bigg|_{z_3=z_2}\times$$

$$\times\frac{x_3(z_1)-x_0(z_1)}{x_1(z_1)-x_0(z_1)}\frac{x_3(z_2)-x_1(z_2)}{x_2(z_2)-x_1(z_2)}dz_2\,dz_1.$$

Тоді згідно з (4) маємо

$$F\left(x^3(\cdot,(\xi_1,\xi_2,\xi_2)^\top)\right) = F(x_0(\cdot)) - F\left(x^1(\cdot,\xi_2)\right) + F\left(x^1(\cdot,\xi_1)\right) -$$

$$- \int_{\xi_2}^{1} \frac{dF\left(x^1(\cdot,z_1)\right)}{dz_1} \frac{x_3(z_1)-x_0(z_1)}{x_1(z_1)-x_0(z_1)} dz_1 +$$

$$+ \int_{\xi_2}^{1} \frac{dF\left(x^2(\cdot,(\xi_2,z_2)^\top)\right)}{dz_2} \frac{x_3(z_2)-x_1(z_2)}{x_2(z_2)-x_1(z_2)} dz_2 -$$

$$- \int_{\xi_2}^{1} \frac{dF\left(x^2(\cdot,(\xi_1,z_2)^\top)\right)}{dz_2} \frac{x_3(z_2)-x_1(z_2)}{x_2(z_2)-x_1(z_2)} dz_2 -$$

$$- \int_{\xi_2}^{1} \frac{x_3(z_1)-x_0(z_1)}{x_2(z_1)-x_0(z_1)} \frac{x_3(z_1)-x_1(z_1)}{x_2(z_1)-x_1(z_1)} \frac{dF\left(x^2(\cdot,(z_1,z_1)^\top)\right)}{dz_1} dz_1 +$$

$$+ \int_{\xi_2}^{1} \frac{x_3(z_1)-x_0(z_1)}{x_1(z_1)-x_0(z_1)} \frac{x_3(z_1)-x_1(z_1)}{x_2(z_1)-x_1(z_1)} \left.\frac{\partial F\left(x^2(\cdot,\mathbf{z}^2)\right)}{\partial z_1}\right|_{z_2=z_1} dz_1 +$$

$$+ p^I_{3,0}\left(x^3(\cdot,(\xi_1,\xi_2,\xi_2)^\top)\right) +$$

$$+ \int_{\xi_2}^{1}\int_{z_1}^{1} \frac{x_3(z_1)-x_0(z_1)}{x_1(z_1)-x_0(z_1)} \frac{x_3(z_1)-x_1(z_1)}{x_2(z_1)-x_1(z_1)} L_{3,1}(z_1,z_3)\, dz_3\, dz_1 +$$

$$+ \int_{\xi_1}^{\xi_2}\int_{\xi_2}^{1} \frac{x_3(z_2)-x_1(z_2)}{x_2(z_2)-x_1(z_2)} L_{3,2}(z_1,z_2)\, dz_2\, dz_1 +$$

$$+ \int_{\xi_2}^{1}\int_{z_1}^{1} \frac{x_3(z_1)-x_0(z_1)}{x_1(z_1)-x_0(z_1)} \frac{x_3(z_2)-x_1(z_2)}{x_2(z_2)-x_1(z_2)} L_{3,2}(z_1,z_2)\, dz_2\, dz_1 +$$

$$+ \int_{\xi_2}^{1} \frac{x_3(z_1)-x_0(z_1)}{x_1(z_1)-x_0(z_1)} \frac{x_3(z_1)-x_1(z_1)}{x_2(z_1)-x_1(z_1)} L_{3,3}(z_1)\, dz_1 +$$

$$+ \int_{\xi_2}^{1} \frac{x_3(z_1)-x_0(z_1)}{x_1(z_1)-x_0(z_1)} L_{3,4}(z_1)\, dz_1\,. \tag{10}$$

Якщо в (10) відкинути доданки, які при диференціюванні за ξ_2 та ξ_1 перетворюються в нуль, то одержимо

$$F\left(x^3(\cdot,(\xi_1,\xi_2,\xi_2)^\top)\right) =$$

$$- \int_{\xi_2}^{1} \frac{x_3(z_2)-x_1(z_2)}{x_2(z_2)-x_1(z_2)} \left.\frac{dF\left(x^3(\cdot,(\xi_1,z_2,z_3)^\top)\right)}{dz_2}\right|_{z_3=z_2} dz_2 +$$

$$+ \int_{\xi_1}^{\xi_2}\int_{\xi_2}^{1} \frac{x_3(z_2)-x_1(z_2)}{x_2(z_2)-x_1(z_2)} L_{3,2}(z_1,z_2)\, dz_2\, dz_1\,. \tag{11}$$

Після диференціювання (11) за ξ_2 і ξ_1 та заміни ξ_2 на z_2, ξ_1 на z_1 одержуємо $L_{3,2}(z_1,z_2)$. Тоді

$$p^I_{3,2}\left(x^3(\cdot,(\xi_1,\xi_2,\xi_2)^\top)\right) = F\left(x^1(\cdot,\xi_2)\right) -$$

$$- F\left(x^1(\cdot,\xi_1)\right) - \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{dF\left(x^3(\cdot,(z_1,\xi_2,\xi_2)^\top)\right)}{dz_1} dz_1 -$$

$$
-\int_{\xi_2}^{1}\frac{\partial F\left(x^3(\cdot,(\xi_2,z_2,z_3)^\top)\right)}{\partial z_2}\Bigg|_{z_3=z_2}\frac{x_3(z_2)-x_1(z_2)}{x_2(z_2)-x_1(z_2)}dz_2+
$$

$$
+\int_{\xi_2}^{1}\frac{\partial F\left(x^3(\cdot,(\xi_1,z_2,z_3)^\top)\right)}{\partial z_2}\Bigg|_{z_3=z_2}\frac{x_3(z_2)-x_1(z_2)}{x_2(z_2)-x_1(z_2)}dz_2\,.
$$

Аналогічно знаходимо $L_{3,1}(z_1,z_3)$. Для цього підставимо в обидві частини полінома (4) континуальний вузол $\left(x^3(\cdot,(\xi_1,\xi_1,\xi_3)^\top)\right)$ і врахуємо його інтерполяційність та знайдене $L_{3.2}(z_1,z_2)$. Спочатку обчислимо

$$
p^I_{3,0}\left(x^3(\cdot,(\xi_1,\xi_1,\xi_3)^\top)\right)+p^I_{3,2}\left(x^3(\cdot,(\xi_1,\xi_1,\xi_3)^\top)\right)=
$$

$$
=-\int_{\xi_1}^{\xi_3}\int_{z_1}^{\xi_3}\int_{\xi_3}^{1}\frac{\partial^3F\left(x^3(\cdot,\mathbf{z}^3)\right)}{\partial z_1\partial z_2\partial z_3}\frac{x_2(z_1)-x_0(z_1)}{x_1(z_1)-x_0(z_1)}dz_3\,dz_2\,dz_1-
$$

$$
-\int_{\xi_1}^{\xi_3}\int_{\xi_3}^{1}\int_{z_2}^{1}\frac{\partial^3F\left(x^3(\cdot,\mathbf{z}^3)\right)}{\partial z_1\partial z_2\partial z_3}\cdot\frac{x_2(z_1)-x_0(z_1)}{x_1(z_1)-x_0(z_1)}\times
$$

$$
\times\frac{x_3(z_2)-x_1(z_2)}{x_2(z_2)-x_1(z_2)}dz_3\,dz_2\,dz_1-
$$

$$
-\int_{\xi_2}^{1}\int_{z_1}^{1}\int_{z_2}^{1}\frac{\partial^3F\left(x^3(\cdot,\mathbf{z}^3)\right)}{\partial z_1\partial z_2\partial z_3}\cdot\frac{x_3(z_1)-x_0(z_1)}{x_1(z_1)-x_0(z_1)}\times
$$

$$
\times\frac{x_3(z_2)-x_1(z_2)}{x_2(z_2)-x_1(z_2)}dz_3\,dz_2\,dz_1+
$$

$$
+\int_{\xi_1}^{\xi_3}\int_{\xi_3}^{1}\frac{x_2(z_1)-x_0(z_1)}{x_1(z_1)-x_0(z_1)}\cdot\frac{\partial^2F\left(x^2(\cdot,(z_1,z_2,z_2)^\top)\right)}{\partial z_1\partial z_2}dz_2\,dz_1-
$$

$$
-\int_{\xi_1}^{\xi_3}\int_{\xi_3}^{1}\frac{x_2(z_1)-x_0(z_1)}{x_1(z_1)-x_0(z_1)}\cdot\frac{x_3(z_2)-x_1(z_2)}{x_2(z_2)-x_1(z_2)}\times
$$

$$
\times\frac{\partial^2F\left(x^3(\cdot,\mathbf{z}^3)\right)}{\partial z_1\partial z_2}\Bigg|_{z_3=z_2}dz_2\,dz_1+
$$

$$
+\int_{\xi_3}^{1}\int_{z_1}^{1}\frac{x_3(z_1)-x_0(z_1)}{x_1(z_1)-x_0(z_1)}\frac{\partial^2F\left(x^2(\cdot,(z_1,z_2,z_2)^\top)\right)}{\partial z_1\partial z_2}dz_2\,dz_1-
$$

$$
-\int_{\xi_3}^{1}\int_{z_1}^{1}\frac{x_3(z_1)-x_0(z_1)}{x_1(z_1)-x_0(z_1)}\cdot\frac{x_3(z_2)-x_1(z_2)}{x_2(z_2)-x_1(z_2)}\times
$$

$$
\times\frac{\partial^2F\left(x^3(\cdot,\mathbf{z}^3)\right)}{\partial z_1\partial z_2}\Bigg|_{z_3=z_2}dz_2\,dz_1=
$$

$$
=-p^I_{2,0}\left(x^3(\cdot,(\xi_1,\xi_1,\xi_3)^\top)\right)-p^I_1\left(x^3(\cdot,(\xi_1,\xi_1,\xi_3)^\top)\right)-
$$

$$-\int_{\xi_1}^{\xi_3} \left.\frac{\partial F\left(x^3(\cdot,(z_1,z_2,\xi_3)^\top)\right)}{\partial z_1}\right|_{z_2=z_1} \frac{x_2(z_1)-x_0(z_1)}{x_1(z_1)-x_0(z_1)}\,dz_1 -$$

$$-\int_{\xi_3}^{1} \left.\frac{\partial F\left(x^3(\cdot,(z_1,z_2,z_2)^\top)\right)}{\partial z_1}\right|_{z_2=z_1} \frac{x_3(z_1)-x_0(z_1)}{x_1(z_1)-x_0(z_1)}\,dz_1 .$$

Тоді запишемо $F\left(x^3(\cdot,(\xi_1,\xi_1,\xi_3)^\top)\right)$. Відкинувши доданки, які при диференціюванні за ξ_3 та ξ_1 перетворюються в нуль, одержимо

$$F\left(x^3(\cdot,(\xi_1,\xi_1,\xi_3)^\top)\right) =$$

$$-\int_{\xi_1}^{\xi_3} \left.\frac{\partial F\left(x^3(\cdot,(z_1,z_2,\xi_3)^\top)\right)}{\partial z_1}\right|_{z_2=z_1} \frac{x_2(z_1)-x_0(z_1)}{x_1(z_1)-x_0(z_1)}\,dz_1 +$$

$$+\int_{\xi_1}^{\xi_3}\int_{\xi_3}^{1} \frac{x_2(z_1)-x_0(z_1)}{x_1(z_1)-x_0(z_1)} L_{3,1}(z_1,z_3)\,dz_3\,dz_1 .$$

З цього рівняння після диференціювання за ξ_3 і ξ_1 та заміни ξ_3 на z_3, а ξ_1 на z_1 одержуємо $L_{3,1}(z_1,z_2)$. Тоді

$$p_{3,1}^I\left(x^3(\cdot,(\xi_1,\xi_1,\xi_3)^\top)\right) = \int_{\xi_1}^{\xi_3}\int_{\xi_3}^{1} \frac{x_2(z_1)-x_0(z_1)}{x_1(z_1)-x_0(z_1)} L_{3,1}(z_1,z_3)\,dz_3\,dz_1 +$$

$$+\int_{\xi_3}^{1}\int_{z_1}^{1}\prod_{i=1}^{2} \frac{x_3(z_1)-x_{i-1}(z_1)}{x_i(z_1)-x_{i-1}(z_1)} L_{3,1}(z_1,z_3)\,dz_3\,dz_1 =$$

$$= -\,p_{2,1}^I\left(x^3(\cdot,(\xi_1,\xi_2,\xi_2)^\top)\right) - \int_{\xi_1}^{\xi_3} \frac{dF\left(x^3(\cdot,(z_1,z_1,\xi_3))^\top\right)}{dz_1}\,dz_1 +$$

$$+\int_{\xi_1}^{\xi_3} \left.\frac{\partial F\left(x^3(\cdot,(z_1,z_2,\xi_3)^\top)\right)}{\partial z_1}\right|_{z_2=z_1} \frac{x_2(z_1)-x_0(z_1)}{x_1(z_1)-x_0(z_1)}\,dz_1 -$$

$$-\int_{\xi_3}^{1} \frac{x_3(z_1)-x_0(z_1)}{x_2(z_1)-x_0(z_1)} \cdot \frac{x_3(z_1)-x_1(z_1)}{x_2(z_1)-x_1(z_1)} \times$$

$$\times \left.\frac{\partial F\left(x^3(\cdot,(z_1,z_1,z_3)^\top)\right)}{\partial z_1}\right|_{z_3=z_1} dz_1 +$$

$$+\int_{\xi_3}^{1} \frac{x_3(z_1)-x_0(z_1)}{x_1(z_1)-x_0(z_1)} \frac{x_3(z_1)-x_1(z_1)}{x_2(z_1)-x_1(z_1)} \left.\frac{\partial F\left(x^3(\cdot,\mathbf{z}^3)\right)}{\partial z_1}\right|_{\substack{z_3=z_1\\ z_2=z_1}} dz_1 .$$

Після підстановки знайдених $L_{3,1}(z_1,z_3)$ і $L_{3,2}(z_1,z_2)$ у рівності

$$P_3^I\left(x^3(\cdot,(\xi_1,\xi_2,\xi_2)^\top)\right) = F\left(x^3(\cdot,(\xi_1,\xi_2,\xi_2)^\top)\right),$$

$$P_3^I\left(x^3(\cdot,(\xi_1,\xi_1,\xi_3)^\top)\right) = F\left(x^3(\cdot,(\xi_1,\xi_1,\xi_3)^\top)\right)$$

одержимо

$$0=\int_{\xi_2}^{1}\frac{x_3(z_1)-x_0(z_1)}{x_1(z_1)-x_0(z_1)}\left[\frac{x_1(z_1)-x_0(z_1)}{x_3(z_1)-x_0(z_1)}\cdot\frac{dF\left(x^3(\cdot,(z_1,z_1,z_1)^\top)\right)}{dz_1}-\right.$$

$$\left.-\left.\frac{\partial F\left(x^3(\cdot,(z_1,z_2,z_2)^\top)\right)}{\partial z_1}\right|_{z_2=z_1}+L_{3,4}(z_1)\right]dz_1+$$

$$+\int_{\xi_2}^{1}\frac{x_3(z_1)-x_0(z_1)}{x_1(z_1)-x_0(z_1)}\cdot\frac{x_3(z_1)-x_0(z_1)}{x_2(z_1)-x_0(z_1)}\left[\left.\frac{\partial F\left(x^3(\cdot,\mathbf{z}^3)\right)}{\partial z_1}\right|_{\substack{z_2=z_1\\ z_3=z_1}}-\right.$$

$$\left.-\frac{x_1(z_1)-x_0(z_1)}{x_2(z_1)-x_0(z_1)}\cdot\left.\frac{\partial F\left(x^3(\cdot,(z_1,z_1,z_3)^\top)\right)}{dz_1}\right|_{z_3=z_1}+L_{3,3}(z_1)\right]dz_1.$$

Щоб ця рівність справджувалась, вирази, що стоять в дужках, приймаємо рівними нулю, звідки визначаємо $L_{3,4}$ та $L_{3,3}$.

Отже, обернене твердження доведено, а разом із ним і вся теорема. ◊

Знайдемо залишковий член інтерполяційного полінома другого степеня без вимоги виконання правила підстановки.

Виконується

Теорема 2. *Правильним є зображення*

$$F(x(\cdot))=P_2^I(x(\cdot))+R_2(x(\cdot)),$$

де

$$R_2(x(\cdot))=p_3^I(x(\cdot))\Big|_{x_3(\cdot)=x(\cdot)}.$$

Д о в е д е н н я. Маємо

$$p_{3,0}^I(x(\cdot))\Big|_{x_3(\cdot)=x(\cdot)}=-\int_0^1\int_{z_1}^1\prod_{i=1}^{2}\frac{x(z_i)-x_{i-1}(z_i)}{x_i(z_i)-x_{i-1}(z_i)}\left\{\frac{\partial^2F\left(x^2(\cdot,\mathbf{z}^2)\right)}{\partial z_1\partial z_2}-\right.$$

$$\left.-\left.\frac{\partial^2F\left(x^3(\cdot,\mathbf{z}^3)\right)}{\partial z_1\partial z_2}\right|_{z_3=z_2}\right\}dz_2\,dz_1,$$

$$p_{3,1}^I(x(\cdot))\Big|_{x_3(\cdot)=x(\cdot)}=\int_0^1\int_{z_1}^1\prod_{i=1}^{2}\frac{x(z_1)-x_{i-1}(z_1)}{x_i(z_1)-x_{i-1}(z_1)}\left[\frac{x_1(z_1)-x_0(z_1)}{x_2(z_1)-x_0(z_1)}\times\right.$$

$$\left.\times\frac{\partial^2F\left(x^3(\cdot,(z_1,z_1,z_3)^\top\right)}{\partial z_1\partial z_3}-\left.\frac{\partial^2F\left(x^3(\cdot,\mathbf{z}^3)\right)}{\partial z_1\partial z_3}\right|_{z_2=z_1}\right]dz_3\,dz_1=$$

$$=\int_0^1\prod_{i=1}^{2}\frac{x(z_1)-x_{i-1}(z_1)}{x_i(z_1)-x_{i-1}(z_1)}\left\{\frac{x_1(z_1)-x_0(z_1)}{x_2(z_1)-x_0(z_1)}\times\right.$$

$$\times\frac{\partial^2F\left(x^2(\cdot,(z_1,z_1)^\top)\right)}{\partial z_1}-\frac{x_1(z_1)-x_0(z_1)}{x_2(z_1)-x_0(z_1)}\times$$

$$\times\left.\frac{\partial^2F\left(x^3(\cdot,(z_1,z_1,z_3)^\top)\right)}{\partial z_1}\right|_{z_3=z_1}-\left.\frac{\partial F\left(x^2(\cdot,\mathbf{z}^2)\right)}{\partial z_1}\right|_{z_2=z_1}+$$

$$\left.+\left.\frac{\partial F\left(x^3(\cdot,\mathbf{z}^3)\right)}{\partial z_1}\right|_{\substack{z_2=z_1\\ z_3=z_1}}\right\}dz_1,$$

$$p^I_{3,2}(x(\cdot))\Big|_{x_3(\cdot)=x(\cdot)} = \int_0^1\int_{z_1}^1 \prod_{i=1}^{2}\frac{x(z_i)-x_{i-1}(z_i)}{x_i(z_i)-x_{i-1}(z_i)}\left[\frac{x_2(z_2)-x_1(z_2)}{x(z_2)-x_1(z_2)}\times\right.$$

$$\left.\times\frac{\partial^2 F\big(x^3(\cdot,(z_1,z_2,z_2)^\top)\big)}{\partial z_1\partial z_2}-\frac{\partial^2 F\big(x^3(\cdot,\mathbf{z}^3)\big)}{\partial z_1\partial z_2}\Bigg|_{z_3=z_2}\right]dz_2\,dz_1\,,$$

$$p^I_{3,3}(x(\cdot))\Big|_{x_3(\cdot)=x(\cdot)} = \int_0^1 \prod_{i=1}^{2}\frac{x(z_1)-x_{i-1}(z_1)}{x_i(z_1)-x_{i-1}(z_1)}\left[\frac{x_1(z_1)-x_0(z_1)}{x_2(z_1)-x_0(z_1)}\times\right.$$

$$\left.\times\frac{\partial F\big(x^3(\cdot,(z_1,z_1,z_3)^\top)\big)}{\partial z_1}\Bigg|_{z_3=z_1}-\frac{\partial F\big(x^3(\cdot,\mathbf{z}^3)\big)}{\partial z_1}\Bigg|_{\substack{z_2=z_1\\ z_3=z_1}}\right]dz_1\,,$$

$$p^I_{3,4}(x(\cdot))\Big|_{x_3(\cdot)=x(\cdot)} = \int_0^1 \frac{x(z_1)-x_0(z_1)}{x_1(z_1)-x_0(z_1)}\left[\frac{\partial F\big(x^3(\cdot,(z_1,z_2,z_2)^\top)\big)}{\partial z_1}\Bigg|_{z_2=z_1}-\right.$$

$$\left.-\frac{x_1(z_1)-x_0(z_1)}{x_3(z_1)-x_0(z_1)}\cdot\frac{\partial F\big(x^3(\cdot,(z_1,z_1,z_1)^\top)\big)}{\partial z_1}\right]dz_1\,.$$

Підсумувавши всі одержані вирази, маємо

$$p^I_3(x(\cdot))\Big|_{x_3(\cdot)=x(\cdot)} =$$

$$= -\,p^I_2(x(\cdot))-p^I_1(x(\cdot))-\int_0^1\frac{\partial F\big(x^3(\cdot,(z_1,z_1,z_1)^\top)\big)}{\partial z_1}\,dz_1 =$$

$$= -\,p^I_2(x(\cdot))-p^I_1(x(\cdot))-F(x_0(\cdot))+F(x(\cdot)) =$$

$$= F(x(\cdot))-P^I_2(x(\cdot)) = R_2(x(\cdot))\,,$$

що й треба було довести. ◊

3. Розглянемо випадок, коли у формулі (5) замість $p^I_{3,1}(x(\cdot))+p^I_{3,3}(x(\cdot))$ записати вираз

$$p^I_{3,5}(x(\cdot)) = -\int_0^1\left\{\big[D_{\mathbf{z}^1}F\big(x^2(\cdot,\mathbf{z}^2)\big)\big]_{z_2=z_1}-\frac{x_1(z_1)-x_0(z_1)}{x_2(z_1)-x_0(z_1)}\times\right.$$

$$\left.\times D_{\mathbf{z}^1}F\big(x^2(\cdot,(z_1,z_1)^\top)\big)\right\}\prod_{i=1}^{3}\frac{x(z_1)-x_{i-1}(z_1)}{x_i(z_1)-x_{i-1}(z_1)}\,d\mathbf{z}^1\,,$$

який при $x_3(\cdot)=x(\cdot)$ переходить у $p^I_{2,1}(x(\cdot))$. Тоді одержимо

$$\tilde{p}^I_3(x(\cdot)) = -\int_0^1\int_{z_1}^1\int_{z_2}^1 D_{\mathbf{z}^3}F\big(x^3(\cdot,\mathbf{z}^3)\big)\prod_{i=1}^{3}\frac{x(z_i)-x_{i-1}(z_i)}{x_i(z_i)-x_{i-1}(z_i)}\,d\mathbf{z}^3\,-$$

$$-\int_0^1\int_{z_1}^1\left\{\big[D_{\mathbf{z}^2}F\big(x^3(\cdot,\mathbf{z}^3)\big)\big]_{z_3=z_2}-\right.$$

$$\left.-\frac{x_2(z_2)-x_1(z_2)}{x_3(z_2)-x_1(z_2)}D_{\mathbf{z}^2}F\big(x^3(\cdot,(z_1,z_2,z_2)^\top)\big)\right\}\times$$

$$\times \prod_{i=1}^{2} \frac{x(z_i) - x_{i-1}(z_i)}{x_i(z_i) - x_{i-1}(z_i)} \frac{x(z_2) - x_2(z_2)}{x_3(z_2) - x_2(z_2)} d\mathbf{z}^2 +$$

$$+ \int_0^1 \Big\{ \big[D_{\mathbf{z}^1} F(x^3(\cdot, (z_1, z_2, z_2)^\top)) \big]_{z_2 = z_1} -$$

$$- \frac{x_1(z_1) - x_0(z_1)}{x_3(z_1) - x_0(z_1)} D_{\mathbf{z}^1} F(x^3(\cdot, (z_1, z_1, z_1)^\top)) \Big\} \times$$

$$\times \frac{x(z_1) - x_0(z_1)}{x_1(z_1) - x_0(z_1)} \prod_{i=1}^{2} \frac{x(z_1) - x_i(z_1)}{x_3(z_1) - x_i(z_1)} d\mathbf{z}^1 -$$

$$- \int_0^1 \Big\{ \big[D_{\mathbf{z}^1} F(x^2(\cdot, \mathbf{z}^2)) \big]_{z_2 = z_1} - \frac{x_1(z_1) - x_0(z_1)}{x_2(z_1) - x_0(z_1)} \times$$

$$\times D_{\mathbf{z}^1} F(x^2(\cdot, (z_1, z_1)^\top)) \Big\} \prod_{i=1}^{3} \frac{x(z_1) - x_{i-1}(z_1)}{x_i(z_1) - x_{i-1}(z_1)} d\mathbf{z}^1 . \qquad (12)$$

Виконуються такі теореми.

Теорема 3. *Якщо в інтерполяційному поліномі* (4) $p_3^I(x(\cdot)) = \tilde{p}_3(x(\cdot))$ *має вигляд* (12), *тоді він є інтерполяційним для функціонала* $F(x(\cdot))$ *на континуальному вузлі* $x^2(\cdot, \boldsymbol{\xi}^2)$ $\forall \boldsymbol{\xi}^2 \in \bar{\Omega}_2$ *та у вузлі* $x_3(z)$ *при відповідних умовах гладкості на функціонал* $F(x(\cdot))$.

Теорема 4. *Якщо у інтерполяційному поліномі* (4) $p_3^I(x(\cdot)) = \tilde{p}_3(x(\cdot))$ *має вигляд* (12), *тоді справджується подання*

$$F(x(\cdot)) = P_2^I(x(\cdot)) + R_2(x(\cdot)),$$

де

$$R_2(x(\cdot)) = p_3^I(x(\cdot))\Big|_{x_3(\cdot) = x(\cdot)} .$$

Д о в е д е н н я теорем 3, 4 здійснюється аналогічно до доведення теорем 1, 2. ◊

Робота виконана при частковому фінансуванні Державного фонду фундаментальних досліджень Міністерства освіти і науки України (реєстраційний номер Ф29.1/019).

1. *Макаров В. Л., Демків І. І., Михальчук Б. Р.* Необхідні і достатні умови існування функціонального інтерполяційного полінома на континуальній множині вузлів // Доп. НАН України. – 2003. – № 7. – С. 7–12.
2. *Макаров В. Л., Хлобыстов В. В.* Интерполяционная формула типа Ньютона для нелинейных функционалов // Докл. АН СССР. – 1989. – **307**, № 3. – С. 534–537.
3. *Макаров В. Л., Хлобыстов В. В., Кашпур Е. Ф., Михальчук Б. Р.* Интегральные полиномы типа Ньютона с континуальными узлами // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 6. – С. 779–789.
   Те саме: *Makarov V. L., Khlobystov V. V., Kashpur E. F., Mikhal'chuk B. R.* Integral Newton-type polynomials with continual nodes // Ukr. Math. J. – 2003. – **55**, No. 6. – С. 942–955.
4. *Соболевский П. И.* Интерполяция функционалов и некоторые приближенные формулы для интегралов по гауссовой мере // Изв. АН БССР. Сер. Физ.-мат. науки. – 1975. – № 2. – С. 5–12.
5. *Ульм С. Ю., Поль В. В.* О построении обобщенных разделённых разностей // Изв. АН ЭССР. – 1969. – **18**, № 1. – С. 100–102.

6. *Янович Л. А.* Приближенное вычисление континуальных интегралов по гауссовым мерам. – Минск: Наука и техника, 1976. – 384 с.
7. *Filipsson L.* Kergin interpolation in Banach spaces // J. Appr. Theory. – 2004. – **127**, No. 1. – P. 108–123.
8. *Ignatenko M. V., Yanovich L. A.* Newton type operator interpolation formulas based on interpolation by means of rational function // Comput. Methods in Appl. Math. – 2002. – **2**, No. 2. – P. 143–152.
9. *Kergin P.* A natural interpolation of C^k functions // J. Appr. Theory. – 1980. – **29**, No. 4. – P. 278–293.
10. *Porter W. A.* Synthesis of polynomic system // SIAM J. Math. Anal. – 1980. – **11**, No. 2. – P. 308–315.
11. *Prenter P. M.* Lagrange and Hermite interpolation in Banach spaces // J. Appr, Theory. – 1971. – **4**, No. 4. – P. 419–432.

ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЙ ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ МНОГОЧЛЕН ТРЕТЬЕЙ СТЕПЕНИ, НЕ ИСПОЛЬЗУЮЩИЙ ПРАВИЛА ПОДСТАНОВКИ

Предлагается и обосновывается конструкция функционального полинома типа Ньютона, которая не требует выполнения правила подстановки, что достигается за счет расширения класса полиномов, в котором ищется интерполянт.

INTERPOLATION FUNCTIONAL THIRD ORDER POLYNOMIAL WHICH DOES NOT USE SUBSTITUTION RULE

Construction of functional polynomial of Newton type which does not need the substitution rule to be applied is suggested in this paper. This is reached by means of broadening of polynomial class in which the interpolant is looked for.

Нац. ун-т «Львів. політехніка», Львів

Одержано
12.05.09