УДК 512.643+512.552.332

І. І. Кирчей

ВИЗНАЧНИКОВЕ ЗОБРАЖЕННЯ УЗАГАЛЬНЕНОЇ ОБЕРНЕНОЇ МАТРИЦІ МУРА – ПЕНРОУЗА НАД ТІЛОМ КВАТЕРНІОНІВ

У рамках теорії стовпцевих і рядкових визначників одержано визначникове зображення узагальненої оберненої матриці Мура – Пенроуза над тілом кватерніонів.

Вступ. Існування, єдиність і повно-рангове зображення узагальненої оберненої матриці Мура – Пенроуза над тілом кватерніонів $\mathbb{H}$, а також її застосування для розв'язування матричних кватерніонових рівнянь розглядалися, зокрема, в роботах [7, 12–16, 20, 22]. Використання комплексного зображення кватерніонової алгебри є ключовим у цих роботах. У той же час питання визначникового зображення матриці Мура – Пенроуза над тілом кватерніонів $\mathbb{H}$ досі залишалося нерозв'язаним. Більше того, в рамках жодної на сьогодні відомої теорії визначників над тілом кватерніонів не вдається одержати визначникове зображення оберненої матриці. Проблема полягає в тому, що, як доведено в [4], не існує визначникового функціонала над тілом, який зберігає всі властивості, притаманні йому в комплексному випадку. Так, визначники Дьйодонне і Стаді приймають своє значення не в самому тілі, а в полі – його центрі. Також вони не мають властивості розкладу за будь-яким стовпцем або рядком матриці. Визначник Мура означено в термінах підстановок виключно для ермітових матриць. Інший визначник у термінах підстановок – визначник Чена [9] – не задовольняє ключову властивість визначника: його виродженість для необоротних матриць. Подвійний визначник, також введений Л. Ченом, не має властивості розкладу за будь-яким стовпцем чи рядком матриці.

Визначникове зображення оберненої матриці над тілом кватерніонів одержано в роботі [1] в рамках теорії стовпцевих і рядкових визначників. У цій роботі в рамках теорії введених в [1] нових матричних функціоналів над тілом кватерніонів, стовпцевих і рядкових визначників, одержано визначникове зображення узагальненої оберненої матриці Мура – Пенроуза над тілом кватерніонів. У **п. 1** розглянуто деякі відомі факти з теорії власних значень кватерніонової матриці та її сингулярного розкладу, введено поняття характеристичного многочлена для ермітової матриці та досліджено його коефіцієнти. Також введено поняття узагальненої оберненої матриці Мура – Пенроуза над тілом кватерніонів і її граничне зображення. У **п. 2** доведено теорему про визначникове зображення узагальненої оберненої матриці Мура – Пенроуза для довільної матриці $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m\times n}$ над тілом кватерніонів.

Будемо використовувати такі позначення. Через $\boldsymbol{M}(n,\mathbb{H})$ позначимо кільце квадратних матриць n-го порядку, через $\mathbb{H}^{m\times n}$ – множину всіх $m \times n$-матриць над тілом кватерніонів $\mathbb{H}$, а через $\mathbb{H}_r^{m\times n}$ – її підмножину матриць рангу r. Під рангом матриці розуміємо її стовпцевий ранг – максимальну кількість лінійно незалежних справа стовпців матриці, або рівний йому рядковий ранг – максимальну кількість лінійно незалежних зліва рядків матриці. Нехай $\mathbf{A}^{ij}$ – підматриця матриці $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M}(n,\mathbb{H})$, яку одержимо викресливши i-й рядок та j-й стовпець. Позначимо j-й стовпець матриці $\mathbf{A}$ через $\mathbf{a}_{.j}$, а через $\mathbf{a}_{i.}$ – її i-й рядок. І нехай $\mathbf{A}_{.j}(\mathbf{b})$ – матриця, яку одержимо з $\mathbf{A}$ заміною її j-го стовпця стовпцем $\mathbf{b}$, а $\mathbf{A}_{i.}(\mathbf{b})$ – матриця, яку одержимо з $\mathbf{A}$, замінивши її i-й рядок рядком $\mathbf{b}$.

 ISSN 0130–9420. Мат. методи та фіз.-мех. поля. 2010. – 53, № 3. – С. 36-45.

1. Сингулярний розклад кватерніонових матриць та узагальнена обернена матриця Мура – Пенроуза. З огляду на некомутативність над тілом розрізняють ліві та праві власні значення кватерніонової матриці $\mathbf{A} \in \in \boldsymbol{M}(n,\mathbb{H})$, тобто розв'язки λ рівнянь $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \lambda \cdot \mathbf{x}$ та $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x} \cdot \lambda$. Розвиток теорії лівих власних значень простежується у роботах [11, 17, 19]. Більш розвинутою є теорія правих власних значень кватерніонових матриць. Відмітимо, зокрема, роботи [5, 21]. З теорії правих власних значень наведемо такі твердження.

Твердження 1 [**21**]. *Нехай* $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M}(n,\mathbb{H})$ *є ермітовою матрицею. Тоді праві власні значення матриці* $\mathbf{A}$ *є дійсними і їх кількість дорівнює* n.

Означення 1. Нехай $\mathbf{U} \in \boldsymbol{M}(n,\mathbb{H})$. Якщо $\mathbf{U}^*\mathbf{U} = \mathbf{U}\mathbf{U}^* = \mathbf{I}$, де $\mathbf{I}$ – одинична матриця, то $\mathbf{U}$ називають *унітарною матрицею*.

Твердження 2 [**21**]. *Матриця* $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M}(n,\mathbb{H})$ *є ермітовою тоді й тільки тоді, коли існує унітарна матриця* $\mathbf{U} \in \boldsymbol{M}(n,\mathbb{H})$ *така, що* $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^*$, *де* $\mathbf{D} = \operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)$, *а* $\lambda_i \in \mathbb{R}$ *– власні значення матриці* $\mathbf{A}$ *при всіх* $i = 1,\ldots,n$.

Нехай $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M}(n,\mathbb{H})$ – ермітова матриця. Тоді для її довільного правого власного значення $\lambda \in \mathbb{R}$ маємо $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x} \cdot \lambda = \lambda \cdot \mathbf{x}$. Це означає, що всі праві власні значення ермітової матриці є також її лівими власними значеннями. Тоді для дійсних лівих власних значень $\lambda \in \mathbb{R}$ матриця $\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}$ також є ермітовою. При умові, що $t \in \mathbb{R}$, для ермітової матриці $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M}(n,\mathbb{H})$ введемо поняття *характеристичного многочлена ермітової матриці,* поклавши $p(t) := \det(t\mathbf{I} - \mathbf{A})$. Тут і надалі визначник ермітової матриці означено згідно з [1, зауваження 3.1]. Коренями характеристичного многочлена ермітової матриці є її дійсні ліві власні значення, які в той же час є її правими власними значеннями. Дослідимо, аналогічно до комутативного випадку (див., наприклад, [2]), коефіцієнти характеристичного многочлена. Спочатку доведемо допоміжне твердження.

Лема 1. *Нехай* $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M}(n,\mathbb{H})$ *– ермітова матриця і стовпці* $i_1,\ldots,i_k$ *матриці* $\mathbf{A}$ *співпадають з одиничними векторами* $\mathbf{e}_{i_1},\ldots,\mathbf{e}_{i_k}$. *Тоді* $\det\mathbf{A}$ *дорівнює головному мінору матриці* $\mathbf{A}$, *який одержуємо викреслюванням рядків та стовпців* $i_1,\ldots,i_k$.

Д о в е д е н н я. Відмітимо, якщо $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M}(n,\mathbb{H})$ – ермітова матриця, стовпці $i_1,\ldots,i_k$ якої співпадають з одиничними вектор-стовпцями $\mathbf{e}_{i_1},\ldots$ $\ldots,\mathbf{e}_{i_k}$, тоді її рядки співпадають з одиничними вектор-рядками $\mathbf{e}_{i_1},\ldots,\mathbf{e}_{i_k}$. Оскільки $\det\mathbf{A} = \operatorname{cdet}_{i_1}\mathbf{A}$ [1, теорема 3.1], розкладемо визначник $\det\mathbf{A}$ за стовпцем i_1 [1, лема 2.2], у якому $a_{i_1k} = 0$ для всіх $k \neq i_1$ та $a_{i_1i_1} = 1$. Тоді одержимо

$$\begin{aligned}\det\mathbf{A} = -\operatorname{cdet}_{i_1}\mathbf{A}^{11}_{i_1\cdot}(\mathbf{a}_{1\cdot})\cdot a_{1i_1} + \ldots + \operatorname{cdet}_1\mathbf{A}^{i_1i_1}\cdot a_{i_1i_1} + \\ + \ldots - \operatorname{cdet}_{i_1}\mathbf{A}^{nn}_{i_1\cdot}(\mathbf{a}_{n\cdot})\cdot a_{ni_1} = -\operatorname{cdet}_{i_1}\mathbf{A}^{11}_{i_1\cdot}(\mathbf{a}_{1\cdot})\cdot 0 + \\ + \ldots + \operatorname{cdet}_1\mathbf{A}^{i_1i_1}\cdot 1 + \ldots - \operatorname{cdet}_{i_1}\mathbf{A}^{nn}_{i_1\cdot}(\mathbf{a}_{n\cdot})\cdot 0 = \operatorname{cdet}_1\mathbf{A}^{i_1i_1}.\end{aligned}$$

Оскільки підматриця $\mathbf{A}^{i_1i_1}$, яку одержимо з матриці $\mathbf{A}$, викресливши i_1-й рядок та i_1-й стовпець, є ермітовою, то $\operatorname{cdet}_1\mathbf{A}^{i_1i_1} = \det\mathbf{A}^{i_1i_1}$ [1, теорема 3.1]. Далі обчислюємо цей головний мінор, розклавши його за стовпцем i_2. Аналогічно до попереднього одержимо, що $\det \mathbf{A}$ дорівнює головному мінору, який одержимо з матриці $\mathbf{A}$, викресливши рядки і стовпці i_1 та i_2. Продовжуючи таким чином розклад за стовпцями $i_3, \ldots, i_k$, одержимо твердження леми. Лему доведено. ◊

Опираючись на лему 1, аналогічно до комутативного випадку можна довести таку теорему (див., наприклад, [2]).

Теорема 3. *Нехай* $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M}(n, \mathbb{H})$ *− ермітова матриця. Тоді її характеристичний многочлен має вигляд* $p(t) = t^n - d_1 t^{n-1} + d_2 t^{n-2} - \ldots + (-1)^n d_n$, *де* d_r *− сума головних мінорів порядку* r, $1 \le r < n$, *причому* $d_n = \det \mathbf{A}$.

Відомо також [18], що для довільної квадратної матриці $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M}(n, \mathbb{H})$ всі власні значення її відповідної ермітової матриці $\mathbf{A}^* \mathbf{A}$ є невід'ємними дійсними числами.

Означення 2. Нехай $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m \times n}$. Невід'ємні корені n власних значень відповідної ермітової матриці $\mathbf{A}^* \mathbf{A}$ будемо називати *сингулярними значеннями матриці* $\mathbf{A}$.

Ключове значення для визначникового зображення узагальненої оберненої матриці над тілом кватерніонів відіграє наступна теорема про сингулярний розклад кватерніонової матриці.

Теорема 4 [6, 18, 21]. *Нехай* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}_r^{m \times n}$. *Тоді існують унітарні кватерніонові матриці* $\mathbf{U}_1 \in \mathbb{H}^{m \times m}$ *та* $\mathbf{U}_2 \in \mathbb{H}^{n \times n}$ *такі, що*

$$\mathbf{U}_1 \mathbf{A} \mathbf{U}_2 = \begin{Vmatrix} \mathbf{D}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{Vmatrix} \in \mathbb{H}^{m \times n}, \tag{1}$$

де $\mathbf{D}_r = \operatorname{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r)$, $\sigma_1 \ge \sigma_2 \ge \ldots \ge \sigma_r > 0$, *і* $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r$ *всі є ненульовими сингулярними значеннями матриці* $\mathbf{A}$.

З огляду на те, що унітарні матриці є оборотними, рівність (1) можемо подати як $\mathbf{A} = \mathbf{V} \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{W}^*$, де матриці $\mathbf{V} \in \mathbb{H}^{m \times m}$ і $\mathbf{W} \in \mathbb{H}^{n \times n}$ є унітарними, а матриця $\boldsymbol{\Sigma} = (\sigma_{ij}) \in \mathbb{H}_r^{m \times n}$ така, що $\sigma_{ij} = 0$, якщо $i \ne j$, та $\sigma_{11} \ge \sigma_{22} \ge \ldots \ge \sigma_{rr} > \sigma_{r+1 r+1} = \ldots = \sigma_{qq} = 0$, де $q = \min\{n, m\}$. Виконуються наступні леми, для яких знаходимо аналоги в комплексному випадку (див. наприклад, [3]) і доведення яких є повністю аналогічним.

Лема 2. *Нехай матриця* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m \times n}$ *має сингулярний розклад* $\mathbf{A} = \mathbf{V} \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{W}^*$. *Покладемо* $\mathbf{A}^+ = \mathbf{W} \boldsymbol{\Sigma}^+ \mathbf{V}^*$, *де* $\boldsymbol{\Sigma}^+ \in \mathbb{H}^{n \times m}$ *одержується транспонуванням і заміною додатних елементів головної діагоналі матриці* $\boldsymbol{\Sigma}$ *оберненими величинами. Тоді для* $\mathbf{A}^+$ *виконуються такі умови:*

1°) $(\mathbf{A}\mathbf{A}^+)^* = \mathbf{A}\mathbf{A}^+$;

2°) $(\mathbf{A}^+\mathbf{A})^* = \mathbf{A}^+\mathbf{A}$;

3°) $\mathbf{A}\mathbf{A}^+\mathbf{A} = \mathbf{A}$;

4°) $\mathbf{A}^+\mathbf{A}\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^+$.

Лема 3. *Для довільної матриці* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m \times n}$ *існує єдина матриця* $\mathbf{A}^+$, *що задовольняє умови* ***1***°*−**4**° леми* 2.

Означення 3. Нехай $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m \times n}$. Матрицю $\mathbf{A}^+ \in \mathbb{H}^{n \times m}$, що задовольняє умови ***1***°−***4***° леми 2, називають *узагальненою оберненою матрицею Мура − Пенроуза.*

Аналогічно до комплексного випадку [8] виконується теорема про граничне зображення узагальненої оберненої матриці Мура − Пенроуза.

Лема 4. *Якщо* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m\times n}$, *тоді*

$$\mathbf{A}^+ = \lim_{\alpha\to 0} \mathbf{A}^*(\mathbf{A}\mathbf{A}^* + \alpha\mathbf{I})^{-1} = \lim_{\alpha\to 0} (\mathbf{A}^*\mathbf{A} + \alpha\mathbf{I})^{-1}\mathbf{A}^*, \quad \alpha \in \mathbb{R}_+ .$$

Д о в е д е н н я. Нехай $\mathbf{A} = \mathbf{V\Sigma W}^*$. Тоді $\mathbf{A}^* = \mathbf{W\Sigma V}^*$ і $\mathbf{A}^+ = \mathbf{W\Sigma}^+\mathbf{V}^*$. Оскільки для унітарної матриці $\mathbf{V}^* = \mathbf{V}^{-1}$, то одержимо

$$\mathbf{A}^*(\mathbf{A}\mathbf{A}^* + \alpha\mathbf{I})^{-1} = \mathbf{W\Sigma V}^*(\mathbf{V\Sigma W}^*\mathbf{W\Sigma V}^* + \alpha\mathbf{I})^{-1} =$$

$$= \mathbf{W\Sigma V}^*\left(\mathbf{V}(\mathbf{\Sigma}^2 + \alpha\mathbf{I})\mathbf{V}^*\right)^{-1} = \mathbf{W\Sigma}(\mathbf{\Sigma}^2 + \alpha\mathbf{I})^{-1}\mathbf{V}^*.$$

Розглянемо матрицю

$$\mathbf{\Sigma}(\mathbf{\Sigma}^2 + \alpha\mathbf{I})^{-1} = \left\|\begin{array}{ccc|c} \frac{\lambda_1}{\lambda_1^2+\alpha} & \dots & 0 & \\ \dots & \dots & \dots & \mathbf{0} \\ 0 & \dots & \frac{\lambda_r}{\lambda_r^2+\alpha} & \\ \hline & \mathbf{0} & & \mathbf{0} \end{array}\right\|.$$

Очевидно, що $\lim_{\alpha\to 0} \mathbf{\Sigma}(\mathbf{\Sigma}^2 + \alpha\mathbf{I})^{-1} = \mathbf{\Sigma}^+$. Звідси маємо

$$\lim_{\alpha\to 0} \mathbf{A}^*(\mathbf{A}\mathbf{A}^* + \alpha\mathbf{I})^{-1} = \mathbf{A}^+ .$$

Аналогічно доводимо також і другу частину рівності з твердження леми. Лему доведено. ◊

Очевидним з цієї леми є такий

Наслідок 1. *Нехай* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m\times n}$. *Справджуються такі твердження*:

а) *Якщо* $\operatorname{rank}\mathbf{A} = n$, *то* $\mathbf{A}^+ = (\mathbf{A}^*\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^*$.

б) *Якщо* $\operatorname{rank}\mathbf{A} = m$, *то* $\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^*(\mathbf{A}\mathbf{A}^*)^{-1}$.

в) *Якщо* $\operatorname{rank}\mathbf{A} = n = m$, *то* $\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^{-1}$.

2. Визначникові зображення матриці Мура – Пенроуза над тілом кватерніонів.

Лема 5. *Якщо* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m\times n}$, *тоді*

$$\operatorname{rank}(\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.i}(\mathbf{a}^*_{.j}) \le \operatorname{rank}\mathbf{A}^*\mathbf{A}. \tag{2}$$

Д о в е д е н н я. Проведемо ряд елементарних перетворень матриці $(\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.i}(\mathbf{a}^*_{.j})$, домножуючи її справа на елементарні унімодулярні матриці $\mathbf{P}_{ik}(-a_{jk})$, $k \ne j$. Матриця $\mathbf{P}_{ik}(-a_{jk})$ відрізняється від одиничної матриці ненульовим елементом $-a_{jk}$, розміщеним на перетині i-го рядка та k-го стовпця, $k \ne j$. При цьому добуток справа матриці $(\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.i}(\mathbf{a}^*_{.j})$ на елементарну унімодулярну матрицю $\mathbf{P}_{ik}(-a_{jk})$, $k \ne j$, означає додавання її i-го стовпця, помноженого справа на $-a_{jk}$, до k-го стовпця:

$$(\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.i}(\mathbf{a}^*_{.j}) \cdot \prod_{k\ne i} \mathbf{P}_{ik}(-a_{jk}) = \left\| \begin{matrix} \sum\limits_{k\ne i} a^*_{1k}a_{k1} & \dots & a^*_{1j} & \dots & \sum\limits_{k\ne i} a^*_{1k}a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum\limits_{k\ne i} a^*_{nk}a_{k1} & \dots & a^*_{nj} & \dots & \sum\limits_{k\ne i} a^*_{nk}a_{kn} \end{matrix} \right\|.$$

Одержану матрицю факторизуємо таким чином:

$$\left\| \begin{matrix} \sum\limits_{k \neq i} a_{1k}^* a_{k1} & \dots & a_{1j}^* & \dots & \sum\limits_{k \neq i} a_{1k}^* a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum\limits_{k \neq i} a_{nk}^* a_{k1} & \dots & a_{nj}^* & \dots & \sum\limits_{k \neq i} a_{nk}^* a_{kn} \end{matrix} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{matrix} a_{11}^* & a_{12}^* & \dots & a_{1m}^* \\ a_{21}^* & a_{22}^* & \dots & a_{2m}^* \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}^* & a_{n2}^* & \dots & a_{nm}^* \end{matrix} \right\| \cdot \begin{array}{c} \left\| \begin{matrix} a_{11} & \dots & 0 & \dots & a_{n1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & 0 & \dots & a_{mn} \end{matrix} \right\| \\ \scriptstyle j\text{-й} \end{array} {\scriptstyle i\text{-й}} .$$

Позначимо

$$\tilde{\mathbf{A}} := \begin{array}{c} \left\| \begin{matrix} a_{11} & \dots & 0 & \dots & a_{n1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & 0 & \dots & a_{mn} \end{matrix} \right\| \\ \scriptstyle j\text{-й} \end{array} {\scriptstyle i\text{-й}} .$$

Матрицю $\tilde{\mathbf{A}}$ одержуємо з матриці $\mathbf{A}$, покладаючи $a_{ij} = 1$, $a_{is} = 0$ для всіх $s \neq i$ та $a_{si} = 0$ для всіх $s \neq j$. Оскільки елементарні перетворення не змінюють рангу матриці, а ранг добутку матриць не перевищує рангу кожного із співмножників, одержимо

$$\operatorname{rank}(\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{\bullet i}(\mathbf{a}_{\bullet j}^*) \leq \min\{\operatorname{rank}\mathbf{A}^*, \operatorname{rank}\tilde{\mathbf{A}}\}.$$

Очевидно, що $\operatorname{rank}\tilde{\mathbf{A}} \geq \operatorname{rank}\mathbf{A} = \operatorname{rank}\mathbf{A}^*$. Крім того, $\operatorname{rank}\mathbf{A}^*\mathbf{A} = \operatorname{rank}\mathbf{A}$. Звідси й випливає нерівність (2). Лему доведено. ◊

Аналогічно можна довести таку лему.

Лема 6. *Якщо* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m \times n}$, *тоді* $\operatorname{rank}(\mathbf{A}\mathbf{A}^*)_{\bullet i}(\mathbf{a}_{\bullet j}^*) \leq \operatorname{rank}\mathbf{A}\mathbf{A}^*$.

Введемо такі позначення. Нехай $\alpha := \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\} \subseteq \{1, \dots, m\}$ та $\beta := = \{\beta_1, \dots, \beta_k\} \subseteq \{1, \dots, n\}$ – підмножини індексів порядку $1 \leq k \leq \min\{m, n\}$. Через $\mathbf{A}_\beta^\alpha$ позначимо підматрицю матриці $\mathbf{A}$ з рядками та стовпцями, що індексуються множинами α і β відповідно. Тоді через $\mathbf{A}_\alpha^\alpha$ позначимо головну підматрицю матриці $\mathbf{A}$ з рядками та стовпцями, що індексуються множиною α. Якщо матриця $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M}(n, \mathbb{H})$ є ермітовою, то через $\left|\mathbf{A}_\alpha^\alpha\right|$ позначимо відповідний головний мінор матриці $\mathbf{A}$. Для $1 \leq k \leq n$ через $L_{k,n}$ позначимо сукупність строго зростаючих послідовностей з k натуральних чисел, вибраних з $\{1, \dots, n\}$:

$$L_{k,n} := \{\alpha : \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k),\ 1 \leq \alpha_1 < \dots < \alpha_k \leq n\}.$$

Для фіксованих рядкового індексу $i \in \alpha$ та стовпцевого індексу $j \in \beta$ відповідно позначимо

$$I_{r,m}\{i\} := \{\alpha : \alpha \in L_{r,m},\ i \in \alpha\}, \qquad J_{r,n}\{j\} := \{\beta : \beta \in L_{r,n},\ j \in \beta\}.$$

Доведемо допоміжне твердження.

Лема 7. *Нехай* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m \times n}$. *Тоді для всіх* $i = 1, \dots, n$ *та* $j = 1, \dots, m$

$$\operatorname{cdet}_i(t\mathbf{I} + \mathbf{A}^*\mathbf{A})_{\bullet i}(\mathbf{a}_{\bullet j}^*) = \mathrm{c}_1^{(ij)} t^{n-1} + \mathrm{c}_2^{(ij)} t^{n-2} + \dots + \mathrm{c}_n^{(ij)}, \qquad (3)$$

де

$$c_k^{(ij)} = \sum_{\beta\in J_{k,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i\left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{\bullet i}(\mathbf{a}^*_{\bullet j})\right)_\beta^\beta, \qquad k = 1,\dots,n-1,$$

$$c_n^{(ij)} = \operatorname{cdet}_i(\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{\bullet i}(\mathbf{a}^*_{\bullet j}).$$

Д о в е д е н н я. Позначимо довільний елемент ермітової матриці $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ через b_{ij} для всіх $i, j = 1,\dots,n$, а через $\mathbf{b}_{\bullet i}$ – її довільний i-й стовпець. Розглянемо ермітову матрицю $(t\mathbf{I}+\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{\bullet i}(\mathbf{b}_{\bullet i}) \in \mathbb{H}^{n\times n}$, яка відрізняється від матриці $(t\mathbf{I}+\mathbf{A}^*\mathbf{A})$ елементом b_{ii}, розміщеним на перетині i-го рядка та i-го стовпця. За теоремою 3 маємо, що

$$\det(t\mathbf{I}+\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{\bullet i}(\mathbf{b}_{\bullet i}) = d_1 t^{n-1} + d_2 t^{n-2} + \ldots + d_n,$$

де $d_k = \sum_{\beta\in J_{k,n}\{i\}} \det(\mathbf{A}^*\mathbf{A})_\beta^\beta$ для всіх $k = 1,\dots,n-1$, є сумою всіх головних мінорів порядку k, які містять i-й стовпець, і $d_n = \det(\mathbf{A}^*\mathbf{A})$. Оскільки вектор-стовпець $\mathbf{b}_{\bullet i} = \sum_\ell \mathbf{a}^*_{\bullet \ell} a_{\ell i}$, де $\mathbf{a}^*_{\bullet\ell}$ – ℓ-й вектор-стовпець матриці $\mathbf{A}^*$, тоді, з одного боку, скориставшись властивістю стовпцевого визначника [1, теорема 2.5], одержимо

$$\det(t\mathbf{I}+\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{\bullet i}(\mathbf{b}_{\bullet i}) = \operatorname{cdet}_i(t\mathbf{I}+\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{\bullet i}(\mathbf{b}_{\bullet i}) =$$

$$= \sum_\ell \operatorname{cdet}_i(t\mathbf{I}+\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{\bullet \ell}(\mathbf{a}^*_{\bullet\ell} a_{\ell i}) = \sum_\ell \operatorname{cdet}_i(t\mathbf{I}+\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{\bullet i}(\mathbf{a}^*_{\bullet\ell})\cdot a_{\ell i}.$$

З іншого боку, для всіх $k = 1,\dots,n-1$, змінивши порядок підсумовування, маємо

$$d_k = \sum_{\beta\in J_{k,n}\{i\}} \det(\mathbf{A}^*\mathbf{A})_\beta^\beta = \sum_{\beta\in J_{k,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i(\mathbf{A}^*\mathbf{A})_\beta^\beta =$$

$$= \sum_{\beta\in J_{k,n}\{i\}} \sum_\ell \operatorname{cdet}_i\left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{\bullet i}(\mathbf{a}^*_{\bullet\ell} a_{\ell i})\right)_\beta^\beta =$$

$$= \sum_\ell \left(\sum_{\beta\in J_{k,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i\left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{\bullet i}(\mathbf{a}^*_{\bullet\ell})\right)_\beta^\beta \right)\cdot a_{\ell i}.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при $a_{\ell i}$ для $\ell = j$, отримаємо рівність (3). Лему доведено. ◊

Теорема 5. *Нехай* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}_r^{m\times n}$. *Тоді довільний елемент її узагальненої оберненої матриці Мура – Пенроуза* $\mathbf{A}^+ = (a_{ij}^+) \in \mathbb{H}^{n\times m}$ *для всіх* $i = 1,\dots,n$ *та* $j = 1,\dots,m$ *зображується у вигляді*

$$a_{ij}^+ = \frac{\sum_{\beta\in J_{r,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i\left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{\bullet i}(\mathbf{a}^*_{\bullet j})\right)_\beta^\beta}{\sum_{\beta\in J_{r,n}} \left|(\mathbf{A}^*\mathbf{A})_\beta^\beta\right|} \tag{4}$$

або

$$a_{ij}^+ = \frac{\sum_{\alpha\in I_{r,m}\{j\}} \operatorname{rdet}_j\left((\mathbf{A}\mathbf{A}^*)_{j\bullet}(\mathbf{a}^*_{i\bullet})\right)_\alpha^\alpha}{\sum_{\alpha\in I_{r,m}} \left|(\mathbf{A}\mathbf{A}^*)_\alpha^\alpha\right|}. \tag{5}$$

Д о в е д е н н я. Спочатку доведемо виконання формули (4). За лемою 3 маємо $\mathbf{A}^{+} = \lim\limits_{\alpha\to 0}(\alpha\mathbf{I} + \mathbf{A}^{*}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^{*}$. Матриця $(\alpha\mathbf{I} + \mathbf{A}^{*}\mathbf{A}) \in \mathbb{H}^{n\times n}$ є ермітовою матрицею повного рангу, тоді [1, теорема 5.1] для неї можна побудувати обернену матрицю, зобразивши її як ліву обернену. Тому маємо

$$(\alpha\mathbf{I} + \mathbf{A}^{*}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^{*} =$$

$$= \frac{1}{\det(\alpha\mathbf{I} + \mathbf{A}^{*}\mathbf{A})}\begin{Vmatrix} \sum\limits_{k=1}^{n} L_{k1}a_{k1}^{*} & \sum\limits_{k=1}^{n} L_{k1}a_{k2}^{*} & \dots & \sum\limits_{k=1}^{n} L_{k1}a_{km}^{*} \\ \sum\limits_{k=1}^{n} L_{k2}a_{k1}^{*} & \sum\limits_{k=1}^{n} L_{k2}a_{k2}^{*} & \dots & \sum\limits_{k=1}^{n} L_{k2}a_{km}^{*} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum\limits_{k=1}^{n} L_{kn}a_{k1}^{*} & \sum\limits_{k=1}^{n} L_{k1}a_{k2}^{*} & \dots & \sum\limits_{k=1}^{n} L_{k1}a_{km}^{*} \end{Vmatrix},$$

де L_{ij} – ліве алгебричне доповнення відповідного елемента матриці $\alpha\mathbf{I} + \mathbf{A}^{*}\mathbf{A}$. Використавши означення лівого алгебричного доповнення, одержимо

$$\mathbf{A}^{+} = \lim_{\alpha\to 0}\begin{Vmatrix} \frac{\mathrm{cdet}_1(\alpha\mathbf{I} + \mathbf{A}^{*}\mathbf{A})_{.1}(\mathbf{a}_{.1}^{*})}{\det(\alpha\mathbf{I} + \mathbf{A}^{*}\mathbf{A})} & \dots & \frac{\mathrm{cdet}_1(\alpha\mathbf{I} + \mathbf{A}^{*}\mathbf{A})_{.1}(\mathbf{a}_{.m}^{*})}{\det(\alpha\mathbf{I} + \mathbf{A}^{*}\mathbf{A})} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\mathrm{cdet}_n(\alpha\mathbf{I} + \mathbf{A}^{*}\mathbf{A})_{.n}(\mathbf{a}_{.1}^{*})}{\det(\alpha\mathbf{I} + \mathbf{A}^{*}\mathbf{A})} & \dots & \frac{\mathrm{cdet}_n(\alpha\mathbf{I} + \mathbf{A}^{*}\mathbf{A})_{.n}(\mathbf{a}_{.m}^{*})}{\det(\alpha\mathbf{I} + \mathbf{A}^{*}\mathbf{A})} \end{Vmatrix}. \qquad (6)$$

За теоремою 3 маємо $\det(\alpha\mathbf{I} + \mathbf{A}^{*}\mathbf{A}) = \alpha^{n} + d_1\alpha^{n-1} + d_2\alpha^{n-2} + \ldots + d_n$, де $d_k = \sum\limits_{\beta\in J_{k,n}} \left|(\mathbf{A}^{*}\mathbf{A})_{\beta}^{\beta}\right|$ – сума головних мінорів порядку k для всіх $k = 1,\ldots,n-1$ матриці $\mathbf{A}^{*}\mathbf{A}$, а $d_n = \det\mathbf{A}^{*}\mathbf{A}$. Оскільки $\mathrm{rank}\,\mathbf{A}^{*}\mathbf{A} = \mathrm{rank}\,\mathbf{A} = r$, то $d_n = = d_{n-1} = \ldots = d_{r+1} = 0$ [1, теорема 6.6], тому $\det(\alpha\mathbf{I} + \mathbf{A}^{*}\mathbf{A}) = \alpha^{n} + d_1\alpha^{n-1} + + d_2\alpha^{n-2} + \ldots + d_r\alpha^{n-r}$.

У свою чергу, для всіх $i = 1,\ldots,n$ та $j = 1,\ldots,m$ за лемою 7 маємо

$$\mathrm{cdet}_i(\alpha\mathbf{I} + \mathbf{A}^{*}\mathbf{A})_{.i}(\mathbf{a}_{.j}^{*}) = \mathrm{c}_1^{(ij)}\,\alpha^{n-1} + \mathrm{c}_2^{(ij)}\,\alpha^{n-2} + \ldots + \mathrm{c}_n^{(ij)},$$

де

$$\mathrm{c}_k^{(ij)} = \sum_{\beta\in J_{k,n}\{i\}} \mathrm{cdet}_i\left((\mathbf{A}^{*}\mathbf{A})_{.i}(\mathbf{a}_{.j}^{*})\right)_{\beta}^{\beta} \qquad \text{для всіх} \quad k = 1,\ldots,n-1,$$

$$\mathrm{c}_n^{(ij)} = \mathrm{cdet}_i(\mathbf{A}^{*}\mathbf{A})_{.i}(\mathbf{a}_{.j}^{*}).$$

Покажемо, що $\mathrm{c}_k^{(ij)} = 0$ при $k \ge r+1$ для всіх $i = 1,\ldots,n$ та $j = 1,\ldots,m$. Оскільки згідно з лемою 5 $\mathrm{rank}(\mathbf{A}^{*}\mathbf{A})_{.i}(\mathbf{a}_{.j}^{*}) \le r$, то матриця $(\mathbf{A}^{*}\mathbf{A})_{.i}(\mathbf{a}_{.j}^{*})$ має не більше ніж r лінійно незалежних справа стовпців. Розглянемо матрицю $\left((\mathbf{A}^{*}\mathbf{A})_{.i}(\mathbf{a}_{.j}^{*})\right)_{\beta}^{\beta}$ при $\beta \in J_{k,n}\{i\}$, тобто головну підматрицю порядку $k \ge r+1$ матриці $(\mathbf{A}^{*}\mathbf{A})_{.i}(\mathbf{a}_{.j}^{*})$. Викресливши її i-й рядок та i-й стовпець, одержимо головну підматрицю порядку $k-1$ матриці $\mathbf{A}^{*}\mathbf{A}$, яка є ермітовою. Позначимо її через $\mathbf{M}$. Можливі такі випадки.

Якщо $k = r + 1$, то може бути, що $\operatorname{rank}\mathbf{M} = r$ і $\det\mathbf{M} \neq 0$, тоді всі стовпці $\mathbf{M}$ є лінійно незалежними. Доповнення їх за однією компонентою до стовпців матриці $\left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.i}(\mathbf{a}^*_{.j})\right)^{\beta}_{\beta}$ збереже їх лінійну незалежність справа. Отже, вони будуть базисними в матриці $\left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.i}(\mathbf{a}^*_{.j})\right)^{\beta}_{\beta}$. Тоді [1, теорема 6.4] її i-й стовпець можна виразити через праву лінійну комбінацію базисних стовпців. Звідси [1, теорема 4.6], $\operatorname{cdet}_i\left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.i}(\mathbf{a}^*_{.j})\right)^{\beta}_{\beta} = 0$ при $\beta \in J_{k,n}\{i\}$.

Якщо $k = r + 1$ і $\det\mathbf{M} = 0$, тоді $p < k$ і p стовпців є базисними в матриці $\mathbf{M}$, а отже, і в $\left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.i}(\mathbf{a}^*_{.j})\right)^{\beta}_{\beta}$. Тоді знову $\operatorname{cdet}_i\left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.i}(\mathbf{a}^*_{.j})\right)^{\beta}_{\beta} = 0$ [1, теореми 6.4 і 4.6].

Якщо ж $k > r + 1$, тоді $\det\mathbf{M} = 0$ [1, теорема 6.6] і p, $p < k - 1$, стовпців є базисними в матриці $\mathbf{M}$, а отже, і в $\left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.i}(\mathbf{a}^*_{.j})\right)^{\beta}_{\beta}$. Тоді знову $\operatorname{cdet}_i\left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.i}(\mathbf{a}^*_{.j})\right)^{\beta}_{\beta} = 0$.

Таким чином, у всіх випадках $\operatorname{cdet}_i\left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.i}(\mathbf{a}^*_{.j})\right)^{\beta}_{\beta} = 0$, коли $\beta \in J_{k,n}\{i\}$ при $r + 1 \le k < n$. Звідси $c_k^{(ij)} = \sum\limits_{\beta \in J_{k,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i\left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.i}(\mathbf{a}^*_{.j})\right)^{\beta}_{\beta} = 0$, якщо $r + 1 \le k < n$, та $c_n^{(ij)} = \operatorname{cdet}_i(\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.i}(\mathbf{a}^*_{.j}) = 0$ при всіх $i = 1,\dots,n$ і $j = 1,\dots,m$.

Отже,

$$\operatorname{cdet}_i(\alpha\mathbf{I} + \mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.i}(\mathbf{a}^*_{.j}) = c_1^{(ij)}\alpha^{n-1} + c_2^{(ij)}\alpha^{n-2} + \dots + c_r^{(ij)}\alpha^{n-r}.$$

Підставивши ці значення у матрицю з формули (6), одержимо

$$\mathbf{A}^+ = \lim_{\alpha\to 0}\begin{Vmatrix} \dfrac{c_1^{(11)}\alpha^{n-1} + \dots + c_r^{(11)}\alpha^{n-r}}{\alpha^n + d_1\alpha^{n-1} + \dots + d_r\alpha^{n-r}} & \dots & \dfrac{c_1^{(1m)}\alpha^{n-1} + \dots + c_r^{(1m)}\alpha^{n-r}}{\alpha^n + d_1\alpha^{n-1} + \dots + d_r\alpha^{n-r}} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{c_1^{(n1)}\alpha^{n-1} + \dots + c_r^{(n1)}\alpha^{n-r}}{\alpha^n + d_1\alpha^{n-1} + \dots + d_r\alpha^{n-r}} & \dots & \dfrac{c_1^{(nm)}\alpha^{n-1} + \dots + c_r^{(nm)}\alpha^{n-r}}{\alpha^n + d_1\alpha^{n-1} + \dots + d_r\alpha^{n-r}} \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} \dfrac{c_r^{(11)}}{d_r} & \dots & \dfrac{c_r^{(1m)}}{d_r} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{c_r^{(n1)}}{d_r} & \dots & \dfrac{c_r^{(nm)}}{d_r} \end{Vmatrix}.$$

Тут $c_r^{(ij)} = \sum\limits_{\beta \in J_{r,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i\left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.i}(\mathbf{a}^*_{.j})\right)^{\beta}_{\beta}$ та $d_r = \sum\limits_{\beta \in J_{r,n}} \left|(\mathbf{A}^*\mathbf{A})^{\beta}_{\beta}\right|$. Таким чином, одержали визначникове зображення матриці $\mathbf{A}^+$ формулою (4).

Аналогічно можна довести визначникове зображення матриці $\mathbf{A}^+$ формулою (5). Теорему доведено. ◊

Зауваження 1. Якщо $\operatorname{rank}\mathbf{A} = n$, то згідно з наслідком 1 маємо $\mathbf{A}^+ = (\mathbf{A}^*\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^*$. Розглянувши ермітову матрицю $(\mathbf{A}^*\mathbf{A})^{-1}$ як ліву обернену [1, теорема 5.1], одержимо $\mathbf{A}^+ = \begin{Vmatrix} \dfrac{\operatorname{cdet}_i(\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.i}(\mathbf{a}^*_{.j})}{\det(\mathbf{A}^*\mathbf{A})} \end{Vmatrix}_{n\times m}$. Якщо при цьому

$m > n$, то матриця $(\mathbf{AA}^*)^{-1}$ є матрицею неповного рангу і на підставі теореми 5 для $\mathbf{A}^+$ виконується ще й формула (4).

Зауваження 2. Якщо $\operatorname{rank}\mathbf{A} = m$, то за наслідком 1 $\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^*(\mathbf{AA}^*)^{-1}$. Розглянувши ермітову матрицю $(\mathbf{AA}^*)^{-1}$ як праву обернену [1, теорема 5.1], одержимо $\mathbf{A}^+ = \left\| \dfrac{\operatorname{rdet}_j(\mathbf{AA}^*)_{j.}(\mathbf{a}^*_{i.})}{\det(\mathbf{AA}^*)} \right\|_{n\times m}$. Оскільки при умові $m < n$ матриця $(\mathbf{AA}^*)^{-1}$ є неповного рангу, то очевидно, що в цьому випадку виконується ще й формула (5).

Зауваження 3. У випадку, коли матриця $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$ є комплексною, то одержуємо такі аналоги формул (4) і (5):

$$a^+_{ij} = \frac{\sum\limits_{\beta\in J_{r,n}\{i\}} \left|\left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.i}\,\mathbf{a}^*_{.j}\right)^{\beta}_{\beta}\right|}{\sum\limits_{\beta\in J_{r,n}} \left|(\mathbf{A}^*\mathbf{A})^{\beta}_{\beta}\right|}, \qquad a^+_{ij} = \frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{r,m}\{j\}} \left|\left((\mathbf{AA}^*)_{j.}\,\mathbf{a}^*_{i.}\right)^{\alpha}_{\alpha}\right|}{\sum\limits_{\alpha\in I_{r,m}} \left|(\mathbf{AA}^*)^{\alpha}_{\alpha}\right|}$$

для всіх $i = 1,\ldots,n$ та $j = 1,\ldots,m$. Ці визначникові зображення розкривають лівий і правий аналоги класичної приєднаної матриці в комплексному випадку. На їх основі в роботі [10] також одержано правило Крамера для нормального розв'язку систем лінійних рівнянь над комплексним полем.

1. *Кирчей И. И.* Правило Крамера для кватернионных систем линейных уравнений // Фундам. и прикл. математика. – 2007. – **13**, № 4. – С. 67–94.
2. *Ланкастер П.* Теория матриц. – Москва: Наука, 1978. – 280 с.
3. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. – Москва: Мир, 1989. – 655 с.
4. *Aslaksen H.* Quaternionic determinants // Math. Intelligencer. – 1996. – **18**, No. 3. – P. 57–65.
5. *Baker A.* Right eigenvalues for quaternionic matrices: a topological approach // Linear Algebra and its Appl. – 1999. – **286**. – P. 303–309.
6. *Bihan N. L., Mars J.* Singular value decomposition of matrices of quaternions: A new tool for vector-sensor signal processing // Signal Processing. – 2004. – **84**, No. 7. – P. 1177–1199.
7. *Cao Wensheng.* Solvability of a quaternion matrix equation // Appl. Math. J. Chinese Univ. – 2002. – **17**, No. 4. – P. 490–498.
8. *Carl D., Meyer C. D. (Jr.)* Limits and the index of a square matrix // SIAM J. Appl. Math. – 1974. – **26,** No. 3. – P. 506–515.
9. *Chen L.* Definition of determinant and Cramer solutions over quaternion field // Acta Math. Sinica (N. S.). – 1991 – **7**. – P. 171–180.
10. *Kyrchei I. I.* Analogs of the adjoint matrix for generalized inverses and corresponding Cramer rules // Linear and Multilinear algebra. – 2008. – **56**, No. 4. – P. 453–469.
11. *Liping Huang, Wasin So.* On left eigenvalues of a quaternionic matrix // Linear Algebra Appl. – 2001. – **323**. – P. 105–116.
12. *Qing-Wen Wang, Cheng-Kun Li.* Ranks and the least-norm of the general solution to a system of quaternion matrix equations // Linear Algebra Appl. – 2009. – **430**. – P. 1626–1640.
13. *Qing-Wen Wang, Fei-Zhang.* The reflexive re-nonnegative definite solution to a quaternion matrix equation // Electr. J. Linear Algebra. – 2008. – **17**. – P. 88–101.
14. *Qing-Wen Wang, Guang-Jing Song, Chun-Yan Lin.* Rank equalities related to the generalized inverse $\mathbf{A}^{(1,2)}_{T,S}$ with applications // Appl. Math. and Comput. – 2008. – **205**. – P. 370–382.
15. *Shifang Yuan, Anping Liao, Yuan Lei.* Least squares Hermitian solution of the matrix equation $(AXB, CXD) = (E, F)$ with the least norm over the skew field of quaternions // Math. and Comput. Modeling. – 2008. – **48**. – P. 91–100.
16. *Tongsong Jiang, Li Chen.* Algebraic algorithms for least squares problem in quaternionic quantum theory // Comp. Phys. Communic. – 2007. – **176**. – P. 481–485.

17. *Wasin So*. Quaternionic left eigenvalue problem // Southeast Asian Bul. of Math. – 2005. – **29**. – P. 555–565.
18. *Wiegmann N. A*. Some theorems on matrices with real quaternion elements // Canad. J. Math. – 1955. – **7**. – P. 191–201.
19. *Wood R. M. W*. Quaternionic eigenvalues // Bull. Lond. Math. Soc. – 1985. – **17**. – P. 137–138.
20. *Yang Zhongpeng*. The covariance condition of the Moore – Penrose inverse of a quaternion matrix // Northeast. Math. J. – 1989. – **5**, No. 3. – P. 277–282.
21. *Zhang F*. Quaternions and matrices of quaternions // Linear Algebra Appl. – 1997. – **251**. – P. 21–57.
22. *Zhang Wajin*. Involutory functions and generalized inverses matrices over an arbitrary skew field // Northeast. Math. J. – 1987. – **3,** No. 1. – P. 57–66.

ДЕТЕРМИНАНТНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ОБОБЩЁННОЙ ОБРАТНОЙ МАТРИЦЫ МУРА – ПЕНРОУЗА НАД ТЕЛОМ КВАТЕРНИОНОВ

В рамках теории столбцовых и строчных определителей получено детерминантное представление обобщенной обратной матрицы Мура – Пенроуза над телом кватернионов.

DETERMINANTAL REPRESENTATION OF THE GENERALIZED MOORE – PENROSE INVERSE MATRIX OVER THE QUATERNION SKEW FIELD

The determinantal representation of the Moore – Penrose inverse matrix over the quaternion skew field is obtained within the framework of theory of the column and row determinants.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
11.04.09