УДК 517.524

Х. Й. Кучмінська

ПРО ТЕОРЕМИ ТИПУ ВОРПІЦЬКОГО ДЛЯ ДВОВИМІРНОГО НЕПЕРЕРВНОГО ДРОБУ

Для двовимірного неперервного дробу з використанням оцінок залишків такого дробу, формули різниці між двома наближеннями двовимірного неперервного дробу в термінах цих залишків і методу мажорант запропоновано узагальнення теореми збіжності Ворпіцького. Для дробів, що задовольняють умови узагальнених теорем Ворпіцького, отримано також оцінки швидкості збіжності.

1. Вступ. Теорема Ворпіцького, сформульована та доведена ще у 1865 р., є однією з основних класичних ознак збіжності неперервного дробу, її дослідження та застосування актуальні ще до сьогодні [4, 5, 8]. Узагальнення теореми Ворпіцького на випадок гіллястих ланцюгових дробів запропоновано Д. І. Боднаром [2], гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними – О. Є. Баран [1], на випадок двовимірних неперервних дробів – Х. Й. Кучмінською [6, 7] і О. М. Сусь [3]. Основним поняттям, що використовуватиметься в наших дослідженнях, є послідовність залишків неперервних і двовимірних неперервних дробів, яка є корисним інструментом як у сучасній теорії неперервних дробів, так і в їх багатовимірних узагальненнях [1–3, 6–8].

Розглянемо двовимірний неперервний дріб (ДНД)

$$\frac{1}{\Phi_0 + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{i=1}^{\infty} \dfrac{c_{i,i}}{\Phi_i}}, \qquad \Phi_i = 1 + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=1}^{\infty} \frac{c_{i+j,i}}{1} + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=1}^{\infty} \frac{c_{i,i+j}}{1}, \tag{1}$$

де $c_{i,i}$, $c_{i,j}$, $c_{i,j} \ne 0$, – комплексні (дійсні) числа або функції.

Наведемо основні означення. Скінченний двовимірний неперервний дріб

$$f_n := \frac{A_n}{B_n} = \mathop{\mathrm{D}}\limits_{i=0}^{n-1} \frac{c_{i,i}}{\Phi_i^{(n-1-i)}}, \qquad c_{0,0} = 1, \qquad n = 1,2,\ldots, \tag{2}$$

$$\Phi_i^{(m)} := 1 + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=1}^{m} \frac{c_{i+j,i}}{1} + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=1}^{m} \frac{c_{i,i+j}}{1}, \qquad \Phi_i^{(0)} = 1, \tag{3}$$

де $c_{i,i}, c_{i,j} \in \mathbb{C}$, називають n-м наближенням або n-м підхідним дробом ДНД (1), а A_n і B_n – відповідно чисельником і знаменником n-го наближення f_n або n-м підхідним чисельником і n-м підхідним знаменником.

Скінченні звичайні неперервні дроби

$$Q_{i+k,i}^{(0)} := 1, \quad Q_{i+k,i}^{(m+1)} := 1 + \frac{c_{i+k+1,i}}{Q_{i+k+1,i}^{(m)}}, \qquad i,m = 0,1,\ldots, \qquad k = 1,2,\ldots,$$

$$Q_{i,i+k}^{(0)} := 1, \quad Q_{i,i+k}^{(m+1)} =: 1 + \frac{c_{i,i+k+1}}{Q_{i,i+k+1}^{(m)}}, \qquad i,m = 0,1,\ldots, \qquad k = 1,2,\ldots, \tag{4}$$

називають одновимірними залишками скінченного дробу (3), а двовимірний неперервний дріб

$$Q_i^{(0)} := 1,$$

$$Q_i^{(m+1)} := 1 + \frac{c_{i+1,i}}{Q_{i+1,i}^{(m)}} + \frac{c_{i,i+1}}{Q_{i,i+1}^{(m)}} + \frac{a_{i+1,i+1}}{Q_{i+1}^{(m)}}, \qquad i,m = 0,1,\ldots, \tag{5}$$

називають загальним i-м залишком ДНД (2).

Для різниці між n-м і m-м наближеннями ДНД (1) справджується формула [6, 7]

$$f_n - f_m = \sum_{i=0}^{m-1} \frac{(-1)^i \left(\Phi_i^{(m-1-i)} - \Phi_i^{(n-1-i)}\right) \prod_{j=0}^{i} c_{j,j}}{\prod_{j=0}^{i} Q_j^{(n-1-j)} Q_j^{(m-1-j)}} +$$

$$+ \frac{(-1)^m \prod_{j=0}^{m} c_{j,j}}{\prod_{j=0}^{m-1} Q_j^{(n-1-j)} Q_j^{(m-1-j)}} \cdot \frac{1}{Q_m^{(n-1-m)}} . \tag{6}$$

Для ДНД (1) встановлено [6] ознаку типу Ворпіцького при умові, що для всіх $c_{i,j}$ виконується

$$\left| c_{i,j} \right| \le \frac{1}{2} t(1-t), \qquad 0 \le t \le \frac{1}{2}.$$

Сформулюємо інші узагальнення теореми Ворпіцького для двовимірних неперервних дробів і встановимо оцінки швидкості збіжності.

2. Основні результати. Узагальнення ознаки збіжності типу Ворпіцького дозволить розширити області збіжності двовимірних неперервних дробів, у які розвиваються функції двох змінних, а також, можливо, знайти відмінності цих узагальнень у термінах інших підходів до збіжності неперервних дробів, наприклад, геометричного [4].

Теорема 1. *Нехай елементи двовимірного неперервного дробу* (1) *задовольняють умови*

$$\left| c_{i+1,i} \right| + \left| c_{i,i+1} \right| + \left| c_{i+1,i+1} \right| \le \alpha = t(1-t) \le \frac{1}{4},$$

$$\left| c_{i+j,i} \right| \le \alpha \le t(1-t) \le \frac{1}{4},$$

$$\left| c_{i,i+j} \right| \le \alpha = t(1-t) \le \frac{1}{4}, \qquad j \ge 2, \qquad 0 \le t \le \frac{1}{2}. \tag{7}$$

Тоді

1°) двовимірний неперервний дріб (1) *абсолютно збіжний*;

2°) справджуються оцінки швидкості збіжності

$$\left| f - f_m \right| \le \frac{2}{1-\sqrt{1-4\alpha}} \cdot \frac{(1-q)q^m}{1-q^{m+1}}, \qquad m \ge 1, \qquad 0 \le \alpha < \frac{1}{4}, \tag{8}$$

$$\left| f - f_m \right| \le \frac{2}{m+1}, \qquad m \ge 1, \qquad \alpha = \frac{1}{4}, \tag{9}$$

де f – значення нескінченного ДНД (1), *f_m – його m-не наближення, $q = \dfrac{1-\sqrt{1-4\alpha}}{1+\sqrt{1-4\alpha}}$*;

3°) значення ДНД (1) *і всіх його наближень належать області*

$$\left| \left(\alpha + \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1-4\alpha}\,\right) \right) z - 1 \right| \le \frac{1}{2}\left(1-\sqrt{1-4\alpha}\,\right); \tag{10}$$

4°) гранична стала $\alpha = \frac{1}{4}$ є найкращою, її не можна збільшити, а відповідну область значень (10) *не можна зменшити.*

Д о в е д е н н я. Для ДНД (1) можна записати мажорантний дріб

$$\frac{1}{\hat{\Phi}_0 + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{i=1}^{\infty} \frac{-|c_{i,i}|}{\hat{\Phi}_i}}, \qquad \hat{\Phi}_i = 1 + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=1}^{\infty} \frac{-|c_{i+j,i}|}{1} + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=1}^{\infty} \frac{-|c_{i,i+j}|}{1}, \tag{11}$$

що означає, що наближення цих дробів задовольняють співвідношення $|f_n - f_m| \le M|g_n - g_m|$, де g_n − n-не наближення ДНД (11) і M − довільна стала, m, n − натуральні числа.

Дійсно, позначивши залишки ДНД (11)

$$\hat{Q}_{i+k,i}^{(0)} := 1, \quad \hat{Q}_{i+k,i}^{(m+1)} := 1 - \frac{|c_{i+k+1,i}|}{\hat{Q}_{i+k+1,i}^{(m)}}, \qquad i, m = 0, 1, \ldots, \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

$$\hat{Q}_{i,i+k}^{(0)} := 1, \quad \hat{Q}_{i,i+k}^{(m+1)} =: 1 - \frac{|c_{i,i+k+1}|}{\hat{Q}_{i,i+k+1}^{(m)}}, \qquad i, m = 0, 1, \ldots, \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

$$\hat{Q}_i^{(0)} := 1, \quad \hat{Q}_i^{(m+1)} := 1 - \frac{|c_{i+1,i}|}{\hat{Q}_{i+1,i}^{(m)}} - \frac{|c_{i,i+1}|}{\hat{Q}_{i,i+1}^{(m)}} - \frac{|c_{i+1,i+1}|}{\hat{Q}_{i+1}^{(m)}}, \qquad i, m = 0, 1, \ldots,$$

методом повної математичної індукції неважко довести, що

$$\left|Q_i^{(n-1-i)}\right| \ge \hat{Q}_i^{(n-1-i)} \ge h_{n-1-i},$$

$$\left|Q_{i+k,i}^{(n-1-i-k)}\right| \ge \hat{Q}_{i+k,i}^{(n-1-i-k)} \ge h_{n-1-i-k},$$

$$\left|Q_{i,i+k}^{(n-1-i-k)}\right| \ge \hat{Q}_{i,i+k}^{(n-1-i-k)} \ge h_{n-1-i-k}, \qquad i = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{12}$$

де h_m − m-не наближення неперервного дробу

$$1 - \frac{t(1-t)}{1} - \frac{t(1-t)}{1} - \ldots .$$

Доведемо другу з нерівностей (12). Покладемо $k = n-1-i$ та $k = n-2-i$. Тоді матимемо

$$\left|Q_{n-1,i}^{(0)}\right| = 1 = \hat{Q}_{n-1,i}^{(0)} = h_0,$$

$$\left|Q_{n-2,i}^{(1)}\right| = \left|1 + \frac{c_{n-1,i}}{Q_{n-1,i}^{(0)}}\right| \ge 1 - \frac{|c_{n-1,i}|}{\hat{Q}_{n-1,i}^{(0)}} = \hat{Q}_{n-2,i}^{(1)} \ge 1 - \frac{t(1-t)}{1} = h_1.$$

Припустимо, що друга нерівність (12) справджується для $k = m+1$ та доведемо її виконання для $k = m$:

$$\left|Q_{i+m,i}^{(n-1-i-m)}\right| = \left|1 + \frac{c_{i+m+1,i}}{Q_{i+m+1,i}^{(n-2-i-m)}}\right| \ge 1 - \frac{|c_{i+m+1,i}|}{\hat{Q}_{i+m+1,i}^{(n-2-i-m)}} =$$

$$= \hat{Q}_{i+m,i}^{(n-1-i-m)} \ge 1 - \frac{t(1-t)}{\hat{Q}_{i+m+1,i}^{(n-2-i-m)}} = h_{n-1-m-i}.$$

Аналогічно можна довести й третю з нерівностей (12).

Для першої нерівності (12) при $i = n-1$ маємо $\left|Q_{n-1}^{(0)}\right| = 1 = \hat{Q}_{n-1}^{(0)} = h_0 > 0$. Припускаючи, що ця нерівність є правильною для $i = k+1$, доведемо її для $i = k$:

$$\left|Q_k^{(n-1-k)}\right| = \left|1 + \frac{c_{k+1,k}}{Q_{k+1,k}^{(n-2-k)}} + \frac{c_{k,k+1}}{Q_{k,k+1}^{(n-2-k)}} + \frac{c_{k+1,k+1}}{Q_{k+1}^{(n-2-k)}}\right| \geq$$

$$\geq 1 - \frac{\left|c_{k+1,k}\right|}{\hat{Q}_{k+1,k}^{(n-2-k)}} - \frac{\left|c_{k,k+1}\right|}{\hat{Q}_{k,k+1}^{(n-2-k)}} - \frac{\left|c_{k+1,k+1}\right|}{\hat{Q}_{k+1}^{(n-2-k)}} = \hat{Q}_k^{(n-1-k)} \geq$$

$$\geq 1 - \frac{\left|c_{k+1,k}\right|}{h_{n-2-k}} - \frac{\left|c_{k,k+1}\right|}{h_{n-2-k}} - \frac{\left|c_{k+1,k+1}\right|}{h_{n-2-k}} \geq h_{n-1-k}.$$

Щоб оцінити зверху різницю $\left|\Phi_k^{(m-1-k)} - \Phi_k^{(n-1-k)}\right|$, використаємо формулу різниці між наближеннями для неперервних дробів [7] при $n > m$:

$$\Phi_k^{(m-1-k)} - \Phi_k^{(n-1-k)} = \frac{(-1)^{m-k} \prod\limits_{i=1}^{m-k} c_{k+i,k}}{\prod\limits_{i=1}^{m-1-k} Q_{k+i,k}^{(m-1-i-k)} Q_{k+i,k}^{(n-1-i-k)}} \cdot \frac{1}{Q_{m,k}^{(n-1-m)}} +$$

$$+ \frac{(-1)^{m-k} \prod\limits_{i=1}^{m-k} c_{k,k+i}}{\prod\limits_{i=1}^{m-1-k} Q_{k,k+i}^{(m-1-i-k)} Q_{k,k+i}^{(n-1-ik)}} \cdot \frac{1}{Q_{k,m}^{(n-1-m)}}.$$

Тоді знаходимо

$$\left|\Phi_k^{(m-1-k)} - \Phi_k^{(n-1-k)}\right| \leq \frac{\prod\limits_{i=1}^{m-k} \left|c_{k+i,k}\right|}{\prod\limits_{i=1}^{m-1-k} \left|Q_{k+i,k}^{(m-1-i-k)}\right| \left|Q_{k+i,k}^{(n-1-i-k)}\right|} \cdot \frac{1}{\left|Q_{m,k}^{(n-1-m)}\right|} +$$

$$+ \frac{\prod\limits_{i=1}^{m-k} \left|c_{k,k+i}\right|}{\prod\limits_{i=1}^{m-1-k} \left|Q_{k,k+i}^{(m-1-i-k)}\right| \left|Q_{k,k+i}^{(n-1-i-k)}\right|} \cdot \frac{1}{\left|Q_{k,m}^{(n-1-m)}\right|} \leq$$

$$\leq \frac{(-1)^{m-k} \prod\limits_{i=1}^{m-k} \left(-\left|c_{k+i,k}\right|\right)}{\prod\limits_{i=1}^{m-1-k} \hat{Q}_{k+i,k}^{(m-1-i-k)} \hat{Q}_{k+i,k}^{(n-1-i-k)}} \cdot \frac{1}{\hat{Q}_{m,k}^{(n-1-m)}} +$$

$$+ \frac{(-1)^{m-k} \prod\limits_{i=1}^{m-k} \left(-\left|c_{k,k+i}\right|\right)}{\prod\limits_{i=1}^{m-1-k} \hat{Q}_{k,k+i}^{(m-1-i-k)} \hat{Q}_{k,k+i}^{(n-1-i-k)}} \cdot \frac{1}{\hat{Q}_{k,m}^{(n-1-m)}} =$$

$$= \hat{\Phi}_k^{(m-1-k)} - \hat{\Phi}_k^{(n-1-k)}, \qquad k = 0,1,\ldots,m-1.$$

Запишемо формулу різниці між n-м і m-м наближеннями ДНД (1), (11) вигляду (6) і отримаємо, що

$$\left|f_n - f_m\right| \leq \sum_{i=0}^{m-1} \frac{(-1)^{i+1} \left(\hat{\Phi}_i^{(m-1-i)} - \hat{\Phi}_i^{(n-1-i)}\right) \prod\limits_{j=0}^{i} \left(-\left|c_{j,j}\right|\right)}{\prod\limits_{j=0}^{i} \hat{Q}_j^{(n-1-j)} \hat{Q}_j^{(m-1-j)}} +$$

$$+\frac{(-1)^{m+1}\prod\limits_{j=0}^{m}\left(-\left|c_{j,j}\right|\right)}{\prod\limits_{j=0}^{m-1}\hat{Q}_j^{(n-1-j)}\hat{Q}_j^{(m-1-j)}}\cdot\frac{1}{\hat{Q}_m^{(n-1-m)}}=g_n-g_m\,.$$

Покажемо, що при виконанні умов теореми мажорантою ДНД (11) буде періодичний неперервний дріб

$$\frac{1}{1}\;-\;\frac{t(1-t)}{1}\;-\;\frac{t(1-t)}{1}\;-\;\ldots\;. \tag{13}$$

Позначивши через P_n, Q_n, $q_n = P_n/Q_n$ відповідно n-й чисельник, n-й знаменник і n-не наближення дробу (13), маємо [2]

$$Q_n = \sum_{i=0}^{n} t^i (1-t)^{n-i}, \qquad P_n = Q_{n-1}\,.$$

Записавши для наближень неперервного дробу (13) формулу різниці

$$q_n - q_m = \frac{t^m (1-t)^m}{\prod\limits_{i=0}^{m-1} h_{n-i-1} h_{m-i-1} h_{n-m-1}}$$

та враховуючи нерівності (12) і формулу різниці для ДНД (11), отримаємо

$$g_n - g_m \le \frac{t^m (1-t)^m}{\prod\limits_{i=0}^{m} h_{n-i-1} \prod\limits_{i=0}^{m-1} h_{m-i-1}} = q_n - q_m\,.$$

Отже, неперервний дріб (13) мажорує ДНД (11), а тому є мажорантою і для ДНД (1). Періодичний неперервний дріб (13) при $0 \le t \le 1/2$ є збіжним, звідки випливає і збіжність ДНД (1).

Оскільки $h_k = q_{k+1}^{-1} = \dfrac{Q_{k+1}}{Q_k}$, то відразу матимемо, що

$$q_n - q_m = \frac{t^m (1-t)^m Q_{n-m-1}}{Q_n Q_m}\,,$$

тобто

$$\left|f_n - f_m\right| \le \frac{t^m (1-t)^m Q_{n-m-1}}{Q_n Q_m}\,. \tag{14}$$

При $t = 1/2$ маємо $Q_k = 2^{-k}(k+1)$. Якщо ж $0 \le t < 1/2$, то

$$Q_k = \left((1-t)^{k+1} - t^{k+1}\right)(1-2t)^{-1}\,,$$

і оцінку (14) відповідно запишемо так:

$$\left|f_n - f_m\right| \le \frac{(1-2t)t^m (1-t)^m \left((1-t)^{n-m} - t^{n-m}\right)}{\left((1-t)^{n+1} - t^{n+1}\right)\left((1-t)^{m+1} - t^{m+1}\right)}, \qquad 0 \le t < \frac{1}{2}, \tag{15}$$

$$\left|f_n - f_m\right| \le \frac{2(n-m)}{(m+1)(n+1)}, \qquad t = \frac{1}{2}\,. \tag{16}$$

З рівності $\alpha = t(1-t)$ маємо $t = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{1-4\alpha}\right)$ і, перейшовши до границі при $n \to \infty$ в нерівностях (15), (16), отримуємо оцінки (8), (9) швидкості збіжності.

Доведемо твердження *3°*) теореми. Запишемо n-не наближення ДНД (1) у вигляді

$$z = \cfrac{1}{1 + \cfrac{c_{1,0}}{Q_{1,0}^{(n-2)}} + \cfrac{c_{0,1}}{Q_{0,1}^{(n-2)}} + \cfrac{c_{1,1}}{Q_{1}^{(n-2)}}} = \frac{1}{1+w}.$$

З нерівностей (12) та умов (7) випливає, що

$$|w| \le \frac{t(1-t)}{h_{n-2}} = t(1-t)q_{n-1}.$$

Якщо Q − значення нескінченного дробу (13), то, враховуючи, що $Q_n > 0$, $n = 1, 2, \dots$, маємо

$$q_n - q_{n-1} = \frac{(-1)^{n+1}(-t(1-t))^{n-1}}{Q_n Q_{n-1}} \ge 0,$$

тобто послідовність $\{q_n\}$ монотонно зростає. Отже, $|w| \le t(1-t)Q$. Оскільки $Q = (1 - t(1-t)Q)^{-1}$, то, розв'язуючи квадратне рівняння відносно Q, отримаємо $Q = (1-t)^{-1}$. Тому $\left|\frac{1-z}{z}\right| = |w| \le t$, звідки неважко отримати (10).

Твердження *4°*) теореми доводиться аналогічно до відповідного твердження теореми 3.14 з [2]. ◊

Теорема 2. *Нехай елементи двовимірного неперервного дробу* (1) *задовольняють умови*

$$|c_{i,j}| \le \alpha = \frac{1}{2}t(1-t) \le \frac{1}{8}, \qquad i, j = 0, 1, 2, \dots, \quad 0 \le t \le \frac{1}{2}. \tag{17}$$

Тоді

1°) *двовимірний неперервний дріб* (1) *абсолютно збіжний;*

2°) *справджується оцінка швидкості збіжності*

$$|f - f_m| \le \frac{2A\sqrt{1-8\alpha}}{1 - 6\alpha + \sqrt{(1-4\alpha)(1-8\alpha)}} \cdot \frac{q^m}{1-q^{m+1}}, \quad m \ge 1, \quad 0 \le \alpha < \frac{1}{8}, \tag{18}$$

$$|f - f_m| \le A\frac{2\sqrt{2}}{m+1}, \quad m \ge 1, \quad \alpha = \frac{1}{8}, \tag{19}$$

де f − *значення нескінченного ДНД* (1), f_m − *його* m*-не наближення,* $q = \dfrac{\sqrt{1-4\alpha} - \sqrt{1-8\alpha}}{\sqrt{1-4\alpha} + \sqrt{1-8\alpha}}$, A − *абсолютна стала;*

3°) *значення ДНД* (1) *і всіх його наближень належать області*

$$|(1-g^2)z - 1| \le g, \quad g = 1 - \frac{1}{2}\left(\sqrt{1-4\alpha} + \sqrt{1-8\alpha}\right); \tag{20}$$

4°) *гранична стала* $\alpha = \frac{1}{8}$ *є найкращою, її не можна збільшити, а відповідну область значень* (20) *не можна зменшити.*

Д о в е д е н н я. Покажемо, що мажорантою для ДНД (1) при виконанні умов (17) є ДНД

$$\cfrac{1}{\tilde{\Phi}_0 + \displaystyle\mathop{\mathrm{D}}_{i=1}^{\infty} \cfrac{-\frac{1}{2}t(1-t)}{\tilde{\Phi}_i}}, \qquad \tilde{\Phi}_i = 1 - \cfrac{t(1-t)}{1 - \cfrac{\frac{1}{2}t(1-t)}{1 - \ddots}}. \tag{21}$$

Дійсно, методом математичної індукції можна показати, що

$$\left|Q_i^{(n-1-i)}\right| \ge \tilde{Q}_i^{(n-1-i)} \ge -\,t + \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1 - 2t(1-t)}\right),$$

$$\left|\Phi_i^{(n-1-i)}\right| \ge \tilde{\Phi}_i^{(n-1-i)} \ge \sqrt{1 - 2t(1-t)}\,,$$

$$\left|Q_{i+k,i}^{(n-1-i-k)}\right| \ge \; \tilde{Q}_{i+k,i}^{(n-1-i-k)} \ge \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1 - 2t(1-t)}\right), \qquad i = 0,1,\ldots,n-1\,,$$

де

$$\tilde{Q}_i^{(n-1-i)} = \tilde{\Phi}_i^{(n-1-i)} - \frac{\frac{1}{2}t(1-t)}{\tilde{Q}_{i+1}^{(n-2-i)}}\,,$$

$$\tilde{\Phi}_i^{(n-1-i)} = 1 - \frac{t(1-t)}{\tilde{Q}_{i+1,i}^{(n-2-i)}}, \qquad \tilde{Q}_{i+k,i}^{(n-1-i-k)} = 1 - \frac{\frac{1}{2}t(1-t)}{\tilde{Q}_{i+k+1,i}^{(n-2-i-k)}}.$$

Усі $Q_i^{(n-1-i)} \ne 0$, $Q_{i+k,i}^{(n-1-i-k)} \ne 0$, $\tilde{Q}_i^{(n-1-i)} > 0$, $Q_{i+k,i}^{(n-1-i-k)} > 0$, крім того,

$$\left|\Phi_i^{(n-1-i)} - \Phi_i^{(m-1-i)}\right| \le \tilde{\Phi}_i^{(n-1-i)} - \tilde{\Phi}_i^{(m-1-i)}\,,$$

тому, враховуючи формулу різниці між наближеннями ДНД (1) і (21), при $n > m$ матимемо

$$|f_n - f_m| \le \tilde{f}_n - \tilde{f}_m\,, \tag{22}$$

де $\tilde{f}_k$ − k-те наближення (21). Послідовність $\{\tilde{f}_k\}$ зростає монотонно і обмежена зверху, тому її границя при $k \to \infty$ існує і є скінченною, тобто

$$\sum_{k=0}^{m} |f_{k+1} - f_k| \le \sum_{k=0}^{m} \left(\tilde{f}_{k+1} - \tilde{f}_k\right) = \tilde{f}_{m+1}\,,$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} |f_{k+1} - f_k| \le \lim_{m\to\infty} \tilde{f}_{m+1} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\tilde{Q}_0^{(m)}} \le \frac{1}{-t + \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1 - 2t(1-t)}\right)} \le 2\sqrt{2}\,.$$

Отже, ДНД (1) − абсолютно збіжний.

Щоб довести оцінки швидкості збіжності (18), (19) покажемо, що мажорантним дробом для ДНД (21) буде періодичний дріб

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{1-2t(1-t)}}}{1} - \frac{k(1-k)}{1} - \frac{k(1-k)}{1} - \ldots\,, \tag{23}$$

де

$$k = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1-2t}{\sqrt{1-2t(1-t)}}\right).$$

Зауважимо, що $0 \le k \le \frac{1}{2}$ при $0 \le t \le \frac{1}{2}$. Позначивши через P_n, Q_n і $q_n = P_n/Q_n$ відповідно n-й чисельник, n-й знаменник і n-не наближення дробу (23), запишемо

$$Q_n = \sum_{i=0}^{n} k^i (1-k)^{n-i}, \qquad P_n = \frac{1}{\sqrt{1-2t(1-t)}}\,Q_{n-1}\,.$$

Тому $Q_n > 0$ при $0 \le k \le \frac{1}{2}$, а це означає, що й усі $q_n > 0$. Як і при доведенні теореми 1, неважко показати, що всі залишки ДНД (21) задовольняють нерівності

$$\tilde{Q}_i^{(n-1-i)} \ge \sqrt{1-2t(1-t)}\,d_{n-1-i}, \qquad i = 0,1,\ldots,n-1\,,$$

де d_m − m-не наближення неперервного дробу

$$1-\frac{k(1-k)}{1}\;-\;\frac{k(1-k)}{1}\;-\ldots\;.$$

Оскільки $d_m = \dfrac{1}{\sqrt{1-2t(1-t)}}\,q_{m+1}^{-1} > 0$, $d_m = \dfrac{Q_{m+1}}{Q_m}$, то

$$q_n - q_m = \frac{k^m(1-k)^m}{\sqrt{1-2t(1-t)}\prod\limits_{i=0}^{m-1} d_{n-i-1}d_{m-i-1}d_{n-m-1}} = \frac{k^m(1-k)^m Q_{n-m-1}}{\sqrt{1-2t(1-t)}Q_nQ_m}. \quad (24)$$

Враховуючи (22), маємо, що

$$\tilde f_n - \tilde f_m \le \sum_{i=0}^{m-1}\frac{\left(\tilde\Phi_i^{(m-1-i)} - \tilde\Phi_i^{(n-1-i)}\right)\left(\dfrac{t(1-t)}{2}\right)^i}{\prod\limits_{j=0}^{i}(1-2t(1-t))d_{n-j-1}d_{m-j-1}} +$$

$$+\frac{\left(\dfrac{t(1-t)}{2}\right)^m}{(1-2t(1-t))^m\prod\limits_{j=0}^{m-1}d_{m-j-1}\prod\limits_{j=0}^{m}d_{n-j-1}} \le A(q_n - q_m),$$

де A − абсолютна стала. При $t = \dfrac{1}{2}$, $k = \dfrac{1}{2}$ маємо

$$f_n - f_m \le A\,\frac{2\sqrt{2}(n-m)}{(n+1)(m+1)}. \quad (25)$$

Якщо ж $0 \le t < \dfrac{1}{2}$, $0 \le k < \dfrac{1}{2}$, тоді

$$f_n - f_m \le A\cdot 2^{2-m}(1-2t(1-t))^{-m-1}(1-2t)t^m(1-t)^m \times$$

$$\times\left[\left(1+\frac{1-2t}{\sqrt{1-2t(1-t)}}\right)^{n-m} - \left(1-\frac{1-2t}{\sqrt{1-2t(1-t)}}\right)^{n-m}\right]\times$$

$$\times\left\{\left[\left(1+\frac{1-2t}{\sqrt{1-2t(1-t)}}\right)^{n+1} - \left(1-\frac{1-2t}{\sqrt{1-2t(1-t)}}\right)^{n+1}\right]\times\right.$$

$$\left.\times\left[\left(1+\frac{1-2t}{\sqrt{1-2t(1-t)}}\right)^{m+1} - \left(1-\frac{1-2t}{\sqrt{1-2t(1-t)}}\right)^{m+1}\right]\right\}^{-1}. \quad (26)$$

З рівності $\alpha = \dfrac{1}{2}t(1-t)$ маємо $t = \dfrac{1}{2}\left(1-\sqrt{1-8\alpha}\right)$ і, перейшовши до границі при $n\to\infty$ в нерівностях (25), (26), отримуємо оцінки швидкості збіжності.

Твердження **3°**) і ***4°***) доводяться аналогічно, як і в теоремі 1. ◊

Спростимо умову (17) теореми 2.

Теорема 3. *Нехай елементи двовимірного неперервного дробу* (1) *задовольняють умови*

$$\left|c_{i+1,i}\right| + \left|c_{i,i+1}\right| + \left|c_{i+1,i+1}\right| \le \alpha = \frac{1}{2}t(1-t) \le \frac{1}{8},$$

$$\left|c_{i+j,i}\right| \le \alpha \le \frac{1}{2}t(1-t) \le \frac{1}{8},$$

$$\left|c_{i,i+j}\right| \le \alpha = \frac{1}{2}t(1-t) \le \frac{1}{8}, \qquad j \ge 2, \qquad 0 \le t \le \frac{1}{2}. \quad (27)$$

Тоді

1°) двовимірний неперервний дріб (1) *абсолютно збіжний;*

2°) значення ДНД (1) *і всіх його наближень належать області*

$$\left|(1+2\alpha+\sqrt{1-4\alpha})z-4\right| \le 1-\sqrt{1-4\alpha}\ ; \tag{28}$$

3°) гранична стала $\alpha = \dfrac{1}{8}$ *є найкращою, її не можна збільшити, а відповідну область значень* (28) *не можна зменшити.*

Д о в е д е н н я. При виконанні умов теореми неважко показати (подібно, як це доводиться в теоремі 1), що мажорантним дробом для ДНД (1) буде дріб (11), а для ДНД (11) − мажорантним буде дріб

$$\frac{1}{1} - \frac{\frac{1}{2}t(1-t)}{1} - \frac{\frac{1}{2}t(1-t)}{1} - \dots \ . \tag{29}$$

Для залишків ДНД (1) методом математичної індукції можна довести, що виконуються нерівності

$$\left|Q_i^{(n-1-i)}\right| \ge \hat{Q}_i^{(n-1-i)} \ge h_{n-1-i}\,,$$

$$\left|Q_{i+k,i}^{(n-1-i-k)}\right| \ge \hat{Q}_{i+k,i}^{(n-1-i-k)} \ge h_{n-1-i-k}\,,$$

$$\left|Q_{i,i+k}^{(n-1-i-k)}\right| \ge \hat{Q}_{i,i+k}^{(n-1-i-k)} \ge h_{n-1-i-k}\,, \qquad i=0,1,\dots,n-1\,,$$

де h_m − m-не наближення неперервного дробу

$$1 - \frac{\frac{1}{2}t(1-t)}{1} - \frac{\frac{1}{2}t(1-t)}{1} - \dots \ .$$

Дійсно, як і в теоремі 1, маємо

$$\left|Q_{n-1,i}^{(0)}\right| = \left|Q_{i,n-1}^{(0)}\right| = 1 = h_0\,,$$

$$\left|Q_{n-2,i}^{(1)}\right| \ge 1-\frac{1}{2}t(1-t) = h_1\,,$$

$$\left|Q_{i,n-2}^{(1)}\right| \ge 1-\frac{1}{2}t(1-t) = h_1\,,$$

$$\left|Q_{i+k,i}^{(n-1-i-k)}\right| \ge 1-\frac{\left|c_{i+k+1,i}\right|}{\hat{Q}_{i+k+1,i}^{(n-2-i-k)}} \ge 1-\frac{\frac{1}{2}t(1-t)}{h_{n-2-i-k}} \ge h_{n-1-i-k}\,,$$

$$\left|Q_{i,i+k}^{(n-1-i-k)}\right| \ge 1-\frac{\left|c_{i,i+k+1}\right|}{\hat{Q}_{i,i+k+1}^{(n-2-i-k)}} \ge 1-\frac{\frac{1}{2}t(1-t)}{h_{n-2-i-k}} \ge h_{n-1-i-k}\,,$$

$$\left|Q_{n-1}^{(0)}\right| = 1, \quad \left|Q_{n-2}^{(1)}\right| = \left|1+\frac{c_{n-1,n-2}}{1}+\frac{c_{n-2,n-1}}{1}+\frac{c_{n-1,n-1}}{1}\right| \ge$$

$$\ge 1-\frac{\left|c_{n-1,n-2}\right|}{1}-\frac{\left|c_{n-2,n-1}\right|}{1}-\frac{\left|c_{n-1,n-1}\right|}{1} \ge 1-\frac{1}{2}t(1-t) = h_1\,,$$

$$\left|Q_i^{(n-1-i)}\right| \ge 1-\frac{\left|c_{i+1,i}\right|}{\left|Q_{i+1,i}^{(n-2-i)}\right|}-\frac{\left|c_{i,i+1}\right|}{\left|Q_{i,i+1}^{(n-2-i)}\right|}-\frac{\left|c_{i+1,i+1}\right|}{\left|Q_{i+1}^{(n-2-i)}\right|} \ge$$

$$\ge 1-\frac{\left|c_{i+1,i}\right|}{h_{n-2-i}}-\frac{\left|c_{i,i+1}\right|}{h_{n-2-i}}-\frac{\left|c_{i+1,i+1}\right|}{h_{n-2-i}} \ge h_{n-1-i}\,.$$

Враховуючи ці нерівності та формулу різниці між наближеннями ДНД (11) і неперервного дробу (29), матимемо

$$|f_n - f_m| \le g_n - g_m \le \frac{2^{-m} t^m (1-t)^m}{\prod\limits_{i=0}^{m} h_{n-i-1} \prod\limits_{i=0}^{m-1} h_{m-i-1}} = q_n - q_m ,$$

де P_n, Q_n і $q_n = P_n/Q_n$ – відповідно n-й чисельник, n-й знаменник і n-не наближення дробу (29), причому $P_n = Q_{n-1}$. Оскільки $h_k = q_{k+1}^{-1} = \dfrac{Q_{k+1}}{Q_k}$, то

$$|f_n - f_m| \le \frac{2^{-m} t^m (1-t)^m Q_{n-m-1}}{Q_n Q_m} .$$

Періодичний неперервний дріб (29) – збіжний, а тому ДНД (1) є абсолютно збіжним. Твердження *2°*) і *3°*) теореми доводяться аналогічно до подібних тверджень теореми 1. ◊

3. Висновки. Методику доведення узагальнення цих класичних теорем можна перенести на дослідження збіжності двовимірних неперервних дробів різних типів.

1. *Баран О. Є.* Аналог ознаки збіжності Ворпіцького для гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1996. – **39**, № 2. – С. 35–38.
2. *Боднар Д. И.* Ветвящиеся цепные дроби. – Киев: Наук. думка, 1986. – 176 с.
3. *Сусь О. М.* Деякі питання аналітичної теорії двовимірних ланцюгових дробів: Дис. ... канд. фіз.-мат. наук. – Львів, 1996. – 123 с.
4. *Beardon A. F.* The Worpitzky – Pringsheim theorem on continued fractions // Rocky Mountain J. Math. – 2001. – **31**, No. 2. – P. 389–399.
5. *Beardon A. F.* On the Worpitzky's theorem on continued fractions // J. Comp. & Appl. Math. – 2001. – **131**, No. 1-3. – P. 143–148.
6. *Kuchmins'ka Kh.* Worpitzky-like criterion for two-dimensional continued fraction // Reprint CPT-93/P.2940.-CNRS Luminy, Marseille. – 1993. – 6 p.
7. *Kuchmins'ka Kh.* On sufficient conditions for convergence of two-dimensional continued fractions // Acta Applicandae Math. – 2000. – **61**, No. 1-3. – C. 175–183.
8. *Lorentzen L., Waadeland H.* Continued fractions. – Vol. 1: Convergence Theory. – Amsterdam – Paris: Atlantis Press/Word Scientific, 2008. – 308 p.

О ТЕОРЕМАХ ТИПА ВОРПИЦКОГО ДЛЯ ДВУМЕРНОЙ НЕПРЕРЫВНОЙ ДРОБИ

Для двумерной непрерывной дроби с использованием оценок остатков такой дроби, формулы разности между двумя приближениями двумерной непрерывной дроби в терминах этих остатков и метода мажорант предложены обобщения теоремы сходимости Ворпицкого. Для дробей, удовлетворяющих условиям обобщенных теорем Ворпицкого, получены также оценки скорости сходимости.

ON WORPITZKY-LIKE THEOREMS FOR TWO-DIMENSIONAL CONTINUED FRACTION

Using bounds for two-dimensional continued fraction tails, the difference formula between two approximants of such fraction in terms of its tails, and the majorant method the generalizations of the convergence theorem of Worpitzky are proposed. For fractions satisfying conditions of the generalized Worpitzky theorems the convergence speed estimates are also obtained.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
10.11.09