

РЕШЕНИЕ ТРЕХМЕРНОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДРОБНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Рассмотрена трехмерная осесимметричная граничная задача для дифференциального уравнения теплопроводности с производными дробного порядка по времени. С использованием метода однородных решений и интегральных преобразований получено асимптотическое и численное решение задачи. Приведены результаты расчетов.

В последние годы возрос интерес исследователей к изучению физико-механических свойств материалов с фрактальной или мультифрактальной структурой [5, 9]. Примерами фракталов могут служить сильно пористые, структурированные среды, которые являются следствием многих процессов и явлений необратимого роста, таких как диффузия, агрегирование, разрушение, перколяция, динамический хаос, растворение. В литературе имеется несколько моделей описания механических, тепловых, электрических свойств фрактальных сред [5, 10]. Они содержат дифференциальные уравнения в частных производных дробного порядка (по пространственным переменным). Дробный показатель дифференцирования связан с фрактальной размерностью пространства. Однако наряду с геометрическими фракталами рассматривают и временные фракталы, ибо существуют процессы, имеющие фрактальную во времени природу. К ним относятся, например, процессы переноса заряда в аморфных средах в рамках модели случайных блужданий с непрерывным временем, ударноволновые процессы в конденсированных средах, аномальная диффузия, теплопроводность [9–14].

В настоящее время в литературе имеется несколько подходов к решению дифференциальных уравнений с дробными производными. В статье [1] используется метод Монте-Карло в сочетании со схемой конечных разностей. Эффективными являются методы интегральных преобразований [10]. В работе [13] рассмотрена задача аномальной диффузии в бесконечной среде с цилиндрической полостью. Некоторые общие соображения о решении дробно-дифференциальных уравнений изложены в [11].

В этой работе предлагаются аналитические и численные процедуры решения новой трехмерной граничной задачи фрактальной теплопроводности для слоя со сквозной цилиндрической полостью. Приведены численные результаты, характеризующие эволюцию температуры во времени для различных значений порядка производной при действии на поверхности тела импульсной нагрузки.

Постановка задачи. В прямолинейной декартовой системе координат $Ox_1x_2x_3$ рассмотрим слой $-\infty < x_1, x_2 < \infty, |x_3| \leq h$, содержащий сквозную цилиндрическую полость $-h \leq x_3 \leq h, 0 < \rho \leq R$. Будем предполагать, что на поверхности полости задан тепловой поток, а на основаниях слоя поддерживается нулевая температура.

Система уравнений, описывающая решение поставленной задачи, имеет вид:

– уравнение теплопроводности [12]

$$\frac{\partial^\alpha T}{\partial t^\alpha} = a^2 \Delta T, \quad 0 < \alpha \leq 2; \quad (1)$$

– начальные условия

$$T|_{t=0} = 0, \quad 0 < \alpha \leq 2, \quad (2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial n}|_{t=0} = 0, \quad 1 < \alpha \leq 2; \quad (3)$$

– граничные условия на основании слоя

$$T|_{x_3=\pm h} = 0; \quad (4)$$

– граничные условия на поверхности полости [6, 12, 14]

$$\begin{aligned} -kI^{\alpha-1} \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{\sigma} &= P(t), & 1 \leq \alpha \leq 2, \\ -kD_{RL}^{1-\alpha} \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{\sigma} &= P(t), & 0 < \alpha \leq 1. \end{aligned} \quad (5)$$

В соотношениях (1)–(5) $T = T(x_1, x_2, x_3, t)$ – распределение температуры; a^2 – коэффициент температуропроводности; k – коэффициент теплопроводности; $P(t)$ – заданная поверхностная плотность теплового потока, действующего на поверхности σ (поверхность кругового цилиндра); Δ – оператор Лапласа в \mathbb{R}^3 ; $\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha}$ – дробная производная Капуто [8], $I^{\alpha-1}$ и $D_{RL}^{1-\alpha}$ – операторы дробного интегрирования и дифференцирования Римана – Лиувилля соответственно [2, 8].

Решение граничной задачи проведено с применением интегрального преобразования Лапласа по времени и процедуры метода однородных решений [4]. Асимптотическое решение (при малых временах) определено в замкнутом виде. Решение для произвольного момента времени построено путем численного обращения преобразования Лапласа [7].

Применив к соотношениям (1), (4), (5) преобразование Лапласа по времени при однородных начальных условиях (2), (3), получим следующую граничную задачу:

$$a^2 \Delta \Theta - s^\alpha \Theta = 0, \quad \Theta = L[T](s), \quad (6)$$

$$\Theta|_{x_3=\pm h} = 0, \quad (7)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial n} \Big|_{\sigma} = -\frac{s^{\alpha-1}}{k} Q(s), \quad Q(s) = L[P(t)]. \quad (8)$$

Симметричные однородные решения задачи (6), (7) будут иметь вид [4]

$$\Theta = \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j(x_1, x_2) \cos(\mu_j x_3), \quad (9)$$

где $\mu_j = \frac{\pi}{2h}(2j+1)$, а $\varphi_j(x_1, x_2)$ – метагармонические функции, удовлетворяющие уравнению

$$(\nabla^2 - v_j^2)\varphi_j = 0, \quad v_j^2 = \mu_j^2 + \frac{s^\alpha}{a^2}, \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}. \quad (10)$$

Раскладывая в (8) функцию $Q(s)$ в ряд Фурье по собственным функциям однородного решения (9), получим

$$\frac{\partial \varphi_j}{\partial \rho} \Big|_{\rho=R} = -\frac{s^{\alpha-1}}{k} Q_j, \quad Q = \sum_{j=0}^{\infty} Q_j(x_1, x_2) \cos(\mu_j x_3). \quad (11)$$

Таким образом, задача состоит в определении функций $\varphi_j(\rho)$ из уравнения (10) и граничных условий (11).

С учетом осевой симметрии рассматриваемой задачи уравнение (10) можно записать следующим образом:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} - v_j^2 \right) \varphi_j = 0, \quad \rho \geq R.$$

Его решение представимо в виде

$$\varphi_j(\rho, s) = C_1(s)I_0(v_j \rho) + C_2(s)K_0(v_j \rho),$$

где $\operatorname{Re} v_j > 0$; I_0 и K_0 – модифицированные функции Бесселя 1-го и 2-го рода соответственно [3].

Так как температурное поле на бесконечности должно обращаться в ноль, то $C_1(s) = 0$, а коэффициенты $C_2(s)$ определим из условия (11).

Окончательно получаем

$$\Theta = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{s^{\alpha-1}}{k v_j} Q_j \frac{K_0(v_j \rho)}{K_1(v_j R)} \cos(\mu_j x_3).$$

Для определения температурной функции T по образу Θ необходимо выполнить обратное преобразование Лапласа.

Асимптотика решения при малых значениях времени ($t \rightarrow 0$). Известно, что при преобразовании Лапласа малым значениям временного параметра t соответствуют большие значения параметра преобразования s (т. е. $s \rightarrow \infty$). Воспользовавшись этим замечанием, представим числа v_j приближенно

$$v_j^2 = \mu_j^2 + \frac{s^\alpha}{a^2} \approx \frac{s^\alpha}{a^2} \Rightarrow v_j \approx \frac{s^{\alpha/2}}{a}, \quad a > 0, \quad 1 \leq \alpha \leq 2.$$

Используя это представление и асимптотические разложения функций Макдональда при больших значениях аргумента, получим следующее выражение для функции $\Theta(s)$:

$$\Theta = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a}{k} Q_j \sqrt{\frac{\rho}{R}} s^{\alpha/2-1} \exp(-s^{\alpha/2} \tau) \cos(\mu_j x_3), \quad \tau = \frac{\rho - R}{a}. \quad (12)$$

Пусть на поверхности полости действует прямоугольный по времени и распределенный по параболе вдоль «толщинной» координаты импульс

$$P(t, x_3) = \left(1 - \frac{x_3^2}{h^2}\right) (H(t) - H(t - L)),$$

где $H(t)$ – единичная функция Гевисайда [3]; L – продолжительность действия импульса.

Тогда

$$Q_j(s) = \frac{4(-1)^{j+1}}{\mu_j^3} \frac{1 - \exp(-sL)}{s},$$

а представление (12) приобретает вид

$$\Theta = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a}{k} \sqrt{\frac{\rho}{R}} \frac{4(-1)^{j+1}}{\mu_j^3} \frac{1 - \exp(-sL)}{s} s^{\alpha/2-1} \exp(-s^{\alpha/2} \tau) \cos(\mu_j x_3). \quad (13)$$

Рассмотрим несколько частных случаев.

Классическое (параболическое) уравнение теплопроводности ($\alpha = 1$).

Функцию (13) запишем теперь в виде

$$\Theta = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a}{k} \sqrt{\frac{\rho}{R}} \frac{4(-1)^{j+1}}{\mu_j^3} \frac{(1 - \exp(-sL))}{s\sqrt{s}} \exp(-\tau\sqrt{s}) \cos(\mu_j x_3).$$

Обращение преобразования Лапласа последнего выражения можно выполнить в замкнутом виде. Получим

$$\begin{aligned} T(t, x_3, \rho) &= \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a}{k} \frac{4(-1)^{j+1}}{\mu_j^3} \sqrt{\frac{\rho}{R}} (f(t) - f(t - L)H(t - L)) \cos(\mu_j x_3), \end{aligned} \quad (14)$$

где $f(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{t} \exp\left(-\frac{\tau^2}{4t}\right) - \tau \operatorname{Erfc}\left(\frac{\tau}{2\sqrt{t}}\right)$; $\tau = \frac{\rho - R}{a}$.

Волновое уравнение ($\alpha = 2$). В этом случае решение получаем в виде

$$T(t, x_3, \rho) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a}{k} \frac{4(-1)^{j+1}}{\mu_j^3} \sqrt{\frac{\rho}{R}} (H(t - \tau) - H(t - L - \tau)H(t - L - \tau)) \cos(\mu_j x_3). \quad (15)$$

На рис. 1, 2 представлены расчеты температурной функции в зависимости от времени, выполненные по асимптотическим (при малых значениях времени) формулам (14) и (15) соответственно. На рис. 3, 4 приведены кривые эволюции температуры для различных дробных значений α . Решение для произвольного момента времени строилось путем численного обращения преобразования Лапласа. Алгоритм основан на разложении изображения в ряд Фурье и аппроксимации с помощью цепных дробей [7]. На рис. 5 и рис. 6 приведено сравнение асимптотического решения для $\alpha = 1$ и $\alpha = 2$ и результатов, полученных для этих значений α с помощью численного обращения преобразования Лапласа, соответственно. В расчетах задавались следующие параметры: $x_3 = 0$, $h = 1$ м, $R = 1$ м, $L = 1$ с. Расчеты, представленные на рис. 3, 4 и рис. 5, 6, проводились для значения $\rho = 1$ м.

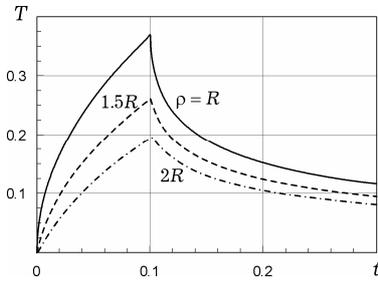


Рис. 1

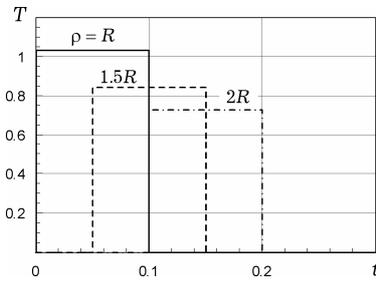


Рис. 2

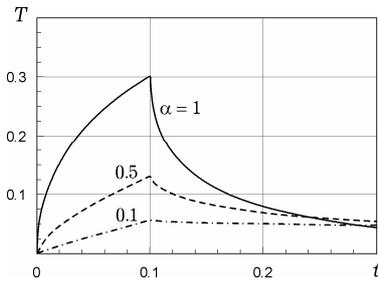


Рис. 3

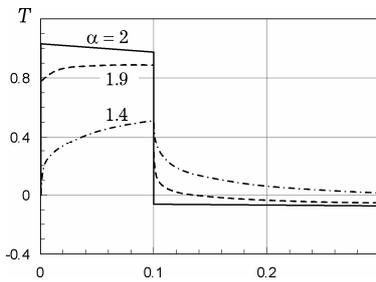


Рис. 4

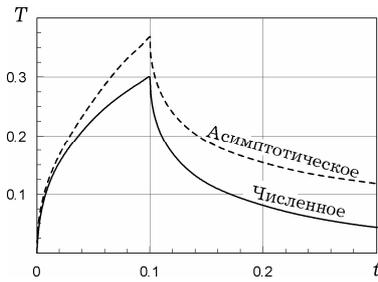


Рис. 5

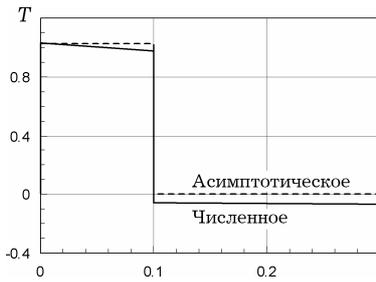


Рис. 6

Анализируя графики, изображенные на рис. 3, можно сделать вывод, что распространение тепла (нагрев) в слое с полостью для сред с показателем $\alpha < 1$ осуществляется медленнее в отличие от сред, для которых $\alpha = 1$. При $1 < \alpha \leq 2$ (рис. 4) процесс, происходящий во фрактальной среде, можно охарактеризовать как процесс перехода от классической теплопроводности к волновому поведению.

Анализ результатов, представленных на рис. 5, 6, показывает, что при $\alpha = 1$ и $t \in [0, 0.3]$ максимальное расхождение в значениях температуры составляет ≈ 0.07 , а при $\alpha = 2$ расхождение составляет $\approx 0.2 \div 0.3$.

1. Бондаренко А. Н., Иващенко Д. С. Численные методы решения краевых задач для уравнения диффузии дробного порядка по времени с постоянным коэффициентом // Межд. конф. «Дифференц. уравнения, теория функций и прил.», посвященная 100-летию со дня рождения акад. И. Н. Векуа (Новосибирск, 28 мая – 2 июня 2007 г.). – С. 556–557.
2. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.
3. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и таблицами / Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. – Москва: Наука, 1979. – 832 с.
4. Фильштинский Л. А. Периодические по времени однородные решения уравнения теплопроводности для анизотропного слоя в \mathbb{R}^3 // Мат. методы та фіз.-мех. поля. – 2003. – **46**, № 2. – С. 147–154.
5. Carpinteri A., Chiaia B., Cornetti P. A fractal theory for the mechanics of elastic materials // Mater. Sci. and Eng. – 2004. – **365**, No. 1. – P. 235–240.
6. Gorenflo R. F., Mainardi F., Moretti D., Paradisi P. Time-fractional diffusion: a discrete random walk approach // Nonlinear Dynamics. – 2002. – **29**, No. 1-4. – P. 129–143.
7. Jaemin Ahn, Sungkwon Kang, YongHoon Kwon. A flexible inverse Laplace transform algorithm and its application // Computing. – 2003. – **71**, No. 2. – P. 115–131.
8. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. Theory and applications of fractional differential equations. – Amsterdam: Elsevier, 2006. – 523 p.
9. Li B., Wang J. Anomalous heat conduction and anomalous diffusion in the one dimensional systems // Phys. Rev. Lett. – 2003. – **91**, No. 4. – P. 044301-1–044301-4.
10. Mainardi F., Luchko Yu., Pagnini G. The fundamental solution of the space-time fractional diffusion equation // Fractional Calculus Appl. Anal. – 2001. – **4**, No. 2. – P. 153–192.
11. Olayiwola M. O., Gbolagade A. M., Ayeni R. O., Mustapha A. R. On the existence of solution of differential equation of fractional order // J. Modern Math. and Statistics. – 2008. – **2**, No. 5. – P. 157–159.
12. Povstenko Y. Z. Fractional heat conduction equation and associated thermal stress // J. Thermal Stresses. – 2005. – **28**, No. 1. – P. 83–102.
13. Povstenko Y. Z. Fractional radial diffusion in an infinite medium with a cylindrical cavity // Quart. Appl. Math. – 2009. – **67**, No. 1. – P. 113–123.
14. Povstenko Y. Z. Thermoelasticity which uses fractional heat conduction equation // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2008. – **51**, № 2. – С. 239–246.
То же: Povstenko Y. Z. Thermoelasticity that uses fractional heat conduction equation // J. Math. Sci. – 2009. – **162**, No. 2. – P. 296–305.

РОЗВ'ЯЗОК ТРИВИМІРНОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ДРОБОВО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ

Розглянуто тривимірну осесиметричну крайову задачу для диференціального рівняння теплопровідності з похідними дробового порядку за часом. Із використанням методу однорідних розв'язків та інтегральних перетворень отримано асимптотичний і чисельний розв'язки задачі. Наведено результати розрахунків.

SOLUTION OF A THREE-DIMENSIONAL BOUNDARY-VALUE PROBLEM FOR FRACTIONAL DIFFERENTIAL HEAT CONDUCTION EQUATION

A three-dimensional axially symmetric boundary-value problem for differential heat conduction equation with a time-fractional derivative is considered. Using the method of homogeneous solutions and the method of integral transforms the asymptotic and numerical solutions are obtained. The results of calculations are presented.

Сумск. гос. ун-т, Сумы

Получено
17.06.09