

ТЕПЛОПЕРЕДАЧА ПІД ЧАС КОВЗАННЯ ПЛОСКОПАРАЛЕЛЬНОГО ШАРУ ПО ОСНОВІ

Отримано аналітичний розв'язок теплової задачі тертя для трибосистеми плоскопаралельний шар – основа за умови неповного теплового контакту між співдотичними тілами. Знайдено асимптотики отриманого розв'язку для малих і великих значень часу. Для матеріалів фрикційної пари металокерамічний шар – чавунна основа досліджено вплив коефіцієнта термічної провідності контакту на розподіл температури та інтенсивності теплових потоків.

1. Вступ. Теплові умови на поверхні тертя двох пружних тіл у сучасному вигляді вперше записав Ф. Лінг [15]. Він вважав, що в області контакту температури співдотичних тіл однакові, а сума інтенсивностей теплових потоків, спрямованих по нормалі від поверхні тертя всередину кожного тіла, дорівнює питомій потужності тертя (повний або досконалий тепловий контакт). Така постановка контактних задач із урахуванням теплоутворення від тертя передбачає залежність температури лише від теплофізичних властивостей матеріалів трибоз'єднання, умов охолодження і потужності тертя.

Відомо, що на процеси тертя, зношування і теплоутворення впливають топографічні параметри співдотичних поверхонь, а також і так зване «третє тіло» – тонкий приповерхневий шар із фізико-механічними властивостями, відмінними від властивостей тіл, що труться [13, 14]. Термоопір, зумовлений цими чинниками, приводить до постановок контактних задач термопружності, що враховують стрибок температури при переході через поверхню взаємодії [7, 10]. Тепловий контакт тіл, при якому температура на поверхні тертя терпить стрибок, називають неповним (недосконалим). Розв'язок контактної задачі для двох напівбезмежних тіл за таких теплових граничних умов у випадку рівномірного ковзання отримано в монографії [4], а при ковзанні із постійним сповільненням – у праці [9].

Фрикційне теплоутворення у трибосистемі плоскопаралельний шар – основа за умови рівності температур співдотичних тіл на поверхні контакту досліджувалось у працях [5, 6]. Метою цієї роботи є побудова аналітичного розв'язку теплової задачі тертя із урахуванням теплопередачі між шаром та основою.

2. Постановка задачі. Нехай плоскопаралельний шар товщини d і півбезмежна основа (півпростір) стискаються нормальним розподіленям навантаженням сталої інтенсивності p_0 , прикладеним до зовнішньої поверхні шару і на безмежності в півпросторі (рис. 1). У початковий момент часу $t = 0$ шар починає ковзати по поверхні півпростору зі сталою швидкістю V у додатному напрямку осі y . Внаслідок тертя на поверхні контакту $z = 0$ генерується тепло і трибосистема нагрівається. Вважаємо, що між співдотичними поверхнями шару та основи відбувається теплопередача з постійним коефіцієнтом термічної провідності контакту h , а сума інтенсивностей теплових потоків, спрямованих із поверхні тертя всередину кожного тіла, дорівнює питомій потужності тертя. Температура зовнішньої поверхні шару $z = d$ є нульовою. Зношу-

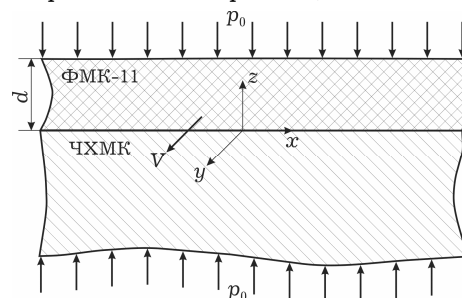


Рис. 1

ванням робочих поверхонь нехтуємо. Усім величинам, що відносяться до шару і основи, відповідно будемо приписувати нижні індекси « s » і « f ».

За таких припущень розподіли нестационарних температур у шарі $T_s(z, t)$ та основі $T_f(z, t)$ знайдемо із розв'язку такої крайової задачі теплопровідності:

$$\frac{\partial^2 T_s^*(\zeta, \tau)}{\partial \zeta^2} = \frac{\partial T_s^*(\zeta, \tau)}{\partial \tau}, \quad 0 < \zeta < 1, \quad \tau > 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 T_f^*(\zeta, \tau)}{\partial \zeta^2} = \frac{1}{k^*} \frac{\partial T_f^*(\zeta, \tau)}{\partial \tau}, \quad -\infty < \zeta < 0, \quad \tau > 0, \quad (2)$$

$$K^* \left. \frac{\partial T_f^*}{\partial \zeta} \right|_{\zeta=0-} - \left. \frac{\partial T_s^*}{\partial \zeta} \right|_{\zeta=0+} = 1, \quad \tau > 0, \quad (3)$$

$$K^* \left. \frac{\partial T_f^*}{\partial \zeta} \right|_{\zeta=0-} + \left. \frac{\partial T_s^*}{\partial \zeta} \right|_{\zeta=0+} = \text{Bi} [T_s^*(0, \tau) - T_f^*(0, \tau)], \quad \tau > 0, \quad (4)$$

$$T_s^*(1, \tau) = 0, \quad \tau > 0, \quad (5)$$

$$T_f^*(\zeta, \tau) \rightarrow 0, \quad \zeta \rightarrow -\infty, \quad \tau > 0, \quad (6)$$

$$T_s^*(\zeta, 0) = 0, \quad 0 \leq \zeta \leq 1, \quad T_f^*(\zeta, 0) = 0, \quad -\infty < \zeta \leq 0, \quad (7)$$

де

$$\begin{aligned} \zeta &= \frac{z}{d}, & \tau &= \frac{k_s t}{d^2}, & K^* &= \frac{K_f}{K_s}, & k^* &= \frac{k_f}{k_s}, \\ \text{Bi} &= \frac{hd}{K_s}, & T_0 &= \frac{fVp_0 d}{K_s}, & T_s^* &= \frac{T_s}{T_0}, & T_f^* &= \frac{T_f}{T_0}, \end{aligned} \quad (8)$$

f , K , k – відповідно коефіцієнти тертя, тепло- і температуропровідності. Методику визначення коефіцієнта термічної провідності h можна знайти в довіднику [11].

3. Побудова розв'язку задачі. Розв'язок теплової задачі тертя (1)–(7) у просторі зображень інтегрального перетворення Лапласа [3]

$$L[T_{s,f}^*(\zeta, \tau); p] \equiv \bar{T}_{s,f}^*(\zeta, p) = \int_0^\infty T_{s,f}^*(\zeta, \tau) e^{-p\tau} d\tau, \quad (9)$$

має вигляд

$$\bar{T}_{s,f}^*(\zeta, p) = \frac{\Delta_{s,f}(\zeta, p)}{p\Delta(p)}, \quad (10)$$

де

$$\Delta_s(\zeta, p) = \left(\varepsilon + \frac{\text{Bi}}{\sqrt{p}} \right) \text{sh} [(1 - \zeta)\sqrt{p}], \quad 0 \leq \zeta \leq 1, \quad (11)$$

$$\Delta_f(\zeta, p) = \left[\text{ch} \sqrt{p} + \frac{\text{Bi}}{\sqrt{p}} \text{sh} \sqrt{p} \right] e^{\zeta\sqrt{p/k^*}}, \quad -\infty < \zeta \leq 0, \quad (12)$$

$$\Delta(p) = \varepsilon \text{Bi} \text{sh} \sqrt{p} + (2\varepsilon\sqrt{p} + \text{Bi}) \text{ch} \sqrt{p}, \quad (13)$$

$\varepsilon = K^*/\sqrt{k^*}$ – коефіцієнт теплової активності шару відносно основи [8].

Методику обернення трансформант вигляду (10)–(13) шляхом інтегрування в площині комплексної змінної p (9) із розрізом у від'ємному напрямку дійсної осі детально описано у праці [6]. Скориставшись нею, знаходимо безрозмірні температури шару та основи:

$$T_s^*(\zeta, \tau) = (1 - \zeta) - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} F(x) G_s(\zeta, x) e^{-x^2 \tau} dx, \quad 0 \leq \zeta \leq 1, \quad \tau \geq 0, \quad (14)$$

$$T_f^*(\zeta, \tau) = \left(1 + \frac{1}{\text{Bi}}\right) - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} F(x) G_f(\zeta, x) e^{-x^2 \tau} dx, \quad -\infty < \zeta \leq 0, \quad \tau \geq 0, \quad (15)$$

$$F(x) = \frac{\cos x + \text{Bi} x^{-1} \sin x}{(\text{Bi} \cos x)^2 + \varepsilon^2 (\text{Bi} \sin x + 2x \cos x)^2}, \quad (16)$$

$$G_s(\zeta, x) = \varepsilon \text{Bi} x^{-1} \sin[(1 - \zeta)x], \quad 0 \leq \zeta \leq 1, \quad (17)$$

$$G_f(\zeta, x) = \varepsilon (\text{Bi} x^{-1} \sin x + 2 \cos x) \cos(\zeta x / \sqrt{k^*}) - \text{Bi} x^{-1} \cos x \sin(\zeta x / \sqrt{k^*}), \quad -\infty < \zeta \leq 0. \quad (18)$$

Зі співвідношень (14) і (17) випливає, що гранична умова (5) на зовнішній поверхні шару задовольняється. Максимальна температура в шарі та основи у фіксований момент часу досягається на поверхні тертя. Для її знаходження використовуємо розв'язки (14), (15) при $\zeta = 0$ та співвідношення для підінтегральних функцій, які випливають із формул (17), (18):

$$G_s(0, x) = \varepsilon \text{Bi} x^{-1} \sin x, \quad G_f(0, x) = \varepsilon (\text{Bi} x^{-1} \sin x + 2 \cos x). \quad (19)$$

Інтенсивності теплових потоків у шарі та основи

$$q_s(z, t) \equiv -K_s \frac{\partial T_s(z, t)}{\partial z}, \quad 0 \leq z \leq d, \quad t \geq 0,$$

$$q_f(z, t) \equiv K_f \frac{\partial T_f(z, t)}{\partial z}, \quad -\infty < z \leq 0, \quad t \geq 0,$$

або з урахуванням позначень (8)

$$q_s^*(\zeta, \tau) \equiv \frac{q_s(z, t)}{fVp_0} = -\frac{\partial T_s^*(\zeta, \tau)}{\partial \zeta}, \quad 0 \leq \zeta \leq 1, \quad \tau \geq 0,$$

$$q_f^*(\zeta, \tau) \equiv \frac{q_f(z, t)}{fVp_0} = K^* \frac{\partial T_f^*(\zeta, \tau)}{\partial \zeta}, \quad -\infty < \zeta \leq 0, \quad \tau \geq 0,$$

знаходимо з розв'язків (14)–(18) у вигляді

$$q_s^*(\zeta, \tau) = 1 - \frac{2\varepsilon}{\pi} \int_0^{\infty} F(x) Q_s(\zeta, x) e^{-x^2 \tau} dx, \quad 0 \leq \zeta \leq 1, \quad \tau \geq 0, \quad (20)$$

$$q_f^*(\zeta, \tau) = \frac{2\varepsilon}{\pi} \int_0^{\infty} F(x) Q_f(\zeta, x) e^{-x^2 \tau} dx, \quad -\infty < \zeta \leq 0, \quad \tau \geq 0, \quad (21)$$

$$Q_s(\zeta, x) = \text{Bi} \cos[(1 - \zeta)x], \quad 0 \leq \zeta \leq 1, \quad (22)$$

$$Q_f(\zeta, x) = \varepsilon (\text{Bi} \sin x + 2x \cos x) \sin(\zeta x / \sqrt{k^*}) + \text{Bi} \cos x \cos(\zeta x / \sqrt{k^*}), \quad -\infty < \zeta \leq 0, \quad (23)$$

де функція $F(x)$ означена формулою (16). Із формул (22) і (23) випливає, що $Q_f(0, x) = Q_s(0, x) = \text{Bi} \cos x$ у площині контакту $\zeta = 0$. Тоді зі співвідношень (20), (21) знаходимо, що гранична умова (3) задовольняється.

Знайшовши з розв'язків (14)–(18) і (20)–(23) стрибки температур та інтенсивностей теплових потоків на поверхні ковзання шару та основи

$$T_s^*(0, \tau) - T_f^*(0, \tau) = -\frac{1}{\text{Bi}} + \frac{4\varepsilon}{\pi} \int_0^\infty F(x) e^{-x^2\tau} \cos x \, dx, \quad \tau \geq 0, \quad (24)$$

$$q_f^*(0, \tau) - q_s^*(0, \tau) = -1 + \frac{4\varepsilon \text{Bi}}{\pi} \int_0^\infty F(x) e^{-x^2\tau} \cos x \, dx, \quad \tau \geq 0, \quad (25)$$

приходимо до висновку, що задовольняється гранична умова (4).

Безрозмірні температури та інтенсивності теплових потоків при повному тепловому контакті шару та основи знаходимо із формул (14)–(18) і (20)–(23), перейшовши в них до границі при $\text{Bi} \rightarrow \infty$. У результаті підінтегральні функції у цих формулах набувають вигляду

$$F(x) = \frac{x^{-1} \sin x}{\cos^2 x + \varepsilon^2 \sin^2 x}, \quad (26)$$

$$G_s(\zeta, x) = \varepsilon x^{-1} \sin[(1 - \zeta)x], \quad Q_s(\zeta, x) = \cos[(1 - \zeta)x], \quad 0 \leq \zeta \leq 1, \quad (27)$$

$$G_f(\zeta, x) = \varepsilon x^{-1} \sin x \cos(\zeta x / \sqrt{k^*}) - x^{-1} \cos x \sin(\zeta x / \sqrt{k^*}), \quad -\infty < \zeta \leq 0, \quad (28)$$

$$Q_f(\zeta, x) = \varepsilon \sin x \sin(\zeta x / \sqrt{k^*}) + \cos x \cos(\zeta x / \sqrt{k^*}), \quad -\infty < \zeta \leq 0. \quad (29)$$

Зі співвідношень (27)–(29) випливає, що на поверхні контакту $\zeta = 0$

$$G_s(0, x) = G_f(0, x) = \varepsilon x^{-1} \sin x, \quad Q_s(0, x) = Q_f(0, x) = \cos x. \quad (30)$$

Розв'язок теплової задачі тертя за умови досконалого теплового контакту шару та основи із підінтегральними функціями (26)–(30) отримано нами у праці [6].

4. Асимптотики. За великих значень параметра p інтегрального перетворення Лапласа (9) трансформанти безрозмірних температур (10)–(13) та інтенсивностей теплових потоків мають вигляд

$$\begin{aligned} \bar{T}_s^*(\zeta, p) &\cong \frac{\varepsilon + \text{Bi} / \sqrt{p}}{2\varepsilon p(\alpha + \sqrt{p})} e^{-\zeta\sqrt{p}}, \\ \bar{q}_s^*(\zeta, p) &\cong \frac{\varepsilon\sqrt{p} + \text{Bi}}{2\varepsilon p(\alpha + \sqrt{p})} e^{-\zeta\sqrt{p}}, \quad 0 \leq \zeta \leq 1, \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \bar{T}_f^*(\zeta, p) &\cong \frac{1 + \text{Bi} / \sqrt{p}}{2\varepsilon p(\alpha + \sqrt{p})} e^{\zeta\sqrt{p/k^*}}, \\ \bar{q}_f^*(\zeta, p) &\cong \frac{\sqrt{p} + \text{Bi}}{2p(\alpha + \sqrt{p})} e^{\zeta\sqrt{p/k^*}}, \quad -\infty < \zeta \leq 0, \end{aligned} \quad (32)$$

де

$$\alpha = \frac{1 + \varepsilon}{2\varepsilon} \text{Bi}. \quad (33)$$

Скориставшись формулами переходу до оригіналів [2]

$$\begin{aligned} L^{-1} \left[\frac{e^{-|\zeta|\sqrt{p}}}{\sqrt{p}(\alpha + \sqrt{p})}; \tau \right] &= e^{\alpha|\zeta| + \alpha^2\tau} \text{erfc} \left(\frac{|\zeta|}{2\sqrt{\tau}} + \alpha\sqrt{\tau} \right), \\ L^{-1} \left[\frac{\alpha e^{-|\zeta|\sqrt{p}}}{p(\alpha + \sqrt{p})}; \tau \right] &= \text{erfc} \left(\frac{|\zeta|}{2\sqrt{\tau}} \right) - e^{\alpha|\zeta| + \alpha^2\tau} \text{erfc} \left(\frac{|\zeta|}{2\sqrt{\tau}} + \alpha\sqrt{\tau} \right), \end{aligned}$$

$$L^{-1}\left[\frac{e^{-|\zeta|\sqrt{p}}}{p\sqrt{p}(\alpha+\sqrt{p})};\tau\right]=\frac{2}{\alpha}\sqrt{\frac{\tau}{\pi}}e^{-\zeta^2/4\tau}-\left(\frac{|\zeta|}{\alpha}+\frac{1}{\alpha^2}\right)\operatorname{erfc}\left(\frac{|\zeta|}{2\sqrt{\tau}}\right)+\frac{1}{\alpha^2}e^{\alpha|\zeta|+\alpha^2\tau}\operatorname{erfc}\left(\frac{|\zeta|}{2\sqrt{\tau}}+\alpha\sqrt{\tau}\right),$$

зі співвідношень (31) і (32) знаходимо асимптотичні (для малих значень безрозмірного часу ($0 \leq \tau \ll 1$)) розв'язки

$$T_s^*(\zeta, \tau) \cong \frac{2\sqrt{\tau}}{1+\varepsilon} \operatorname{ierfc}\left(\frac{\zeta}{2\sqrt{\tau}}\right) - \frac{\lambda}{2\alpha} \left[\operatorname{erfc}\left(\frac{\zeta}{2\sqrt{\tau}}\right) - e^{\alpha|\zeta|+\alpha^2\tau} \operatorname{erfc}\left(\frac{\zeta}{2\sqrt{\tau}} + \alpha\sqrt{\tau}\right) \right], \quad 0 \leq \zeta \leq 1, \quad (34)$$

$$T_f^*(\zeta, \tau) \cong \frac{2\sqrt{\tau}}{1+\varepsilon} \operatorname{ierfc}\left(\frac{|\zeta|}{2\sqrt{k^*\tau}}\right) + \frac{\lambda}{2\alpha\varepsilon} \left[\operatorname{erfc}\left(\frac{|\zeta|}{2\sqrt{k^*\tau}}\right) - e^{\alpha|\zeta|/\sqrt{k^*}+\alpha^2\tau} \operatorname{erfc}\left(\frac{|\zeta|}{2\sqrt{k^*\tau}} + \alpha\sqrt{\tau}\right) \right], \quad -\infty < \zeta \leq 0, \quad (35)$$

$$q_s^*(\zeta, \tau) \cong \frac{1}{1+\varepsilon} \operatorname{erfc}\left(\frac{\zeta}{2\sqrt{\tau}}\right) - \frac{\lambda}{2} e^{\alpha|\zeta|+\alpha^2\tau} \operatorname{erfc}\left(\frac{\zeta}{2\sqrt{\tau}} + \alpha\sqrt{\tau}\right), \quad 0 \leq \zeta \leq 1, \quad (36)$$

$$q_f^*(\zeta, \tau) \cong \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \operatorname{erfc}\left(\frac{|\zeta|}{2\sqrt{k^*\tau}}\right) + \frac{\lambda}{2} e^{\alpha|\zeta|/\sqrt{k^*}+\alpha^2\tau} \operatorname{erfc}\left(\frac{|\zeta|}{2\sqrt{k^*\tau}} + \alpha\sqrt{\tau}\right), \quad -\infty < \zeta \leq 0, \quad (37)$$

де

$$\lambda = \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}, \quad (38)$$

$\operatorname{ierfc} x = \pi^{-1/2} \exp(-x^2) - x \operatorname{erfc} x$; $\operatorname{erfc} x = 1 - \operatorname{erf} x$; $\operatorname{erf} x$ - функція похибок Гаусса.

Перейшовши у співвідношеннях (34) і (35) до границі при $\tau \rightarrow 0$, отримуємо, що $T_{s,f}^*(\zeta, 0) = 0$, а це означає, що задовольняються початкові умови (7). Поклавши у формулах (34)–(37) $\zeta = 0$, знаходимо температури та інтенсивності теплових потоків шару та основи на поверхні тертя:

$$T_s^*(0, \tau) \cong \frac{2}{1+\varepsilon} \sqrt{\frac{\tau}{\pi}} - \frac{\lambda}{2\alpha} [1 - e^{\alpha^2\tau} \operatorname{erfc}(\alpha\sqrt{\tau})],$$

$$T_f^*(0, \tau) \cong \frac{2}{1+\varepsilon} \sqrt{\frac{\tau}{\pi}} + \frac{\lambda}{2\alpha\varepsilon} [1 - e^{\alpha^2\tau} \operatorname{erfc}(\alpha\sqrt{\tau})], \quad 0 \leq \tau \ll 1, \quad (39)$$

$$q_s^*(0, \tau) \cong \frac{1}{1+\varepsilon} - \frac{\lambda}{2} e^{\alpha^2\tau} \operatorname{erfc}(\alpha\sqrt{\tau}),$$

$$q_f^*(0, \tau) \cong \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} + \frac{\lambda}{2} e^{\alpha^2\tau} \operatorname{erfc}(\alpha\sqrt{\tau}), \quad 0 < \tau \ll 1. \quad (40)$$

Із урахуванням позначень (33) і (38) із формул (39), (40) випливає, що

$$T_s^*(0, \tau) - T_f^*(0, \tau) = -\frac{\lambda}{\operatorname{Bi}} [1 - e^{\alpha^2\tau} \operatorname{erfc}(\alpha\sqrt{\tau})], \quad 0 \leq \tau \ll 1, \quad (41)$$

$$q_f^*(0, \tau) + q_s^*(0, \tau) = 1,$$

$$q_f^*(0, \tau) - q_s^*(0, \tau) = -\lambda [1 - e^{\alpha^2\tau} \operatorname{erfc}(\alpha\sqrt{\tau})], \quad 0 < \tau \ll 1,$$

а це свідчить про виконання теплових граничних умов (3) і (4). Перейшовши у співвідношенні (41) до границі при $Bi \rightarrow \infty$, приходимо до умови рівності температур на поверхні контакту (повний тепловий контакт). Температури шару та основи за такої теплової взаємодії для малих значень часу знаходимо із формул (34) і (35) у вигляді

$$\begin{aligned} T_s^*(\zeta, \tau) &\cong \frac{2\sqrt{\tau}}{1+\varepsilon} \operatorname{ierfc}\left(\frac{\zeta}{2\sqrt{\tau}}\right), & 0 \leq \zeta < \infty, \\ T_f^*(\zeta, \tau) &\cong \frac{2\sqrt{\tau}}{1+\varepsilon} \operatorname{ierfc}\left(\frac{|\zeta|}{2\sqrt{k^*\tau}}\right), & -\infty < \zeta \leq 0. \end{aligned} \quad (42)$$

Співвідношення (42) – це розв’язок теплової задачі тертя для двох півпросторів [4].

Асимптотики трансформант температури (10)–(13) та інтенсивностей теплових потоків за малих значень параметра p інтегрального перетворення Лапласа (9) мають вигляд

$$\begin{aligned} \bar{T}_s^*(\zeta, p) &\cong \frac{1-\zeta}{2+Bi} \left[\frac{(2+Bi)\beta + \sqrt{p}}{p(\beta + \sqrt{p})} \right], \\ \bar{q}_s^*(\zeta, p) &\cong \frac{\varepsilon\sqrt{p} + Bi}{2\varepsilon p(2+Bi)(\alpha + \sqrt{p})}, & 0 \leq \zeta \leq 1, \end{aligned} \quad (43)$$

$$\begin{aligned} \bar{T}_f^*(\zeta, p) &\cong \frac{(1+Bi)\beta}{Bi} \left[\frac{1 + \zeta\sqrt{p/k^*}}{p(\beta + \sqrt{p})} \right], \\ \bar{q}_f^*(\zeta, p) &\cong \frac{1+Bi}{(2+Bi)\sqrt{p}(\alpha + \sqrt{p})} \left(1 + \zeta\sqrt{\frac{p}{k^*}} \right), & -\infty < \zeta \leq 0, \end{aligned} \quad (44)$$

де

$$\beta = \frac{Bi}{\varepsilon(2+Bi)}. \quad (45)$$

За допомогою формул переходу до оригіналів [2]

$$\begin{aligned} L^{-1} \left[\frac{1}{\sqrt{p}(\beta + \sqrt{p})}; \tau \right] &= e^{\beta^2\tau} \operatorname{erfc}(\beta\sqrt{\tau}), \\ L^{-1} \left[\frac{\beta}{p(\beta + \sqrt{p})}; \tau \right] &= 1 - e^{\beta^2\tau} \operatorname{erfc}(\beta\sqrt{\tau}) \end{aligned}$$

зі співвідношень (43) і (44) отримуємо асимптотики безрозмірних температур та інтенсивностей теплових потоків у шарі та основі для великих ($\tau \gg 1$) значень безрозмірного часу τ :

$$T_s^*(\zeta, \tau) \cong (1-\zeta) \left[1 - \frac{1+Bi}{2+Bi} e^{\beta^2\tau} \operatorname{erfc}(\beta\sqrt{\tau}) \right], \quad 0 \leq \zeta \leq 1, \quad (46)$$

$$T_f^*(\zeta, \tau) \cong \frac{1+Bi}{Bi} \left[1 - \left(1 - \beta \frac{\zeta}{\sqrt{k^*}} \right) e^{\beta^2\tau} \operatorname{erfc}(\beta\sqrt{\tau}) \right], \quad -\infty < \zeta \leq 0, \quad (47)$$

$$q_s^*(\zeta, \tau) \cong 1 - \frac{1+Bi}{2+Bi} e^{\beta^2\tau} \operatorname{erfc}(\beta\sqrt{\tau}), \quad 0 \leq \zeta \leq 1, \quad (48)$$

$$q_f^*(\zeta, \tau) \cong \frac{1+Bi}{2+Bi} \left[\frac{\zeta}{\sqrt{\pi k^* \tau}} + \left(1 - \beta \frac{\zeta}{\sqrt{k^*}} \right) e^{\beta^2\tau} \operatorname{erfc}(\beta\sqrt{\tau}) \right], \quad -\infty < \zeta \leq 0. \quad (49)$$

Бачимо, що зменшення температур у шарі (46) та основі (47) від максимальних значень на поверхні тертя до нуля є лінійною функцією безрозмірної просторової змінної ζ , інтенсивність теплового потоку в шарі (48) є постійною по його товщині, а інтенсивність теплового потоку в основі (49) зменшується лінійно із віддаленням від поверхні взаємодії. На поверхні контакту $\zeta = 0$ із формул (46)–(49) знаходимо

$$T_s^*(0, \tau) - T_f^*(0, \tau) = -\frac{1}{\text{Bi}} \left[1 - 2 \frac{1 + \text{Bi}}{2 + \text{Bi}} e^{\alpha^2 \tau} \text{erfc}(\beta \sqrt{\tau}) \right],$$

$$q_f^*(0, \tau) + q_s^*(0, \tau) = 1,$$

$$q_f^*(0, \tau) - q_s^*(0, \tau) = -1 + 2 \frac{1 + \text{Bi}}{2 + \text{Bi}} e^{\beta^2 \tau} \text{erfc}(\beta \sqrt{\tau}),$$

а це свідчить, що задовольняються граничні умови (3) і (4).

Асимптотики температур при повному тепловому контакті шару та основи отримуємо, перейшовши у співвідношеннях (46), (47) до границі при $\text{Bi} \rightarrow \infty$:

$$T_s^*(\zeta, \tau) \cong (1 - \zeta) \left[1 - e^{(\sqrt{\tau}/\varepsilon)^2} \text{erfc}\left(\frac{\sqrt{\tau}}{\varepsilon}\right) \right], \quad 0 \leq \zeta \leq 1,$$

$$T_f^*(\zeta, \tau) \cong 1 - \left(1 - \frac{\zeta}{\varepsilon \sqrt{k^*}} \right) e^{(\sqrt{\tau}/\varepsilon)^2} \text{erfc}\left(\frac{\sqrt{\tau}}{\varepsilon}\right), \quad -\infty < \zeta \leq 0.$$

5. Чисельний аналіз. Результати обчислень безрозмірних температур $T_{s,f}^*$ та інтенсивностей теплових потоків $q_{s,f}^*$ для металокерамічного шару ФМК-11 ($K_s = 34.31 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}$, $k_s = 15.2 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$) та основи із чавуну ЧХМК ($K_f = 51 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}$, $k_f = 14 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$) наведено у вигляді графіків на рис. 2–5. Така пара тертя використовується у фрикційних вузлах гальм [1, 12]. Безрозмірними вхідними параметрами задачі є просторова змінна ζ і числа Фур'є τ та Біо Bi (див. (8)).

Ізотерми безрозмірної температури $T_{s,f}^*$ для двох значень числа Біо $\text{Bi} = 1, 100$ зображено на рис. 2. Для значення $\text{Bi} = 1$ помітними є стрибки температури на поверхні контакту $\zeta = 0$ (рис. 2а), а для $\text{Bi} = 100$ бачимо практично повну їх відсутність (рис. 2б).

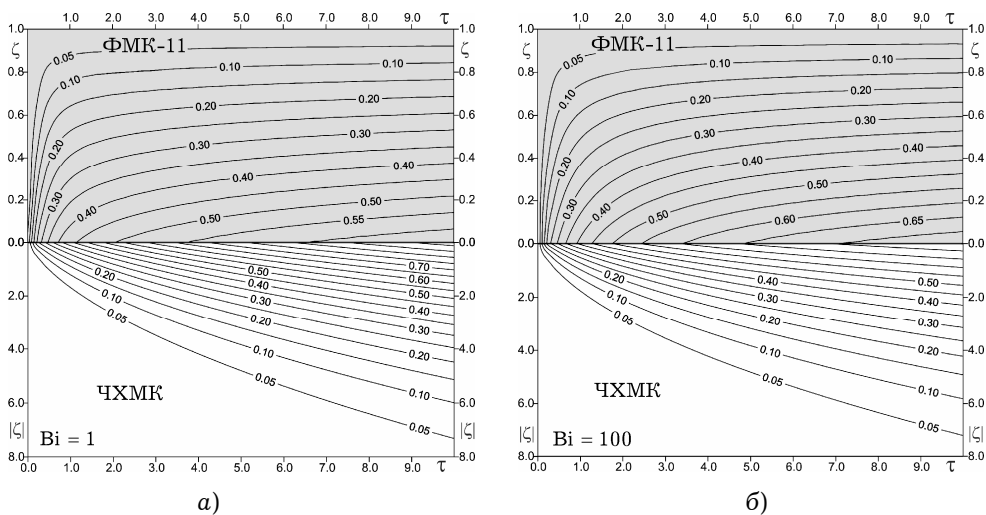


Рис. 2

Розподіл безрозмірної температури в шарі та основі по нормалі до поверхні тертя для значення числа Фур'є $\tau = 1$ і двох чисел Біо $Bi = 1$ та $Bi = 100$ показано на рис. 3. Зменшення температури в шарі від максимального значення на поверхні контакту до нуля на зовнішній поверхні є лінійним. Ефективна глибина прогрівання основи – відстань, на якій температура становить 5% від максимальної на поверхні взаємодії – становить близько трьох товщин шару. Спостерігаємо значний стрибок температур при переході поверхні тертя для $Bi = 1$ та його відсутність для $Bi = 100$. Таким чином, тепловий контакт шару із основою можемо вважати повним для значень числа Біо $Bi \geq 100$.

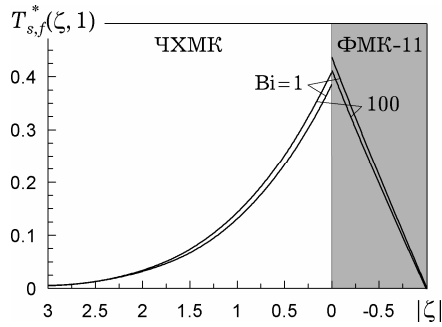


Рис. 3

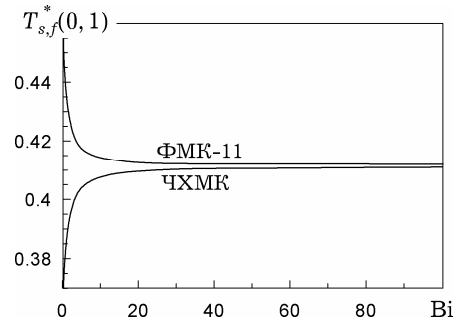


Рис. 4

Залежність максимальних температур шару та основи від числа Біо показано на рис. 4. Збільшення термічної провідності (зменшення термоопору) приводить до вирівнювання температур шару та основи на поверхні контакту. Результати чисельного аналізу показали, що при значеннях $Bi \geq 100$ для знаходження температури можна використовувати формули (28)–(31), отримані нами раніше за умов досконалого теплового контакту шару та основи [6].

Якщо $Bi \rightarrow 0$, то з граничної умови (4) випливає, що інтенсивності теплових потоків, спрямованих по нормалі від поверхні тертя всередину шару та основи, однакові. Це й підтверджують дані, наведені на рис. 5. Зі збільшенням термічної провідності контакту інтенсивність теплового потоку, спрямованого в плоскопаралельний шар, різко збільшується, а до основи – так само стрімко зменшується. При $Bi \approx 5$ інтенсивності теплових потоків досягають своїх екстремальних значень і надалі зі збільшенням числа Біо практично не змінюються. При цьому сума безрозмірних інтенсивностей теплових потоків, спрямованих до шару і основи, згідно із граничною умовою (3) дорівнює одиниці.

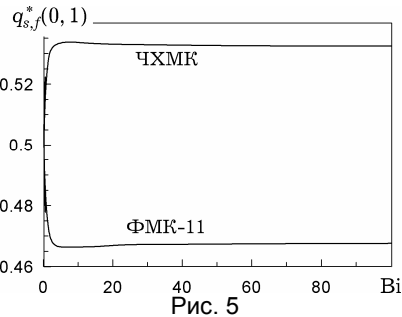


Рис. 5

6. Висновки. Отримано аналітичний розв'язок контактної задачі із урахуванням теплоутворення від тертя та теплопередачі між плоскопаралельним шаром і півбезмежною основою. Побудовано асимптотики цього розв'язку при малих і великих значеннях безрозмірного часу Fo (числа Фур'є). Досліджено вплив безрозмірного коефіцієнта термічної провідності контакту Bi (числа Біо) на розподіл температур та інтенсивностей теплових потоків в металокерамічному шарі та чавунній основі. Встановлено нижню межу зміни числа Біо, при перевищенні якої тепловий контакт шару та основи можемо вважати повним.

1. Балакин В. А., Сергиенко В. П. Тепловые расчеты тормозов и узлов трения. – Гомель: Ин-т механики металлополимерных систем НАН Беларуси, 1999. – 220 с.
2. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. – Т. 1. – Преобразование Фурье, Лапласа, Меллина. – Москва: Наука, 1969. – 343 с.
3. Галицын А. С., Жуковский А. Н. Интегральные преобразования и специальные функции в задачах теплопроводности. – Киев: Наук. думка, 1976. – 282 с.
4. Грилицький Д. В. Термопружні контактні задачі в трибології: Навч. посібник. – Київ: Ін-т змісту і методів навчання М-ва освіти України, 1996. – 204 с.
5. Евтушенко А., Куцей М. Нестационарная тепловая задача трения для системы плоскопараллельный слой – полупространство // Трение и износ. – 2007. – **28**, № 3. – С. 244–256.
6. Евтушенко О. О., Куцей М. Вплив конвективного охолодження зовнішньої поверхні плоскопараллельного шару на розподіл температури у трибосистемі шар – основа // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2008. – **51**, № 4. – С. 212–220.
7. Левицький В. П., Онишкевич В. М. Дослідження впливу властивостей «третього тіла» на теплоутворення від тертя // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1999. – **42**, № 1. – С. 82–86.
8. Лыков А. В. Теория теплопроводности. – Москва: Высш. шк., 1967. – 599 с.
9. Носко А. Л., Носко А. П. Решение контактной тепловой задачи с учетом теплопередачи между элементами трибосопряжения // Трение и износ. – 2006. – **27**, № 3. – С. 279–284.
10. Подстригач Я. С. Температурное поле в системе твердых тел, сопряженных с помощью промежуточного слоя // Инж.-физ. журн. – 1963. – **6**, № 10. – С. 129–136.
11. Справочник по теплообменникам: В 2 т. – Москва: Энергоатомиздат, 1987. – Т. 1. – 560 с.
12. Чичинадзе А. В., Браун Э. Д., Гинзбург А. Г., Игнатъева З. В. Расчет, испытание и подбор фрикционных пар. – Москва: Наука, 1979. – 267 с.
13. Godet M. Third-bodies in tribology // Wear. – 1990. – **136**, No. 1. – P. 29–45.
14. Jordanoff I., Berthier Y., Descartes S., Heshmat H. A review of recent approaches for modeling solid third bodies // Trans. ASME. J. Tribology. – 2002. – **124**, No. 4. – P. 725–735.
15. Ling F. F. A quasi-iterative method for computing interface temperature distributions // Z. angew. Math. und Phys. – 1959. – **10**, No. 5. – P. 461–474.

ТЕПЛОПЕРЕДАЧА ПРИ СКОЛЬЖЕНИИ ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОГО СЛОЯ ПО ОСНОВАНИЮ

Получено аналитическое решение тепловой задачи трения для трибосистемы плоскопараллельный слой – основание при условии неполного теплового контакта между соприкасаемыми телами. Найдены асимптотики полученного решения для малых и больших значений времени. Для материалов фрикционной пары металл-керамический слой – чугунное основание изучено влияние коэффициента термической проводимости контакта на распределение температуры и интенсивности тепловых потоков.

HEAT TRANSFER DURING SLIDING OF A PLANE-PARALLEL LAYER ON FOUNDATION

An analytical solution of heat problem on friction for a tribosystem a plane-parallel layer – foundation under imperfect thermal contact between adjoining bodies is obtained. The asymptotics of obtained solution for small and large values of time are found. For materials of frictional pair a ceramic-metal layer – the cast iron foundation the influence of coefficient of thermal conductivity of contact on the temperature distribution and heat flux intensities is investigated.

¹ Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів,

² Техн. ун-т, Б'ялисток, Польща

Одержано
04.12.08