

## ОСЕСИМЕТРИЧНА ЗАДАЧА ПРО ВІДШАРУВАННЯ ПРУЖНОГО ПІВПРОСТОРУ ВІД ЖОРСТКОЇ ОСНОВИ ЗА ДІЇ ТОЧКОВОГО ДЖЕРЕЛА ОХОЛОДЖЕННЯ

*Розглянуто осесиметричну задачу про односторонній безфрикційний контакт пружного півпростору та жорсткої термоізоляованої основи за дії приповерхневого джерела охолодження, яке спричиняє відшарування між тілами по круговій ділянці. Визначено інтенсивність джерела, при якій починається локальна втрата контакту. Детально проаналізовано залежність геометричних параметрів міжповерхневого зазору та контактних напружень від інтенсивності джерела охолодження, його розташування відносно поверхні.*

У літературі розглядають контактні задачі для тіл з узгодженими та з узгодженими границями [3], що відрізняються в основному підходами і методами розв'язування. До першого типу належать класичні контактні задачі, у яких область налягання поверхонь є малою відносно розмірів самих тіл. Розвиток методики розв'язання таких задач бере свій початок з опублікованих наприкінці ХІХ століття праць Герца.

Менше публікацій присвячено задачам про взаємодію тіл з узгодженими поверхнями, у яких розмір ділянок контакту співмірний з розмірами тіл. Такий вид взаємодії передбачає формулювання неklasичних контактних задач, до яких є незастосовною теорія Герца і які вимагають окремого дослідження. Методи розв'язання цих задач орієнтовані на певну конкретну конфігурацію поверхні спряження. Зокрема, розглянуто методи дослідження пружної взаємодії кругового циліндра та тіла з циліндричним отвором [7] і взаємодії кульового сегмента з поверхнею сферичної порожнини [1].

До класу контактних задач для тіл з узгодженими поверхнями належать задачі про локальні відшарування внаслідок різноманітних механічних чинників. Зокрема, локальна втрата контакту між двома трансверсально-ізотропними півпросторами під дією зосереджених сил і сил, розподілених по круговій ділянці, вивчалась в [19]. Плоска задача про формування зазорів між пружною площиною і жорсткою основою під дією зосередженої сили, розв'язана в [15]. Задачі про локальне порушення гладкого контакту між пружними шаром і півпростором внаслідок дії нормальних і зсувних зовнішніх зусиль розглядалися в [5, 12]. Розшарування між пружним шаром і жорсткою основою вивчалось в [10]. Розв'язано подібні задачі з урахуванням гравітаційних сил [11] і тертя на поверхні спряження [18]. Розглянуто розшарування між матрицею і кульовим включенням [8]. Також вивчалися проблеми локальної втрати контакту за дії термічних чинників, зокрема досліджено порушення контакту півпросторів внаслідок дії зосередженого стоку тепла [13], розглянуто термомеханічне розшарування тіл, зумовлене локальною неідеальністю теплового контакту [14, 16, 17].

Метою даної роботи є вивчення одностороннього безфрикційного контакту пружного півпростору та жорсткої термоізоляованої основи за дії точкового джерела охолодження у пружному тілі. Встановлено умову, при якій відбуватиметься локальне відшарування по круговій ділянці. Відповідна осесиметрична задача про відшарування зведена до парних інтегральних рівнянь. Проаналізовано залежності радіуса кругової ділянки відшарування від механічного навантаження, інтенсивності джерела охолодження і відстані джерела від поверхні контакту.

**Постановка задачі.** Розглянемо контакт пружного ізотропного однорідного півпростору та жорсткої основи під дією прикладеного на безмежності рівномірного тиску  $p$ . Тертям між тілами нехтуємо. Крім того, вважаємо,

що тіла взаємодіють за умов одностороннього контакту, тобто через поверхню спряження передаються лише стискувальні нормальні зусилля. Неможливість появи напружень розтягу реалізується шляхом розходження поверхонь тіл, тобто втрати контакту між ними. На відстані  $d$  від поверхні контакту в півпросторі діє точкове джерело охолодження інтенсивністю  $-\omega$ .

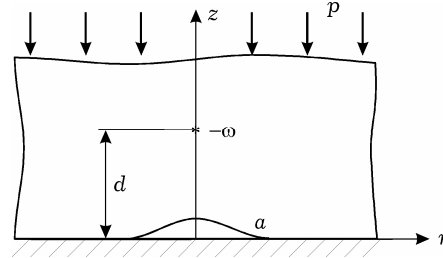


Рис.1

Вважаємо, що поверхня основи термоізольована. Схема контакту показана на рис. 1.

Передбачається, що внаслідок дії теплового чинника може відбутися локальне порушення контакту (відшарування півпростору від жорсткої основи) і утворитись міжповерхневий зазор (просвіт). Задача полягає у визначенні температури та напружено-деформованого стану півпростору; встановленні умов, при яких матиме місце відшарування; визначенні геометричних параметрів зазору та його впливу на контактні напруження.

**Задача про повний контакт.** Розглянемо повний контакт півпростору і жорсткої основи та визначимо, при яких умовах він порушується. З огляду на осьову симетрію задачу формулюємо в циліндричній системі координат (рис. 1). Для осесиметричного випадку розв'язок не залежить від кутової координати, а лише від координат  $r, z$ . Шуканими величинами є температура  $T^0$ , компоненти вектора переміщень  $u_r^0, u_z^0$  і тензора напружень  $\sigma_{rr}^0, \sigma_{rz}^0, \sigma_{zz}^0, \sigma_{\varphi\varphi}^0$ . Ці функції задовольняють [2] рівняння теплопровідності з правою частиною  $W(r, z) = -\frac{(-\omega)}{2\pi kr} \delta(z-d)\delta(r)$  ( $k$  – коефіцієнт теплопровідності,  $\delta(x)$  – дельта-функція Дірака), рівняння рівноваги в переміщеннях, співвідношення Дюгамеля – Неймана і такі граничні умови:

$$\begin{aligned} \sigma_{rz}^0 = 0, \quad u_z^0 = 0, \quad \frac{\partial T^0}{\partial z} = 0, \quad z = 0, \quad 0 < r < \infty, \\ \sigma_{rz}^0 = 0, \quad \sigma_{zz}^0 = -p, \quad T^0 = 0, \quad z = \infty, \quad 0 < r < \infty. \end{aligned}$$

Зауважимо, що повний контакт тіл відбувається лише за умови, що нормальні контактні напруження є нерозтягувальними:

$$\sigma_{zz}^0 \leq 0, \quad 0 \leq r < \infty. \quad (1)$$

Розв'язок сформульованої задачі отримуємо як суперпозицію розв'язків двох задач: тривіальної задачі про стиск півпростору рівномірним тиском  $p$  та задачі про дію джерела охолодження у півпросторі, поверхня якого термоізольована [6].

Температура та компоненти вектора переміщень даються формулами:

$$\begin{aligned} T^0 &= -\frac{\omega}{4\pi k} (R_+^{-1} + R_-^{-1}), \\ u_r^0 &= \frac{\nu pr}{2(1+\nu)\mu} + \frac{(1+\nu)(-\omega)\alpha_t}{8\pi(1-\nu)k} r(R_+^{-1} + R_-^{-1}), \\ u_z^0 &= -\frac{pz}{2(1+\nu)\mu} + \frac{(1+\nu)(-\omega)\alpha_t}{8\pi(1-\nu)k} r((z-d)R_+^{-1} + (z+d)R_-^{-1}), \\ R_+ &= \sqrt{r^2 + (z-d)^2}, \quad R_- = \sqrt{r^2 + (z+d)^2}, \end{aligned}$$

тут  $\nu$  – коефіцієнт Пуассона;  $\mu$  – модуль зсуву;  $\alpha_t$  – коефіцієнт лінійного теплового розширення.

Підставивши ці вирази у співвідношення Дюгамеля – Неймана, отримаємо

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}^0 &= \mu \frac{\omega \alpha_t (1 + \nu)}{4\pi k (1 - \nu)} [(1 + r^2 R_+^{-2}) R_+^{-1} + (1 + r^2 R_-^{-2}) R_-^{-1}], \\ \sigma_{\varphi\varphi}^0 &= \mu \frac{\omega \alpha_t (1 + \nu)}{4\pi k (1 - \nu)} [R_+^{-1} + R_-^{-1}], \\ \sigma_{zz}^0 &= -p + \mu \frac{\omega \alpha_t (1 + \nu)}{4\pi k (1 - \nu)} [(2 - r^2 R_+^{-2}) R_+^{-1} + (2 - r^2 R_-^{-2}) R_-^{-1}], \\ \sigma_{rz}^0 &= \mu \frac{\omega \alpha_t (1 + \nu)}{4\pi k (1 - \nu)} r [(1 + R_+^{-2})(z - d) R_+^{-1} + (1 + R_-^{-2})(z + d) R_-^{-1}].\end{aligned}$$

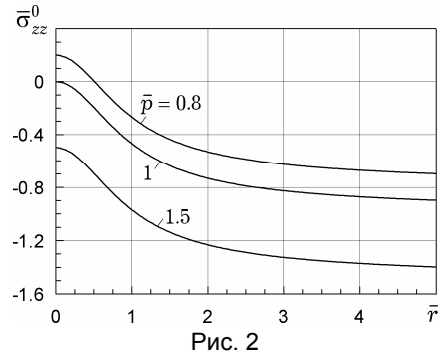
Випишемо нормальні напруження  $\sigma_{zz}^0$  на поверхні контакту  $z = 0$ :

$$\sigma_{zz}^0(r, 0) = -p + \mu \frac{\omega \alpha_t (1 + \nu)}{2\pi k (1 - \nu)} \frac{r^2 + 2d^2}{(r^2 + d^2)^{3/2}}. \quad (2)$$

Проаналізуємо розподіл контактних нормальних напружень  $\sigma_{zz}(r, 0)$  у випадку фіксованих інтенсивності джерела охолодження  $\omega$  і його відстані від поверхні  $d$  і різних значень прикладеного навантаження  $p$ . Для цього введемо безрозмірні величини

$$\begin{aligned}\bar{r} &= \frac{r}{d}, & \bar{p} &= p \frac{1 - \nu}{\mu} \cdot 10^3, \\ \bar{\sigma}_{zz}^0(r, 0) &= \sigma_{zz}^0(r, 0) \frac{1 - \nu}{\mu} \cdot 10^3, & \bar{\omega} &= \omega \frac{\alpha_t (1 + \nu)}{2\pi k d} \cdot 10^3.\end{aligned}$$

На рис. 2 зображено розподіл контактних нормальних напружень  $\bar{\sigma}_{zz}^0$  для значень зовнішнього тиску  $\bar{p} = 0.8, 1.0, 1.5$ . Контактні напруження є нерозтягувальними для  $\bar{p} = 1, \bar{p} = 1.5$ . Проте вони стають розтягувальними, коли  $\bar{p} = 0.8$ , у деякому околі точки  $r = 0$ . Це свідчить про те, що при певних величинах інтенсивності джерела охолодження  $\omega$  і стискувальних зусиль  $p$  умова (1) порушуватиметься і тому відбуватиметься локальне відшарування пружного півпростору від жорсткої основи.



Використовуючи залежність (2), визначимо діапазон зміни інтенсивності джерела охолодження, у якому виконуватиметься умова (1) і відбуватиметься повний контакт тіл:

$$0 < \omega \leq \frac{p\pi k (1 - \nu) d}{\mu \alpha_t (1 + \nu)}.$$

**Переформулювання задачі з урахуванням локального відшарування.** Розглянемо випадок, коли інтенсивність джерела охолодження задовольняє нерівність

$$\omega > \frac{p\pi k (1 - \nu) d}{\mu \alpha_t (1 + \nu)}.$$

Тоді в околі початку координат відбуватиметься відшарування і між тілами виникатиме круговий зазор радіуса  $a$ . У цьому випадку задача вимагає переформулювання з новими граничними умовами. Вважаємо, що зазор є термоізолюваний, а поверхня пружного тіла вздовж нього вільна від напружень. Враховуючи це, запишемо граничні умови контактної задачі про відшарування:

$$\begin{aligned}
-k \frac{\partial T}{\partial z} = 0, \quad \sigma_{rz}(r, 0) = 0, \quad u_z(r, 0) = 0, \quad z = 0, \quad a < r < \infty, \\
-k \frac{\partial T}{\partial z} = 0, \quad \sigma_{rz}(r, 0) = 0, \quad \sigma_{zz}(r, 0) = 0, \quad z = 0, \quad 0 < r < a, \\
\sigma_{rz} = 0, \quad \sigma_{zz} = -p, \quad T = 0, \quad z = \infty, \quad 0 < r < \infty.
\end{aligned}$$

Зауважимо, що радіус ділянки зазору  $a$  невідомий. Для його визначення використаємо умову неперервності контактних нормальних напружень

$$\sigma_{zz}(a, 0) = 0. \quad (3)$$

Для розв'язання сформульованої контактної задачі застосуємо метод суперпозиції. Подамо її розв'язок як суму двох доданків:

$$T = T^0 + T^1, \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0 + \sigma_{ij}^1, \quad u = u^0 + u^1, \quad i, j = r, z,$$

де індексом «0» позначено розв'язок контактної задачі у припущенні про повний контакт, індексом «1» – збурення, зумовлені відшаруванням.

Зауважимо, що виникнення ділянки відшарування не збурює температурного поля ( $T^1 \equiv 0$ ), оскільки зазор є термоізолюваний.

Для знаходження компонент вектора переміщень і тензора напружень, що описують збурення напружено-деформованого стану, зумовленого виникненням зазору, отримаємо рівняння

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u_r^1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r^1}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_r^1}{\partial z^2} - \frac{u_r^1}{r} + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial e^1}{\partial r} = 0, \\
\frac{\partial^2 u_z^1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z^1}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_z^1}{\partial z^2} + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial e^1}{\partial z} = 0,
\end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr}^1 &= 2\mu \left( \frac{\partial u_r^1}{\partial r} + \frac{\nu}{1-2\nu} e^1 \right), & \sigma_{\varphi\varphi}^1 &= 2\mu \left( \frac{u_r^1}{r} + \frac{\nu}{1-2\nu} e^1 \right), \\
\sigma_{zz}^1 &= 2\mu \left( \frac{\partial u_z^1}{\partial z} + \frac{\nu}{1-2\nu} e^1 \right), & \sigma_{rz}^1 &= \mu \left( \frac{\partial u_r^1}{\partial z} + \frac{\partial u_z^1}{\partial r} \right), \\
e^1 &= \frac{\partial u_r^1}{\partial r} + \frac{u_r^1}{r} + \frac{\partial u_z^1}{\partial z},
\end{aligned} \quad (5)$$

і граничні умови

$$\sigma_{rz}^1 = 0, \quad z = 0, \quad 0 < r < +\infty, \quad u_z^1 = 0, \quad z = 0, \quad a < r < \infty, \quad (6)$$

$$\sigma_{zz}^1 = p - \mu \frac{\omega\alpha_t(1+\nu)}{2\pi k(1-\nu)} \frac{r^2 + 2d^2}{(r^2 + d^2)^{3/2}}, \quad z = 0, \quad 0 < r < a, \quad (7)$$

$$\sigma_{zz}^1 = 0, \quad z = +\infty, \quad \sigma_{rz}^1 = 0, \quad z = +\infty. \quad (8)$$

#### Інтегральні рівняння задачі.

**Побудова інтегральних подань напружень і переміщень з використанням перетворення Ганкеля.** Застосувавши інтегральні перетворення Ганкеля [2] до рівнянь рівноваги (4), отримаємо систему звичайних диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \bar{u}_r^1}{\partial z^2} - \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \xi^2 \bar{u}_r^1 - \frac{\xi}{1-2\nu} \frac{\partial \bar{u}_r^1}{\partial z} = 0, \\
\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \frac{\partial^2 \bar{u}_z^1}{\partial z^2} - \xi^2 \bar{u}_z^1 + \frac{\xi}{1-2\nu} \frac{\partial \bar{u}_z^1}{\partial z} = 0,
\end{aligned} \quad (9)$$

$$\text{де } \bar{u}_r^1(\xi, z) = \int_0^\infty r u_r^1(r, z) J_1(\xi r) dr, \quad \bar{u}_z^1(\xi, z) = \int_0^\infty r u_z^1(r, z) J_0(\xi r) dr.$$

Розв'язавши систему (9), отримаємо

$$\bar{u}_r^1 = \left( d_1 z + \frac{1}{\xi} [\xi d_2 - (3 - 4\nu) d_1] \right) e^{-\xi z} + \left( d_3 z + \frac{1}{\xi} [\xi d_3 - (3 - 4\nu) d_4] \right) e^{\xi z}, \quad (10)$$

$$\bar{u}_z^1 = (d_1 z + d_2) e^{-\xi z} + (-d_3 z + d_4) e^{\xi z}. \quad (11)$$

Використавши теорему обернення перетворень Ганкеля, матимемо

$$u_r^1(r, z) = \int_0^\infty \xi \bar{u}_r^1(r, z) J_1(\xi r) d\xi, \quad u_z^1(r, z) = \int_0^\infty \xi \bar{u}_z^1(r, z) J_0(\xi r) d\xi. \quad (12)$$

Для визначення невідомих функцій  $d_1(\xi)$ ,  $d_2(\xi)$ ,  $d_3(\xi)$ ,  $d_4(\xi)$ , що входять у подання (10), (11), використаємо граничні умови задачі (6)–(8).

З першої з умов (8) випливає, що

$$d_3 = 0, \quad d_4 = 0. \quad (13)$$

Введемо позначення

$$a_1 = \frac{1}{\xi} [\xi d_2 - (3 - 4\nu) d_1], \quad a_2 = d_2, \quad a_0 = \frac{1}{3 - 4\nu} (a_2 - a_1). \quad (14)$$

Урахувавши (13), (14), із формул (12), (5) отримаємо такі вирази для  $u_z^1$ ,  $u_r^1$ ,  $\sigma_{zz}^1$ :

$$\begin{aligned} u_r^1(r, z) &= \int_0^\infty \xi (a_0 \xi z + a_1) e^{-\xi z} J_1(\xi r) d\xi, \\ u_z^1(r, z) &= \int_0^\infty \xi (a_0 \xi z + a_2) e^{-\xi z} J_0(\xi r) d\xi, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\sigma_{zz}^1 = \frac{2\mu}{1 - 2\nu} \int_0^\infty \xi^2 \{ a_0(1 - \nu) - a_2(1 - \nu) + \nu a_1 - a_0 \xi z (1 - 2\nu) \} e^{-\xi z} J_0(\xi r) d\xi. \quad (16)$$

Задовольнивши першу з умов (6), отримаємо

$$a_0 - (a_1 + a_2) = 0. \quad (17)$$

З (17) і третього зі співвідношень (14) виразимо  $a_0$  і  $a_1$  через  $a_2$ :

$$a_1 = \frac{2\nu - 1}{2(1 - \nu)} a_2, \quad a_0 = \frac{1}{2(1 - \nu)} a_2. \quad (18)$$

Врахувавши (18) у формулах (15)–(17), визначаємо напруження  $\sigma_{zz}^1$  і переміщення  $u_z^1$  на поверхні  $z = 0$ :

$$\begin{aligned} u_z^1(r, 0) &= \int_0^\infty \xi a_2(\xi) J_0(\xi r) d\xi, \\ \sigma_{zz}^1(r, 0) &= -\frac{\mu}{1 - \nu} \int_0^\infty \xi^2 a_2(\xi) J_0(\xi r) d\xi. \end{aligned}$$

Задовольнивши за допомогою (18) другу з граничних умов (6) і граничну умову (7), отримуємо парні інтегральні рівняння відносно функції  $a_2(\xi)$ :

$$\int_0^\infty \xi a_2(\xi) J_0(\xi r) d\xi = 0, \quad a < r < \infty, \quad (19)$$

$$\int_0^\infty \xi^2 a_2(\xi) J_0(\xi r) d\xi = p \frac{1 - \nu}{\mu} - \omega \frac{\alpha_t(1 + \nu)}{2\pi k} \left[ \frac{1}{\sqrt{r^2 + d^2}} + \frac{d^2}{(\sqrt{r^2 + d^2})^3} \right], \quad 0 \leq r < a. \quad (20)$$

**Рівняння Абеля і формула обернення.** Для розв'язання парних інтегральних рівнянь (19), (20) застосуємо метод підстановок Уфлянда [9], згідно з яким невідому функцію подаємо у вигляді

$$a_2(\xi) = \frac{1}{\xi} \int_0^a \varphi(t) \sin(\xi t) dt. \quad (21)$$

З використанням розривного інтеграла Вебера та властивостей функції Бесселя неважко переконатись, що функція (21) задовольняє рівняння (19) тотожно. Підставивши (21) у рівняння (20), отримуємо інтегральне рівняння Абеля відносно функції  $\varphi(r)$ :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \int_0^r \frac{t\varphi(t)}{\sqrt{r^2 - t^2}} dt = f(r),$$

де  $f(r)$  – права частина рівняння (20).

За допомогою відомої формули обернення інтегрального рівняння Абеля [4, с. 364] визначаємо функцію  $\varphi(r)$ :

$$\begin{aligned} \varphi(r) = \frac{2}{\pi} \int_0^r \frac{\rho f(\rho)}{\sqrt{r^2 - \rho^2}} d\rho = -2p \frac{1-\nu}{\pi\mu} r + \\ + \omega \frac{\alpha_t(1+\nu)}{\pi^2 k} \left( \arctg \frac{r}{d} + \frac{rd^2}{d(r^2 + d^2)} \right). \end{aligned}$$

За відомою функцією  $\varphi(r)$  компоненти напружено-деформованого стану в кожній точці півпростору можна визначити на підставі формул (21), (18), (15), (16).

**Аналіз результатів.** Випишемо вирази для нормальних переміщень і напружень на поверхні пружного півпростору:

$$\begin{aligned} u_z(r, 0) = -\frac{2p(1-\nu)}{\pi\mu} \sqrt{a^2 - r^2} + \frac{\omega\alpha_t(1+\nu)}{\pi^2 k} \int_r^a \frac{\arctg \frac{t}{d}}{\sqrt{t^2 - r^2}} dt + \\ + \frac{\omega\alpha_t(1+\nu)d}{\pi^2 k \sqrt{r^2 + d^2}} \arctg \frac{\sqrt{a^2 - r^2}}{\sqrt{r^2 + d^2}}, \quad 0 < r < a, \end{aligned}$$

$$u_z(r, 0) = 0, \quad a \leq r < \infty; \quad (22)$$

$$\sigma_{zz}(r, 0) = 0, \quad 0 < r < a,$$

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}(r, 0) = -p + \frac{\mu\omega\alpha_t(1+\nu)}{2\pi k(1-\nu)} \left( \frac{1}{\sqrt{r^2 + d^2}} + \frac{d^2}{(\sqrt{r^2 + d^2})^3} \right) - \frac{\mu}{1-\nu} \left( \frac{1}{\sqrt{r^2 - a^2}} \times \right. \\ \times \left[ \frac{2p(1-\nu)a}{\pi\mu} - \frac{\omega\alpha_t(1+\nu)}{\pi^2 k} \left( \arctg \frac{a}{d} + \frac{ad}{a^2 + d^2} \right) \right] - \frac{2p(1-\nu)}{\pi\mu} \times \\ \times \arcsin \frac{a}{r} + \frac{\omega\alpha_t(1+\nu)}{\pi^2 k} \left( \frac{\arctg \frac{a\sqrt{d^2 + r^2}}{d\sqrt{r^2 - a^2}}}{\sqrt{r^2 + d^2}} + \frac{ad\sqrt{r^2 - a^2}}{r^2(d^2 + a^2)} + \right. \\ \left. + \frac{d^2 \arctg \frac{a\sqrt{d^2 + r^2}}{d\sqrt{r^2 - a^2}}}{(\sqrt{r^2 + d^2})^3} - \frac{ad^3\sqrt{r^2 - a^2}}{r^2(d^2 + a^2)(r^2 + d^2)} \right) \Bigg) \\ a \leq r < \infty. \quad (23) \end{aligned}$$

Підставивши розв'язок (23) в умову (3), отримаємо рівняння для визначення радіуса зазору  $a$ :

$$-p + \frac{\mu\omega\alpha_t(1+\nu)}{2\pi k a(1-\nu)} \left( \arctg \frac{a}{d} + \frac{ad}{(a^2+d^2)} \right) = 0. \quad (24)$$

При обчисленні інтеграла  $\int_r^a \frac{\arctg \frac{t}{d}}{\sqrt{t^2-r^2}} dt$  у виразі для переміщень (22) використано квадратурні формули Гаусса.

**Аналіз контактних параметрів.** Проаналізуємо спочатку контактні параметри системи у випадку фіксованого розташування джерела охолодження ( $d = \text{const}$ ). Для цього введемо такі безрозмірні змінні:

$$\begin{aligned} \bar{a} &= \frac{a}{d}, & \bar{r} &= \frac{r}{d}, & \bar{\omega} &= \frac{\omega\alpha_t(1+\nu)}{2\pi k d} \cdot 10^3, \\ \bar{p} &= p \frac{1-\nu}{m} \cdot 10^3, & \bar{u}_z &= \frac{u_z}{d} \cdot 10^3, & \bar{\sigma}_{zz} &= \sigma_{zz} \frac{1-\nu}{\mu} \cdot 10^3. \end{aligned}$$

Рис. 3 ілюструє залежність радіуса зазору  $\bar{a}$  від навантаження  $\bar{p}$  при фіксованій інтенсивності джерела охолодження  $\bar{\omega} = 1$ . Бачимо, що зі збільшенням навантаження радіус зазору  $\bar{a}$  монотонно спадає і при  $\bar{p} = 2$  стає рівний нулеві, що означає перехід до повного контакту (горизонтальна ділянка графіка).

Зі збільшенням інтенсивності джерела охолодження радіус зазору  $\bar{a}$  монотонно зростає (рис. 4): чим менше навантаження  $\bar{p}$ , тим швидшим є це зростання.

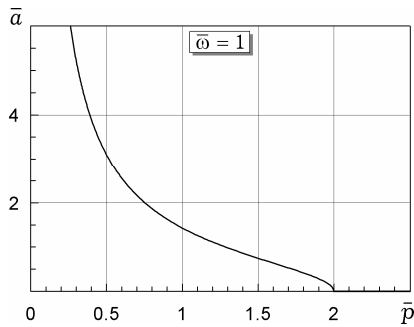


Рис. 3

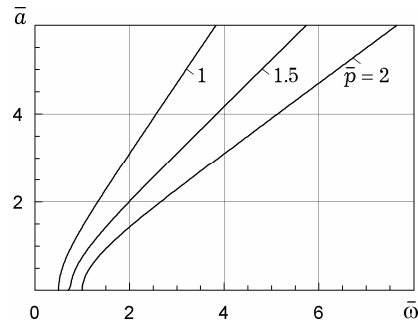


Рис. 4

На рис. 5 зображено форму зазорів, що утворюються при інтенсивностях джерела охолодження  $\bar{\omega} = 0.69, 1.04, 3.19$  і фіксованому навантаженні  $\bar{p} = 1$ . Збільшення інтенсивності джерела зумовлює зростання радіуса і висоти зазору.

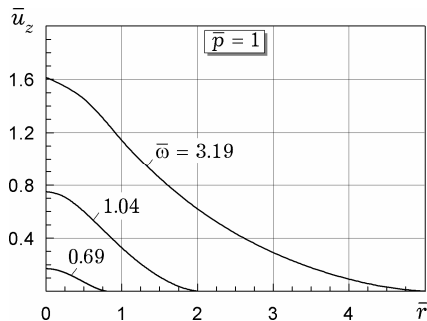


Рис. 5

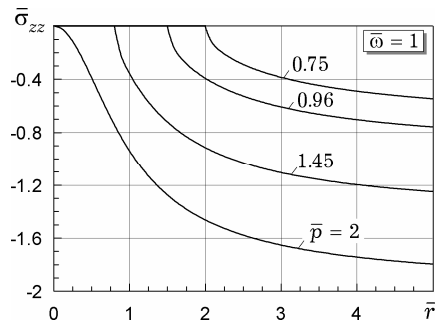


Рис. 6

На рис. 6 показано розподіл нормальних контактних напружень для навантажень  $\bar{p} = 0.75, 0.96, 1.45, 2.0$  при інтенсивності джерела охолодження  $\bar{\omega} = 1$ . Горизонтальні ділянки графіків відображають нульові нормальні напруження на поверхні зазору. При віддаленні від нього контактні напруження спадають до напружень  $\sigma_{zz}$ , що задані на нескінченності.

Для того щоб дослідити поведінку контактної пари в залежності від розміщення джерела охолодження по відношенню до границі тіла, введемо інші безрозмірні змінні:

$$\begin{aligned} \tilde{a} &= \frac{a}{a_0}, & \tilde{d} &= \frac{d}{a_0}, & \tilde{r} &= \frac{r}{a_0}, & \tilde{\omega} &= \omega \frac{\alpha_t(1+\nu)}{2\pi k a_0} \cdot 10^3, \\ \tilde{u}_z &= \frac{u_z}{a_0} \cdot 10^3, & \tilde{p} &= p \frac{1-\nu}{\mu} \cdot 10^3, & \tilde{\sigma}_{zz} &= \sigma_{zz} \frac{1-\nu}{\mu} \cdot 10^3, \end{aligned}$$

де  $a_0$  – певний фіксований радіус зазору.

Рис. 7 ілюструє, як повинна зростати інтенсивність джерела охолодження  $\tilde{\omega}$  з його віддаленням від поверхні для того, щоб радіус зазору залишався незмінним і дорівнював  $a_0$  ( $\tilde{a} = 1$ ). Бачимо, що ця залежність  $\tilde{\omega}$  від  $\tilde{d}$  має чітко виражений нелінійний характер для діапазону  $\tilde{d} < 1.5$ , тобто, коли відстань від джерела до поверхні не перевищує півтора радіуса зазору. Натомість при  $\tilde{d} > 1.5$  ця залежність близька до лінійної.

На рис. 8 зображено залежність радіуса зазору  $\tilde{a}$  від відстані джерела охолодження до поверхні контакту  $\tilde{d}$  у випадку фіксованих інтенсивності джерела  $\tilde{\omega} = 1$  і навантаження  $\tilde{p} = 1$ . Як випливає з графіка, ця залежність є нелінійною. При  $\tilde{a} = 2$  відбувається закриття зазору. Зазначимо, що для побудови цього графіка трансцендентне рівняння (24) розв'язано чисельно методом поділу відрізка навпіл.

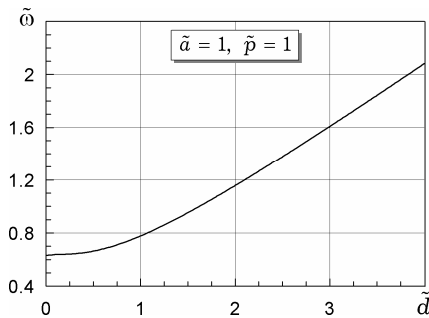


Рис. 7

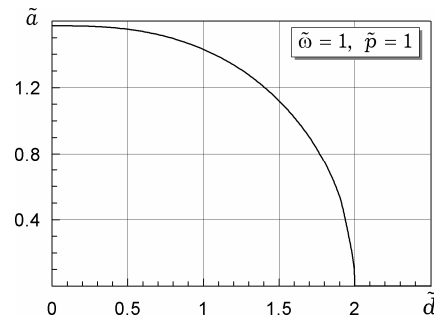


Рис. 8

**Висновки.** Робота присвячена вивченню явища локальної втрати контакту між пружним ізотропним півбезмежним тілом і жорсткою основою внаслідок дії приповерхневого точкового джерела охолодження. Відповідна контактна задача сформульована в рамках лінійної теорії термопружності для осесиметричного випадку. Задачу зведено до парних інтегральних рівнянь, асоційованих із перетворенням Ганкеля, розв'язок яких отримано в аналітичному вигляді. Невідомий радіус ділянки відшарування визначено з трансцендентного рівняння, отриманого з умови неперервності нормальних контактних напружень.

Вивчено вплив відшарування на напружено-деформований стан півпростору, проаналізовано залежність радіуса і висоти утвореного зазору від силового і термічного навантаження. Виявлено, що зі зростанням механічного навантаження зазор зменшується, а із зростанням інтенсивності джерела охолодження – зростає, причому ці залежності мають нелінійний характер.



1. Александров В. М., Пожарский Д. А. Неклассические пространственные задачи механики контактных взаимодействий упругих тел. – Москва: Факториал, 1998. – 228 с.
2. Гриліцький Д. В., Шелестовський Б. Г. Осесиметричні контактні задачі термопружності. – Львів: Вища шк., 1974. – 112 с.
3. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. – Москва: Мир, 1989. – 510 с.
4. Курант Р. Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 2 т. – Москва: Наука, 1970. – Т. 2. – 672 с.
5. Ламзюк В. Д., Приварников А. К. Упругая деформация неоднородного многослойного пакета при неполном контакте его слоев // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1977. – № 7. – С. 618–621.
6. Новацкий В. Вопросы термоупругости. – Москва: Изд-во АН СССР, 1962. – 364 с.
7. Панасюк В. В., Теплий М. Й. Деякі контактні задачі теорії пружності. – Київ: Наук. думка, 1975. – 196 с.
8. Попов Г. Я., Процеров Ю. С., Вернодубов А. М., Пугачев А. В. Осесимметричная задача о контакте упругих тел по сферическим поверхностям // Теорет. и прикл. механика. – 2001. – Вып. 33. – С. 7–12.
9. Уфлянд Я. С. Метод парных уравнений в задачах математической физики. – Ленинград: Наука, 1977. – 220 с.
10. Civelek M. B., Erdogan F. Interface separation in a frictionless contact problem for an elastic layer // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1976. – **43**. – P. 175–177.
11. Gesit M. R. A tensionless contact without friction between an elastic layer and elastic foundation // Int. J. Solids Struct. – 1980. – **16**. – P. 387–396.
12. Keer L. M., Chantaramungkorn K. Loss of contact between an elastic layer and half-space // J. Elasticity. – 1979. – **2**. – P. 191–197.
13. Kit H. S., Monastyrskyy B. Ye. Thermoelastic interaction of two semi-infinite bodies under condition of local contact absence // Therm. Stresses'99: Proc. 3<sup>rd</sup> Int. Congr. on Thermal Stresses, Cracow (Poland), June 13–17, 1999. – Cracow: Cracow. Univ. of Techn., 1999. – P. 123–126.
14. Krishtafovich A. A., Martynyak R. M. Lamination of anisotropic half-spaces in the presence of contact thermal resistance // Int. Appl. Mech. – 1999. – **35**, No. 2. – P. 159–164.  
Те саме: Криштафович А. А., Мартиняк Р. М. О расслоении анизотропных полупространств при наличии контактного термического сопротивления // Прикл. механика. – 1999. – **35**, № 2. – С. 54–59.
15. Machyshyn I. M., Martynyak R. M. Variation of gaps between an elastic body and an irregular base under the action of concentrated forces // Materials Sci. – 2000. – **36**, No. 6. – P. 863–869.  
Те саме: Мачишин І. М., Мартиняк Р. М. Зміна зазорів між пружним тілом і нерівною основою під дією зосередженої сили // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2000. – **36**, № 6. – С. 59–64.
16. Martynyak R. M. Thermal opening of an initially closed interface crack under conditions of imperfect thermal contact between its lips // Materials Sci. – 1999. – **35**, No. 5. – P. 612–622.  
Те саме: Мартиняк Р. М. Термічне розкриття початкової міжфазної тріщини за неідеального теплового контакту берегів // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1999. – **35**, № 5. – С. 14–22.
17. Martynyak R. M., Chumak K. A. Thermoelastic delamination of bodies in the presence of a heat-conducting filler of the intercontact gap // Materials Sci. – 2009. – **45**, No. 4. – P. 513–522.  
Те саме: Мартиняк Р. М., Чумак К. А. Термопружне розшарування тіл за наявності теплопровідного заповнювача міжконтактного просвіту // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2009. – **45**, № 4. – С. 45–52.
18. Schmueser D., Comninou M., Dundurs J. Separation and slip between a layer and substrate caused by a tensile load // Int. J. Eng. Sci. – 1980. – **18**. – P. 1149–1155.
19. Selvendurai A. P. S. On an invariance principle for unilateral contact at a bimaterial elastic interface // Int. J. Eng. Sci. – 2003. – **41**. – P. 721–739.

**ОСЕЦИММЕТРИЧНАЯ ЗАДАЧА ОБ ОТСЛОЕНИИ УПРУГОГО  
ПОЛУПРОСТРАНСТВА ОТ ЖЕСТКОГО ОСНОВАНИЯ  
ПРИ ДЕЙСТВИИ ТОЧЕЧНОГО ИСТОЧНИКА ОХЛАЖДЕНИЯ**

*Рассмотрена осесимметричная задача об одностороннем безфрикционном контакте упругого полупространства и жесткого термоизолированного основания при действии приповерхностного источника охлаждения, который вызывает отслоение границы упругого тела по круговой области. Получено соотношение параметров, при которых имеет место локальная потеря контакта, найдены и проанализированы компоненты напряженно-деформированного состояния и распределение температуры.*

**AXIALLY SYMMETRIC PROBLEM ON LOCAL  
SEPARATION OF ELASTIC HALF-SPACE FROM RIGID  
BASE DUE TO POINT SOURCE OF COOLING**

*An axially symmetric problem on unilateral frictionless contact of elastic half-space and rigid thermally insulated base under the action of near-surface source of cooling, which leads to a local loss of contact through a circular region is considered. The range of parameters, for which the local loss of contact takes place, is found. The components of the stress-strain state and temperature distribution are found and analyzed.*

Ін-т прикл. проблем механіки і математики  
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано  
06.10.09