

## ДОСЛІДЖЕННЯ ВПЛИВУ ТИПУ ДЕФЕКТУ ТА УМОВ ЙОГО ВЗАЄМОДІЇ З МАТРИЦЕЮ НА РОЗСІЯНЕ НИМ ХВИЛЬОВЕ ПОЛЕ ЗА АНТИПЛОСКОЇ ДЕФОРМАЦІЇ

*Досліджується вплив на хвильове поле, розсіяне тонким смуговим дефектом (тріщиною або включенням), та умов його взаємодії з матрицею. Вважається, що матриця перебуває в умовах антипласкої деформації і в ній поширюються плоскі гармонічні хвилі поздовжнього зсуву. Для визначення хвильового поля формулюються і розв'язуються методом розривних розв'язків граничні задачі для тіла з відповідним дефектом. Головна увага приділена такій характеристиці розсіяного поля, як повний поперечний переріз розсіювання. Встановлено, що існують кути поширення хвилі, при яких повні поперечні перерізи розсіювання суттєво відрізняються для дефектів різного типу і різних умов взаємодії між дефектом і матрицею. Це доводить можливість встановлення типу дефекту і умов його взаємодії з матрицею за допомогою повного поперечного перерізу розсіювання.*

Розвиток і вдосконалення засобів неруйнівного контролю і дефектоскопії вимагає розв'язання проблеми визначення геометричних і механічних параметрів неоднорідностей, а також умов їх взаємодії з матрицею. Оскільки інформація про властивості неоднорідностей міститься в характеристиках розсіяних полів, то важливе значення мають алгоритми розв'язання задач стосовно їх визначення. З точки зору механіки руйнування найбільш небезпечними неоднорідностями є дефекти типу тріщин і тонких включень. Тому останнім часом появилось багато методів визначення хвильових полів, розсіяних подібними дефектами. Розв'язання цих задач асимптотичними методами можна знайти в роботах [2, 14], де вивчається амплітуда розсіювання хвиль, відбитих від тонкого включення малої жорсткості. Крім того, на випадок тонких включень і тріщин у роботах [4–6, 15, 16] поширено метод нульового поля або Т-матриць.

У поданій роботі пропонується досліджувати поле розсіяних від тріщин і включень SH-хвиль за допомогою розривних розв'язків рівняння Гельмгольца. Це дослідження ґрунтується на знайдених розривних розв'язках граничних задач про розсіяння SH-хвиль тріщиною або тонким включенням [7, 8, 10, 11]. Головна увага приділена визначенню такої важливої характеристики розсіяного хвильового поля, як повний поперечний переріз розсіювання (ПППР), введеної в [3, 13]. Перевага цієї характеристики у порівнянні, наприклад, з амплітудою розсіювання полягає в тому, що ПППР не залежить від кута спостереження, а визначається тільки частотою і напрямком поширення розсіяної хвилі.

**Постановка задачі.** Нехай пружне тіло (матриця) перебуває в умовах антипласкої деформації і містить тонкий смуговий дефект. Ним може бути тріщина, яка у площині  $xOy$  займає відрізок  $|x| \leq a, y = 0$ , або тонке включення товщини  $h \ll a$ , серединна поверхня якого у вказаній площині співпадає з тим же відрізком. У матриці поширюються плоскі хвилі поздовжнього зсуву, які викликають в ній переміщення

$$w_0(x, y) = A \exp(i\alpha_2(x \cos \theta_0 + y \sin \theta_0)), \quad (1)$$

де  $\alpha_2^2 = \frac{\omega^2}{c_2^2}$ ;  $c_2^2 = \frac{G_1}{\rho_1}$ ;  $G_1, \rho_1$  – модуль зсуву та густина матриці;  $\omega$  – частота коливань;  $\theta_0$  – кут між додатним напрямом осі  $Ox$  і напрямом поширення хвилі. Тут і надалі всі співвідношення записуємо для амплітудних значень, множник  $e^{-i\omega t}$ , який визначає залежність від часу, відкидаємо.

Нехай  $w_1(x, y)$  – переміщення у полі розсіяної хвилі. За антиплоскої деформації  $w_1(x, y)$  задовольняє рівняння Гельмгольца [9]

$$\Delta w_1 + \alpha_2^2 w_1 = 0. \quad (2)$$

У випадку, коли дефектом є включення, з огляду на його малу товщину граничні умови формулюються відносно його серединної поверхні і залежать від умов його взаємодії з матрицею. Якщо одна зі сторін включення ( $y = -0$ ) повністю зчеплена з матрицею, а друга ( $y = +0$ ) – відшарована і з матрицею не взаємодіє, то на серединній площині включення мають розриви як напруження, так і переміщення. Для їх стрибків уведемо позначення

$$\begin{aligned} \langle \tau_{yz}^1 \rangle &= \tau_{yz}^1(x, +0) - \tau_{yz}^1(x, -0) = \chi_1(x), \\ \langle w_1 \rangle &= w_1(x, +0) - w_1(x, -0) = \chi_2(x), \end{aligned} \quad (3)$$

де  $\chi_1(x)$  – невідомий стрибок дотичних напружень на включенні;  $\chi_2(x)$  – невідомий стрибок переміщень. При цьому повинна виконуватись рівність

$$\chi_2(\pm a) = 0. \quad (4)$$

Крім цього, на зчепленій і відшарованій поверхнях включення мають місце такі рівності:

$$w_1(x, -0) = u_0(x) - w_0(x, 0), \quad \tau_{yz}^1(x, +0) = -\tau_{yz}^0(x, 0), \quad (5)$$

де  $u_0(x)$  – зсув серединної площини включення.

Якщо включення пружне, то зсув серединної площини пружного включення знаходимо з відповідного рівняння теорії пружних пластин [1, 12]:

$$u_0''(x) + k_0^2 u_0(x) = -\frac{\chi_1(x)}{hG_0}, \quad -a < x < a, \quad k_0^2 = \frac{\omega^2 \rho_0}{G_0}, \quad (6)$$

де  $\rho_0$  – густина матеріалу включення;  $G_0$  – модуль зсуву матеріалу включення. Рівняння (6) розглядаємо з граничними умовами

$$u_0'(\pm a) = 0. \quad (7)$$

Умови (7) означають, що взаємодією з матрицею на бічній поверхні включення нехтуємо.

У випадку абсолютно жорсткого включення маємо, що

$$u_0(x) = d = \text{const}.$$

Невідому сталу  $d$  знаходимо з рівняння руху включення як жорсткого тіла (з масою  $m$ ):

$$-\omega^2 m d = \int_{-a}^a \chi_2(\eta) d\eta.$$

Як показано у [7, 8], розв'язки граничних задач для абсолютно жорстких включень можуть бути отримані граничним переходом  $g = \frac{G_1}{G_0} \rightarrow 0$  і тому надалі окремо розглядатись не будуть.

У випадку здійснення на обох поверхнях включення умов повного зчеплення розрив буде мати лише дотичне напруження і з (3), (5) отримуємо

$$\langle \tau_{yz}^1 \rangle = \chi_1(x), \quad w_1(x, \pm 0) = u_0(x) - w_0(x, 0). \quad (8)$$

Якщо дефектом є тріщина, то її поверхню вважаємо вільною від напружень, що приводить до рівності

$$\tau_{yz}^1(x, +0) = -\tau_{yz}^0(x, 0). \quad (9)$$

Крім того, повинна виконуватись умова (4).

**Розв'язання граничних задач.** Оскільки переміщення і напруження, викликані відбитою від дефекту хвилею, мають розриви на його поверхні, то їх доцільно подати у вигляді розривного розв'язку рівняння Гельмгольца. У випадку відшарованого включення ці подання для переміщень і напружень мають вигляд [10]

$$\begin{aligned}
 w_1(x, y) &= \int_{-a}^a \frac{\chi_1(\eta)}{G_1} r_2(\eta - x, y) d\eta + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-a}^a \chi_2(\eta) r_2(\eta - x, y) d\eta, \\
 \tau_{yz}^1(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} \int_{-a}^a \chi_1(\eta) r_2(\eta - x, y) d\eta + G_1 \int_{-a}^a \chi_2'(\eta) \frac{\partial}{\partial \eta} r_2(\eta - x, y) d\eta - \\
 &\quad - \alpha_2^2 G_1 \int_{-a}^a \chi_2'(\eta) r_2^*(\eta - x, y) d\eta, \\
 \tau_{xz}^1(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} \int_{-a}^a \chi_1(\eta) r_2(\eta - x, y) d\eta + \frac{\partial}{\partial y} G_1 \int_{-a}^a \chi_2'(\eta) r_2(\eta - x, y) d\eta, \quad (10)
 \end{aligned}$$

де

$$r_2 = r_2(\eta - x, y) = -\frac{i}{4} H_0^{(1)} \left[ \alpha_2 \sqrt{(\eta - x)^2 + y^2} \right], \quad \frac{\partial r_2^*}{\partial x} = r_2,$$

$H_0^{(1)}(z)$  – функція Ганкеля.

Якщо обидві сторони включення повністю зчеплені з матрицею, то у формулах (10) необхідно покласти  $\chi_2(x) \equiv 0$ . У випадку, коли дефектом є тріщина, тоді відповідно покладемо  $\chi_1(x) \equiv 0$ .

Формули (10) визначають переміщення та напруження в матриці через невідомі стрибки напружень і переміщень. Щоб визначити ці стрибки, слід шляхом реалізації відповідних граничних умов на дефекті (5), (8), (9) отримати інтегральне рівняння. У випадку пружного включення необхідно також визначити переміщення його серединної площини. Позначивши

$$u(\zeta) = \frac{u_0(a\zeta)}{a}, \quad \varphi_1(\zeta) = \frac{\chi_1(a\zeta)}{G_1}, \quad \zeta = \frac{x}{a},$$

розв'язок одновимірної крайової задачі (6), (7) визначимо формулою

$$u(\zeta) = -\frac{g}{2\varepsilon} \int_{-1}^1 \varphi_1(\tau) G(\tau, \zeta) d\tau, \quad (11)$$

де  $G(\tau, \zeta)$  – функція Гріна відповідної задачі, яка має вигляд

$$\begin{aligned}
 G(\tau, \zeta) &= \frac{\sin q_0 |\tau - \zeta|}{2q_0} + \\
 &\quad + \frac{\cos q_0 (1 + \zeta) \cos q_0 (1 - \tau) + \cos q_0 (1 + \tau) \cos q_0 (1 - \zeta)}{2q_0 \sin 2q_0},
 \end{aligned}$$

$$q_0^2 = \alpha_0^2 \frac{g}{\rho}, \quad g = \frac{G_1}{G_0}, \quad \alpha_0 = a\alpha_2, \quad \rho = \frac{\rho_1}{\rho_0}.$$

У випадку відшарованого включення систему інтегральних рівнянь для визначення стрибків запишемо як

$$\begin{aligned}
 \psi_1(\zeta) &+ \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\psi_1(\tau)}{\tau - \zeta} d\tau + \\
 &\quad + \frac{g}{4\varepsilon} \int_{-1}^1 \psi_1(\tau) \operatorname{sgn}(\tau - \zeta) d\tau + \frac{g}{4\varepsilon} \int_{-1}^1 \psi_2(\tau) \operatorname{sgn}(\tau - \zeta) d\tau +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \psi_1(\tau) \left\{ 2T(\tau - \zeta) - \frac{\pi g R(\tau, \zeta)}{\varepsilon} - 2\pi \alpha_0 L(\tau - \zeta) \right\} d\tau + \\
& + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \psi_2(\tau) \left\{ 2\pi \alpha_0 L(\tau - \zeta) - \frac{\pi g}{\varepsilon} R(\tau, \zeta) \right\} d\tau = f_2(\zeta) - f_1(\zeta), \\
\psi_2(\zeta) - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\psi_2(\tau)}{\tau - \zeta} d\tau - \\
& - \frac{g}{4\varepsilon} \int_{-1}^1 \psi_1(\tau) \operatorname{sgn}(\tau - \zeta) d\tau - \frac{g}{4\varepsilon} \int_{-1}^1 \psi_2(\tau) \operatorname{sgn}(\tau - \zeta) d\tau + \\
& + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \psi_1(\tau) \left\{ \frac{\pi g}{\varepsilon} R(\tau, \zeta) - 2\pi \alpha_0 L(\tau - \zeta) \right\} d\tau - \\
& - \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \psi_2(\tau) \left\{ 2T(\tau - \zeta) - \frac{\pi g}{\varepsilon} R(\tau - \zeta) - 2\pi \alpha_0 L(\tau - \zeta) \right\} d\tau = \\
& = f_1(\zeta) + f_2(\zeta), \\
\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \psi_1(\tau) \ln(\tau + 1) d\tau + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \psi_1(\tau) \left\{ S(\tau + 1) + \frac{\pi g}{\varepsilon} G(\tau, -1) \right\} d\tau + \\
& + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \psi_2(\tau) \ln(\tau + 1) d\tau + \\
& + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \psi_2(\tau) \left\{ S(\tau + 1) + \frac{\pi g}{\varepsilon} G(\tau, -1) \right\} d\tau = f_0, \\
\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \psi_1(\tau) d\tau - \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \psi_2(\tau) d\tau = 0. \tag{12}
\end{aligned}$$

Тут позначено

$$\begin{aligned}
f_0 &= -\alpha \exp(-i\alpha x_0 \cos \theta_0), & f_1(\zeta) &= -i\alpha x_0 \cos \theta_0 \exp(i\alpha x_0 \zeta \cos \theta_0), \\
f_2(\zeta) &= -i\alpha x_0 \sin \theta_0 \exp(i\alpha x_0 \zeta \cos \theta_0), \\
\zeta &= \frac{x}{a}, & \tau &= \frac{\eta}{a}, & \alpha &= \frac{A}{a}, & \varphi_1(\zeta) &= \frac{\chi_1(a\zeta)}{G_1}, & \varphi_2'(\tau) &= \chi_2'(a\tau), \\
\varphi_1(\tau) &= \psi_1(\tau) + \psi_2(\tau), & \varphi_2(\tau) &= \psi_1(\tau) - \psi_2(\tau).
\end{aligned}$$

Виведення системи (12) докладно (включно з позначеннями) наведено у [7]. Дві останні додаткові рівності цієї системи є умовами еквівалентності продиференційованих і вихідних умов (5), а їх поява зумовлена необхідністю при виведенні системи (12) спочатку продиференціювати умови (5).

У випадку повністю зчепленого з матрицею включення гранична задача зводиться до одного інтегрального рівняння [8]

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi_1(\tau) \left[ \ln(\tau - \zeta) + N(\tau - \zeta) + \frac{\pi g}{\varepsilon} G(\tau, \zeta) \right] d\tau = f_1(\zeta), \quad |\zeta| < 1, \tag{13}$$

де

$$f_1(\zeta) = -2\pi \alpha \exp(i\alpha x_0 \zeta \cos \theta_0).$$

Для тріщини після задоволення умови (9) і врахування (4) інтегральне рівняння набуває вигляду

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \phi_2'(\tau) \left[ \frac{1}{\tau - \zeta} + T(\tau - \zeta) - 2\pi\alpha_0 L(\tau, \zeta) \right] d\tau = f_2(\zeta), \quad |\zeta| < 1, \quad (14)$$

де

$$f_2(\zeta) = -2\pi\alpha_0 \sin \theta_0 \exp(i\alpha_0 \zeta \cos \theta_0), \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \phi_2'(\tau) d\tau = 0.$$

Наближене розв'язання системи (12) базується на поданні шуканих функцій через нові невідомі функції у вигляді

$$\psi_1(\tau) = g_1(\tau)(1 - \tau)^{-1/4}(1 + \tau)^{-3/4},$$

$$\psi_2(\tau) = g_2(\tau)(1 - \tau)^{-3/4}(1 + \tau)^{-1/4},$$

а для рівнянь (13), (14) у такому вигляді:

$$\phi_\ell(\tau) = \frac{g_\ell(\tau)}{\sqrt{1 - \tau^2}}, \quad \ell = 1, 2.$$

Шлях наближеного розв'язування рівнянь (12)–(14) детально викладено у [7, 8]. Невідомі функції  $g_\ell(\tau)$  наближуємо інтерполяційними многочленами. При розв'язуванні системи (12) це наближення має вигляд

$$g_1(\tau) = \sum_{k=1}^n \frac{g_1(\tau_{1k}) P_n^{-1/4, -3/4}(\tau)}{(\tau - \tau_{1k}) [P_n^{-1/4, -3/4}(\tau_{1k})]'},$$

$$g_2(\tau) = \sum_{k=1}^n \frac{g_2(\tau_{2k}) P_n^{-3/4, -1/4}(\tau)}{(\tau - \tau_{2k}) [P_n^{-3/4, -1/4}(\tau_{2k})]'},$$

де  $\tau_{1k}, \tau_{2k}, k = 1, \dots, n$ , – корені многочленів Якобі  $P_n^{-1/4, -3/4}(\tau)$  і  $P_n^{-3/4, -1/4}(\tau)$  відповідно.

Для рівнянь (13), (14) наближення  $g_\ell(\tau)$  виконується за формулою

$$g_\ell(\tau) = \sum_{m=1}^n \phi_{\ell m} \frac{T_n(\tau)}{T_n'(\tau_m)(\tau - \tau_m)},$$

де  $T_n(\tau)$  – многочлен Чебишева  $n$ -го степеня;  $\phi_{\ell m} = \phi_\ell(\tau_m)$ ,  $\tau_m = \cos \frac{\pi(2m-1)}{2n}$ ,  $m = 0, 1, \dots, n$  – корені цього многочлена.

**Визначення хвильового поля, розсіяного у дальню зону.** Після розв'язання інтегральних рівнянь (12)–(14) за формулами (10) можна отримати асимптотичні формули для переміщень і напружень у дальній зоні. Для цього необхідно ввести полярну систему координат

$$x = R \cos \varphi, \quad y = R \sin \varphi, \quad R = \sqrt{x^2 + y^2}$$

і знайти асимптотичні формули для переміщень і напружень (10), коли  $R \rightarrow \infty$ .

На підставі асимптотичних розвинень, отриманих в [10], для відшарованого включення запишемо

$$w^1(R, \varphi) = \frac{i}{4} \sqrt{\frac{2}{\pi\alpha_2 R}} \exp i \left( \alpha_2 R - \frac{\pi}{4} \right) \left\{ - \int_{-a}^a \frac{\chi_1(\eta)}{G_1} e^{-i\alpha_2 \eta \cos \varphi} d\eta + \right. \\ \left. + \alpha_2 \sin \varphi \int_{-a}^a \chi_2(\eta) e^{-i\alpha_2 \eta \cos \varphi} d\eta + O(R^{-1/2}) \right\},$$

$$\begin{aligned}
\tau_{xz}^1(R, \varphi) &= \frac{1}{4} \sqrt{\frac{2}{\pi \alpha_2 R}} \exp i \left( \alpha_2 R - \frac{\pi}{4} \right) \left\{ \alpha_2 \cos \varphi \int_{-a}^a \frac{\chi_1(\eta)}{G_1} e^{-i \alpha_2 \eta \cos \varphi} d\eta + \right. \\
&\quad \left. + i \alpha_2^2 G_1 \cos \varphi \sin \varphi \int_{-a}^a \chi_2(\eta) e^{-i \alpha_2 \eta \cos \varphi} d\eta + O(R^{-1/2}) \right\}, \\
\tau_{yz}^1(R, \varphi) &= \frac{1}{4} \sqrt{\frac{2}{\pi \alpha_2 R}} \exp i \left( \alpha_2 R - \frac{\pi}{4} \right) \left\{ \alpha_2 \sin \varphi \int_{-a}^a \frac{\chi_1(\eta)}{G_1} e^{-i \alpha_2 \eta \cos \varphi} d\eta + \right. \\
&\quad \left. + i \alpha_2^2 G_1 \sin^2 \varphi \int_{-a}^a \chi_2(\eta) e^{-i \alpha_2 \eta \cos \varphi} d\eta + O(R^{-1/2}) \right\}. \quad (15)
\end{aligned}$$

Для повністю зчепленого включення у рівностях (15) слід покласти  $\chi_2(x) \equiv 0$ , для тріщини –  $\chi_1(x) \equiv 0$ .

Отримані формули дозволяють обчислювати таку важливу характеристику розсіяного хвильового поля, як ПППР. Повний поперечний переріз розсіювання  $Q(\omega)$  за означенням [3, 13] є відношенням

$$Q(\omega) = \frac{\langle Q^1 \rangle_t}{\langle I^0 \rangle_t}, \quad (16)$$

де  $\langle Q^1 \rangle_t$  – усереднена швидкість поширення енергії розсіяної хвилі через циліндричну поверхню одиничної довжини, що містить включення;  $\langle I^0 \rangle_t$  – середня за період кількість енергії падаючої хвилі, що проходить через одиничну площинку, перпендикулярну до напрямку розповсюдження падаючої хвилі.

Якщо ввести одиничний вектор нормалі  $\mathbf{n}^0 = (n_1^0, n_2^0)$  до фронту падаючої хвилі, тоді

$$\langle I^0 \rangle_t = \frac{\omega}{2} \{ n_1^0 \operatorname{Im} [\tau_{xz}^0 w_0^*] + n_2^0 \operatorname{Im} [\tau_{yz}^0 w_0^*] \}. \quad (17)$$

Підставивши у (17) рівність (1) для переміщень і такі подання для напружень падаючої хвилі:

$$\tau_{xz}^0(x, y) = G_1 A i \alpha_2 \cos \theta_0 e^{i \alpha_2 (x \cos \theta_0 + y \sin \theta_0)},$$

$$\tau_{yz}^0(x, y) = G_1 A i \alpha_2 \sin \theta_0 e^{i \alpha_2 (x \cos \theta_0 + y \sin \theta_0)},$$

отримаємо

$$\langle I^0 \rangle_t = \frac{1}{2} \omega G_1 A^2 \alpha_2. \quad (18)$$

Нехай усередині циліндричної поверхні одиничної довжини знаходиться включення. Тоді швидкість поширення енергії розсіяної хвилі через цю поверхню буде такою:

$$Q = - \frac{1}{4} \int_L \{ (\bar{\tau}_{xz}^1 + \bar{\tau}_{xz}^{1*})(\dot{w} + \dot{w}^*) n_1 + (\bar{\tau}_{yz}^1 + \bar{\tau}_{yz}^{1*})(\dot{w} + \dot{w}^*) n_2 \} dL.$$

Тут  $L$  – переріз циліндричної поверхні площиною  $Oxy$ . Зірочкою позначено комплексно спряжені величини;  $n_\alpha$  – компоненти зовнішньої одиничної нормалі до поверхні  $L$ . Оскільки переміщення і напруження змінюються за часом періодично:

$$\bar{w}(x, y, t) = w(x, y) e^{-i \omega t}, \quad \bar{\tau}_{xz}(x, y, t) = \tau_{xz}(x, y) e^{-i \omega t},$$

$$\bar{\tau}_{yz}(x, y, t) = \tau_{yz}(x, y) e^{-i \omega t},$$

то

$$\begin{aligned} Q = & -\frac{1}{4} i\omega \int_L \{n_1[-\tau_{xz}^1 w^1 e^{-2i\omega t} + \tau_{xz}^1 w^{1*} - \tau_{xz}^{1*} w^1 + \tau_{xz}^{1*} w^{1*} e^{2i\omega t}] + \\ & + n_2[\tau_{yz}^1 w^1 e^{-2i\omega t} + \tau_{yz}^1 w^{1*} - \tau_{yz}^{1*} w^1 + \tau_{yz}^{1*} w^{1*} e^{2i\omega t}]\} dL. \end{aligned}$$

Після осереднення цієї величини за часом і позначення цієї операції символом  $\langle \cdot \rangle_t$  отримуємо

$$\langle Q \rangle_t = \frac{1}{T} \int_0^T Q(t) dt = \frac{\omega}{2} \int_0^{2\pi} \{n_1 \operatorname{Im}[\tau_{xz}^1 w^{1*}] + n_2 \operatorname{Im}[\tau_{yz}^1 w^{1*}]\} d\varphi. \quad (19)$$

Підставивши в (19) подання для  $w^1(x, y)$ ,  $\tau_{xz}^1(x, y)$  та  $\tau_{yz}^1(x, y)$  та обчисливши відповідні інтеграли, знаходимо

$$\langle Q^1 \rangle_t = \frac{\omega G_1 a^2}{16\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) d\varphi. \quad (20)$$

Якщо включення односторонньо відшароване, тоді

$$\begin{aligned} f(\varphi) = & (1 + \operatorname{tg} \varphi)^2 \sum_{m=1}^n \sum_{k=1}^n b_m^{(1)} b_k^{(1)} \operatorname{Re}(g_{1m} g_{1k}^* z^{mk}) + \\ & + (1 - \operatorname{tg} \varphi)^2 \sum_{m=1}^n \sum_{k=1}^n b_m^{(2)} b_k^{(2)} \operatorname{Re}(g_{2m} g_{2k}^* z^{mk}) + \\ & + (1 - \operatorname{tg}^2 \varphi) \sum_{m=1}^n \sum_{k=1}^n b_m^{(1)} b_k^{(2)} \operatorname{Re}(g_{1m} g_{2k}^* z^{mk}) + \\ & + (1 - \operatorname{tg}^2 \varphi) \sum_{m=1}^n \sum_{k=1}^n b_m^{(2)} b_k^{(1)} \operatorname{Re}(g_{2m} g_{1k}^* z^{mk}). \end{aligned}$$

Тут

$$z^{mk} = \cos(\alpha_0(\tau_{pk} - \tau_{jm}) \cos \varphi) + i \sin(\alpha_0(\tau_{pk} - \tau_{jm}) \cos \varphi), \quad p, j = 1, 2,$$

$$b_k^{(1)} = \frac{P_{n-1}^{1/4, 3/4}(\tau_{1k})}{\sqrt{2} [P_n^{-1/4, -3/4}(\tau_{1k})]}, \quad b_k^{(2)} = \frac{P_{n-1}^{3/4, 1/4}(\tau_{2k})}{\sqrt{2} [P_n^{-3/4, -1/4}(\tau_{2k})]}, \quad k = 1, \dots, n,$$

$$g_{1m} = g_1(\tau_{1m}), \quad g_{2m} = g_2(\tau_{2m}),$$

$\tau_{1k}, \tau_{2k}$ ,  $k = 1, \dots, n$ , – корені многочленів Якобі  $P_n^{-1/4, -3/4}(\tau)$ ,  $P_n^{-3/4, -1/4}(\tau)$  відповідно.

Для повністю зчепленого включення підінтегральна функція в (20) має вигляд

$$f(\varphi) = \frac{\pi^2}{n^2} \sum_{m=1}^n \sum_{k=1}^n \operatorname{Re}(g_{1m} g_{1k}^* z^{mk}),$$

а для тріщини

$$f(\varphi) = \frac{\pi^2}{n^2} \operatorname{tg}^2 \varphi \sum_{m=1}^n \sum_{k=1}^n \operatorname{Re}(g_{2m} g_{2k}^* z^{mk}).$$

У цих двох рівностях для  $f(\varphi)$  у функціях  $g_{\ell m} = g_{\ell}(\tau_m)$ ,  $\ell = 1, 2$ ,  $\tau_m$  – корені многочлена Чебишева 2-го роду.

Підставивши (18) і (20) у (16), отримуємо такий вираз для повного поперечного перерізу розсіювання:

$$Q(\omega) = \frac{a^2}{8\pi\alpha_2 A^2} \int_0^{2\pi} f(\varphi) d\varphi. \quad (21)$$

**Аналіз чисельних результатів і висновки.** За допомогою формул (21) проведено дослідження залежності значень повного поперечного перерізу розсіювання  $Q$  від кута поширення падаючої хвилі при різних співвідношеннях між модулями зсуву матриці та включення  $g = G_1/G_0$  при  $\alpha_0 = 4$ . Розраховували безрозмірні значення ПППР за формулою

$$Q^0 = \frac{Q(\omega)}{a} = \frac{1}{8\pi\alpha_0} \int_0^{2\pi} f(\varphi) d\varphi.$$

Результати цих досліджень показано у вигляді графіків на рис. 1–3. На цих рисунках крива 1 відповідає повністю зчепленому включенню, 2 – відшарованому включенню, 3 – тріщині. Пунктирна крива відповідає випадку абсолютно жорсткого включення.

На рис. 1 показано графіки залежності ПППР від кута поширення падаючої хвилі для абсолютно жорстких включень за різних умов їх взаємодії з матрицею, а також для тріщини. При всіх розглянутих типах дефекту значення ПППР досягають як максимального, так і мінімального значень. Існують кути, при яких значення ПППР суттєво відрізняються для різних типів дефектів. Наприклад, при  $\theta_0 = 90^\circ$  та  $\theta_0 = 270^\circ$  значення ПППР для тріщини досягають свого найбільшого значення, а для повністю зчепленого з матрицею включення – найменшого значення. Крім того, для кутів, близьких до вказаних, значення ПППР для повністю зчепленого з матрицею включення менші від відповідних значень ПППР для відшарованого з одного боку включення. Для всіх інших значень кута поширення падаючої хвилі ПППР для повністю зчепленого включення суттєво перевищують значення ПППР для відшарованого включення.

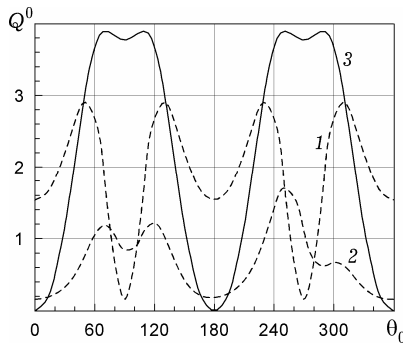


Рис. 1

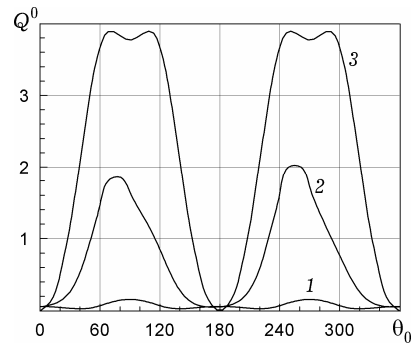


Рис. 2

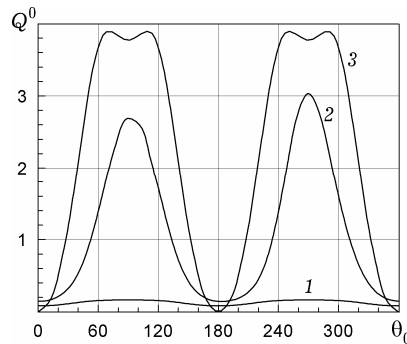


Рис. 3



На рис. 2 і рис. 3 показано графіки залежності ПППР від кута поширення падаючої хвилі  $\theta_0$  для пружних включень за різних умов їх взаємодії з матрицею, а також для тріщини. На рис. 2 зображено графіки для включень, у яких  $g = G_1 / G_0 = 0.5$ , а на рис. 3 – для включень, у яких  $g = 2$ . На цих рисунках бачимо, що майже для всіх розглянутих кутів поширення падаючої хвилі значення ПППР для тріщини перевищують відповідні значення для включення як повністю зчепленого, так і відшарованого. Значення ПППР для повністю зчепленого включення набувають найменших значень порівняно з результатами для інших дефектів.

Викладені вище результати є підставою для таких заключних висновків:

– Метод розривних розв'язків є достатньо ефективним як для визначення напруженого стану навколо дефектів, так і для дослідження хвильового поля у дальній зоні.

– Значення такої характеристики розсіяного хвильового поля, як ПППР, суттєво залежить від типу дефекту (тріщини або включення) і від умов взаємодії між дефектом і матрицею. Це доводить можливість визначення типу дефекту і умов взаємодії з матрицею за даними ПППР.

1. Гузь А. Н., Кубенко В. Д., Бабаев А. Э. Гидроупругость систем оболочек. – Киев: Вища шк., 1984. – 208 с.
2. Емец В. Ф., Кит Г. С., Кунец Я. И. Асимптотическое поведение решения задачи рассеяния упругой волны тонкостенным инородным включением // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1999. – № 3. – С. 55–63.
3. Канаун С. К., Левин В. М. Метод эффективного поля в механике композитов. – Петрозавод. ун-т, 1993. – 600 с.
4. Кунец Я. И., Матус В. В., Пороховський В. В. Дослідження ехо-сигналів SH-хвиль від тонкостінних пружних жорстко підкріплених включень // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2004. – 47, № 1. – С. 115–119.
5. Кунец Я. И., Матус В. В., Пороховський В. В. Метод нульового поля у задачі розсіяння на тонкостінному пружному криволінійному включенні // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2000. – 43, № 2. – С. 163–170.
6. Кунец Я. И., Матус В. В., Пороховський В. В. Розсіяння імпульсів пружних SH-хвиль на тонкостінному пружному криволінійному включенні // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2000. – 43, № 4. – С. 150–154.
7. Литвин О. В., Попов В. Г. Взаимодействие гармонических волн продольного сдвига с упругим частично отслоившимся включением // Проблемы машиностроения. – 2004. – 7, № 1. – С. 43–47.
8. Литвин О. В., Попов В. Г. Концентрація напружень біля тонкого пружного включення при коливаннях поздовжнього зсуву // Машинознавство. – 2005. – № 3. – С. 13–16.
9. Перцев А. К., Платонов Э. Г. Динамика оболочек и пластин. – Ленинград: Судостроение, 1987. – 316 с.
10. Попов В. Г. Исследование полей перемещений и напряжений при дифракции упругих волн сдвига на тонком жестком отслоившемся включении // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1992. – № 3. – С. 139–146.
11. Попов В. Г. Сравнение полей перемещений и напряжений при дифракции упругих волн сдвига на различных дефектах: трещина и тонкое жесткое включение // Динам. системы. – 1993. – Вып. 12. – С. 35–41.
12. Поручиков В. Е. Методы динамической теории упругости. – Москва: Наука, 1986. – 328 с.
13. Achenbach J. D., Gantesen A. K., McMaken H. Ray methods for waves in elastic solids. – Boston: Pitman Advanced Publ. Program, 1982. – 251 p.
14. Kit H. S., Kunets Ya. I., Yemets V. F. Elastodynamic scattering from a thin-walled inclusion of low rigidity // Int. J. Engng. Sci. – 1999. – 37. – P. 331–345.
15. Olsson P. Elastodynamic scattering by fluid-filled nonplanar cracks // J. Nondestruct. Evaluation. – 1986. – 5, No. 3. – P. 161–168.
16. Olsson P., Datta S. K., Boström A. Elastodynamic scattering from inclusion surrounded by thin interface layers // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1990. – 57, No. 3. – P. 672–676.

**ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ТИПА ДЕФЕКТА И УСЛОВИЙ  
ЕГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ С МАТРИЦЕЙ НА РАССЕЯННОЕ ИМ  
ВОЛНОВОЕ ПОЛЕ ПРИ АНТИПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ**

*Исследуется влияние на волновое поле, рассеянное тонким полосовым дефектом (трещиной или включением), и условий его взаимодействия с матрицей. Предполагается, что матрица находится в условиях антиплоской деформации и в ней распространяются плоские гармонические волны продольного сдвига. Для определения волнового поля формулируются и решаются методом разрывных решений граничные задачи для тела с соответствующим дефектом. Основное внимание уделено такой характеристике рассеянного поля, как полное поперечное сечение рассеяния. Установлено, что существуют углы распространения волны, при которых полные поперечные сечения рассеяния существенно отличаются для дефектов разного типа и разных условий взаимодействия между дефектом и матрицей. Это показывает возможность установления типа дефекта и условий его взаимодействия с матрицей при помощи полного поперечного сечения рассеяния.*

**STUDY ON EFFECT OF TYPE OF DEFECT AND CONDITIONS  
OF ITS INTERACTION WITH THE MATRIX ON SCATTERED  
WAVE FIELD BY IT UNDER ANTIPLANE STRAIN**

*Influence on the wave field scattered by thin strip defect (by a crack or inclusion), and conditions of its interaction with a matrix is investigated. It is supposed that the matrix is under conditions of antiplane strain and the plane harmonic waves of longitudinal shear are propagated in it. To determine the wave field the boundary-value problems for a body with the corresponding defect are formulated and solved by a method of discontinuous solutions. The main attention is given to such characteristic of the scattered field as total scattering cross section. It is established that there are angles of wave propagation at which total scattering cross sections significantly differ for defects of different type and different conditions of interaction between defect and a matrix. It indicated on the possibility to establish the type of defect and conditions of its interaction with a matrix by means of total scattering cross section.*

Одеська нац. морська акад., Одеса

Одержано  
10.12.09