

ДУАЛЬНИЙ МЕТОД ГРАНИЧНИХ ЕЛЕМЕНТІВ ДЛЯ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ ТОНКИХ ВКЛЮЧЕНЬ

Запропоновано використовувати дуальний метод граничних елементів у задачах теорії тонких включень. Контактні умови на межі тонкого включення розглядаються як стрибки переміщень і напружень у тілі на серединній поверхні дефекту. Таким чином, моделлю включення є зв'язки між невідомими розривами та середніми значеннями переміщень і напружень. Для прямолінійних граничних елементів побудовано моделі включень, які враховують розтяг, зсув і згин тонкого включення. Розглянуто приклади для прямолінійного та викривленого включень. Порівнянням результатів розробленого підходу з даними, отриманими на основі прямого підходу, засвідчено ефективність використання запропонованого методу.

Вступ. Тонкі дефекти, зокрема тріщини, оксидні плівки, сульфідні та графітові включення в металах, заповнені газом, рідиною чи твердою субстанцією різноманітні порожнини, а також інші неоднорідності, що виникають у процесі виробництва та обробки матеріалів, особливо конструкційних, є одним із найпоширеніших типів дефектів неоднорідної структури матеріалів. Крім цього, підкріплювальні елементи, термо- і тензодавачі, волокна композиційних матеріалів, продукти фазових перетворень, хімічних реакцій (корозії), у тому числі й на межі поділу матеріалів, також часто мають вигляд тонких включень.

Бібліографія, що стосується питань моделювання і визначення напружено-деформованого стану тіл із тонкими включеннями, надзвичайно обширна (див. [7]). Одним із найпродуктивніших підходів до аналізу тіл із тонкими включеннями є метод функцій стрибка [7], у якому включення вилучається із розгляду, а його вплив на тіло замінюють лінією чи поверхнею, на якій параметри фізико-механічних полів, що розглядаються, мають розрив (стрибок). Такий підхід ґрунтується на принципі спряження континуумів різної вимірності, у якому в геометричному описі включення нехтують його малою товщиною, зменшуючи реальну вимірність на одиницю (у двовимірних задачах моделюють лінією). Тобто реальну поверхню включення замінюють його серединною поверхнею (лінією) Γ_C (рис. 1). Для визначення функцій стрибка використовують умови взаємодії тонкого включення із оточуючим матеріалом.

Уперше умови взаємодії щодо стрибка напружень і переміщень для тонкого пружного включення за загального напружено-деформованого стану тіла отримали К. С. Чобанян та А. С. Хачикян [13], Д. В. Грилицький і Г. Т. Сулим [3], Я. С. Підстригач [5]. Різнманітні моделі, що описують податні або жорсткі тонкі включення, запропоновані також у роботах [1, 4] та ін. Уперше розв'язано загальну задачу для пружного включення з довільними пружними модулями, а також знайдено асимптотичний розподіл напружень і переміщень в околі вершини такого включення в роботі [6]. Результати досліджень термпружної рівноваги деформівних твердих тіл із тонкими включеннями подано у монографії [7].

Зазначені роботи стосувалися, в основному, необмежених тіл, півпросторів чи смуг із включеннями, тобто тих випадків, для яких вдалося отримати більшою чи меншою мірою придатну для розв'язування систему інтегральних рівнянь. Тому важливим завданням залишається розробка в межах теорії тонких включень більш універсального підходу, зокрема на базі методу граничних елементів, що дав би можливість досліджувати, крім необмежених, ще й обмежені тіла складної геометричної конфігурації з тонкими прямолінійними та викривленими включеннями. На думку авторів,

перспективним для реалізації такого підходу є використання дуального методу граничних елементів (ДМГЕ) [14–16].

1. Дуальний метод граничних елементів. Термін «дуальний» вживають на позначення того, що для розв'язування задачі для обмеженого поверхнею Γ тіла з внутрішнім тонким розрізом, який має серединну поверхню Γ_C (рис. 1), використовується не одне, а два інтегральні рівняння: перше для переміщень, а друге – для напружень. Система сингулярних інтегральних рівнянь ДМГЕ записується таким чином:

1°) точка колокації \mathbf{y} лежить на гладкій поверхні Γ тіла:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} u_i(\mathbf{y}) = & \int_{\Gamma} U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) t_j(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) - \int_{\Gamma} T_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) u_j(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) + \\ & + \int_{\Gamma_C^+} U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Sigma t_j(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) - \int_{\Gamma_C^+} T_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Delta u_j(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}); \end{aligned} \quad (1)$$

2°) точка колокації \mathbf{y} лежить на гладкій поверхні Γ_C^+ розрізу:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \Sigma u_i(\mathbf{y}) = & \int_{\Gamma} U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) t_j(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) - \int_{\Gamma} T_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) u_j(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) + \\ & + \int_{\Gamma_C^+} U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Sigma t_j(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) - \int_{\Gamma_C^+} T_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Delta u_k(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}), \\ \frac{1}{2} \Delta t_i(\mathbf{y}) = & n_j^+(\mathbf{y}) \left[\int_{\Gamma} D_{ijk}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) t_k(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) - \int_{\Gamma} S_{ijk}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) u_k(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) \right] + \\ & + n_j^+(\mathbf{y}) \left[\int_{\Gamma_C^+} D_{ijk}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Sigma t_j(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) - \right. \\ & \left. - \int_{\Gamma_C^+} S_{ijk}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Delta u_k(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) \right]. \end{aligned} \quad (2)$$

Тут u_i , t_i – компоненти векторів переміщень і напружень; $\Delta u_i = u_i^+ - u_i^-$, $\Delta t_i = t_i^+ - t_i^-$, $\Sigma u_i = u_i^+ + u_i^-$, $\Sigma t_i = t_i^+ + t_i^-$; n_j^+ – компоненти вектора нормалі \mathbf{n}^+ до поверхні Γ_C^+ ; індексами «+», «-» позначено величини, що стосуються поверхонь Γ_C^+ та Γ_C^- , утворених розрізом Γ_C (рис. 1). Нижні індекси у позначеннях відповідають проєкціям векторів на осі глобальної системи координат Ox_1x_2 . У формулах прийняте правило Айнштайна підсумовування за індексом, що повторюється. Ядра інтегральних рівнянь для плоскої задачі теорії пружності при $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y}$ мають такі особливості:

$$\begin{aligned} U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \sim \ln|\mathbf{x} - \mathbf{y}|, & T_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \sim 1/|\mathbf{x} - \mathbf{y}|, \\ D_{ijk}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \sim 1/|\mathbf{x} - \mathbf{y}|, & S_{ijk}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \sim (1/|\mathbf{x} - \mathbf{y}|)^2. \end{aligned}$$

Їхню розгорнуту форму можна знайти, наприклад, у [14].

Схема числового розв'язування інтегральних рівнянь (1), (2) за допомогою ДМГЕ є такою. Для обчислення криволінійних інтегралів лінії Γ і Γ_C розбиваємо на частини, які апроксимуємо прямолінійними відрізками Γ_q (граничними елементами), а рівняння (1), (2) записуємо як суми інтегралів уздовж граничних елементів Γ_q . На кожному з відрізків Γ_q задаємо n

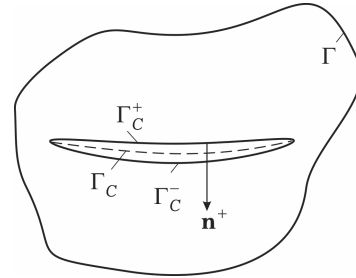


Рис. 1

вузлових точок $\mathbf{x}^{q,p}$, $p = 1, \dots, n$. Для розв'язування задач теорії тріщин, як правило, використовують розривні граничні елементи [14], тобто такі, в яких жодна з вузлових точок не збігається з крайніми точками граничного елемента. Зокрема, часто використовують прямолінійні квадратичні граничні елементи, для яких три вузлові точки ($n = 3$) розміщуються так: одна у центрі, а дві інші на відстані $1/3$ довжини елемента по обидва боки від центральної. Це дає можливість моделювати негладкі поверхні, оскільки точка колокації ніколи не потраплятиме у кутову точку, чи у місце розгалуження розрізу Γ_C (тріщини). Крайові функції t_i , u_i компонент векторів напружень і переміщень інтерполюють на елементі за їхніми вузловими значеннями:

$$\tilde{t}_i(\xi) = \sum_{p=1}^n t_i^{q,p} \varphi^p(\xi), \quad \tilde{u}_i(\xi) = \sum_{p=1}^n u_i^{q,p} \varphi^p(\xi), \quad (3)$$

де ξ – параметр розташування точки на елементі, означений на проміжку $-1 \leq \xi \leq 1$ так: $d\Gamma_q = \frac{L_q}{2} d\xi = J_q d\xi$, J_q – модуль якобіана заміни змінних на елементі Γ_q . Для прямолінійного розривного квадратичного елемента $n = 3$, а вузлам $\mathbf{x}^{q,p}$ відповідають значення параметра $\xi = \{-2/3, 0, 2/3\}$. Тому інтерполяційні поліноми $\varphi^p(\xi)$ означені такими виразами:

$$\varphi^1 = \xi \left(\frac{9}{8} \xi - \frac{3}{4} \right), \quad \varphi^2 = \left(1 - \frac{3}{2} \xi \right) \left(1 + \frac{3}{2} \xi \right), \quad \varphi^3 = \xi \left(\frac{9}{8} \xi + \frac{3}{4} \right). \quad (4)$$

Таким чином, сингулярне інтегральне рівняння (1) зводиться до системи лінійних алгебричних рівнянь стосовно шуканих вузлових значень крайових функцій

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} u_i^{p,r} = & \sum_{q=1}^s \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^2 \left[t_j^{q,k} \int_{-1}^1 U_{ij}(\xi, \mathbf{x}^{p,r}) \varphi^k(\xi) J_q d\xi - \right. \\ & - u_j^{q,k} \int_{-1}^1 T_{ij}(\xi, \mathbf{x}^{p,r}) \varphi^k(\xi) J_q d\xi + \Sigma t_j^{q,k} \int_{-1}^1 U_{ij}(\xi, \mathbf{x}^{p,r}) \varphi^k(\xi) J_q d\xi - \\ & \left. - \Delta u_j^{q,k} \int_{-1}^1 T_{ij}(\xi, \mathbf{x}^{p,r}) \varphi^k(\xi) J_q d\xi \right]. \quad (5) \end{aligned}$$

Відповідні рівняння для інтегральних співвідношень (2) складаються аналогічно до (5). Схеми обчислення сингулярних і гіперсингулярних інтегралів описані, зокрема, у роботі [16].

2. Моделювання тонкого дефекту. У теорії тонких включень [7], з огляду на малу товщину, дефект вилучається з розгляду, а його вплив на тіло замінюється певним розривом переміщень і напружень уздовж середньої поверхні неоднорідності, який повинен задовольняти певним умовам – умовам взаємодії.

2.1. Тріщина. Найпростішим для моделювання дефектом є тріщина. З огляду на те, що на її берегах навантаження Δt_i , Σt_i задане (найчастіше взагалі нульове), система рівнянь (1), (2) дає можливість розв'язати поставлену задачу і знайти переміщення берегів дефекту. Саме для цього і розроблявся ДМГЕ.

2.2. Розтяг-зсув включення упоперек серединної лінії. Використаємо підхід [4] і пов'яжемо стрибок вектора напружень Δt_i зі стрибком переміщень Δu_i так, як у моделі пружної основи Вінклера:

$$\Delta t_n = -E^{\text{in}} \Delta u_n \frac{1}{h}, \quad \Delta t_\tau = -G^{\text{in}} \Delta u_\tau \frac{1}{h}, \quad (6)$$

де E^{in} , G^{in} – відповідно модулі пружності та зсуву матеріалу включення; h – половина товщини включення. Перейшовши від локальної системи координат (n, τ) до глобальної Ox_1x_2 , із (6) отримаємо

$$\Delta t_i = -\alpha_{pi} \alpha_{qj} A_{pq} \Delta u_j, \quad (7)$$

де компоненти тензора повороту α дорівнюють $\alpha_{11} = n_1$, $\alpha_{12} = n_2$, $\alpha_{21} = -n_2$, $\alpha_{22} = n_1$, а компоненти матриці \mathbf{A} , що описують пружне деформування включення, відповідно до (6) означені так: $A_{11} = E^{\text{in}}/h$, $A_{22} = G^{\text{in}}/h$, $A_{12} = A_{21} = 0$.

Якщо із урахуванням малої товщини включення та податності його матеріалу додатково знехтувати зусиллями, що розтягують включення уздовж осі (включення не сприймає таких напружень), тобто вважати, що $\Sigma t_i(\mathbf{x}) = 0$, то на основі цієї залежності і (7) отримаємо модель тонкого включення Панасюка – Стадника – Силованюка [4]. Тоді система рівнянь (1), (2) разом зі зв'язком (7) та $\Sigma t_i(\mathbf{x}) = 0$ стає достатньо повною для розв'язування задачі про тонке податне включення в тілі.

2.3. Розтяг-зсув включення уздовж серединної лінії. Очевидно, що під час моделювання тонкого пружного включення довільної жорсткості припущення $\Sigma t_i(\mathbf{x}) = 0$ не є слушним. Тому необхідно отримати зв'язок компонент Σt_i з іншими крайовими функціями на розрізі, зокрема із Σu_i . Для цього розглянемо рівновагу k -го прямолінійного граничного елемента включення (рис. 2). Вважатимемо для простоти, що товщина включення $2h$ є сталою уздовж усього дефекту.

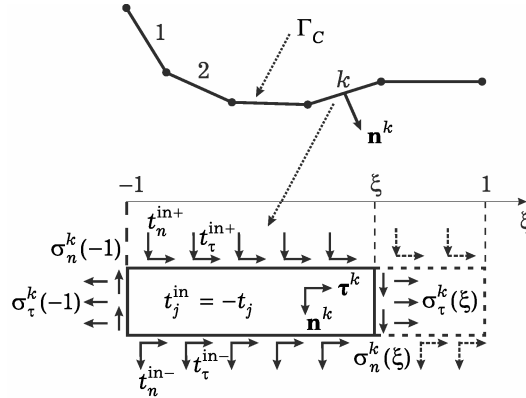


Рис. 2. Схема для запису рівнянь рівноваги включення щодо головного вектора.

З урахуванням умов ідеального механічного контакту $\Sigma t_i = -\Sigma t_i^{\text{in}}$ між дефектом і тілом для середнього значення внутрішніх напружень $\sigma = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h \sigma(\eta) d\eta$ у довільному поперечному перерізі тонкого включення із рівнянь рівноваги отримаємо

$$\sigma_{\{n,\tau\}}^k(\xi) = \sigma_{\{n,\tau\}}^k(-1) + \frac{1}{2h} \int_{-1}^{\xi} \Sigma t_{\{n,\tau\}}^k(\xi) J_k d\xi. \quad (8)$$

Унаслідок малої товщини включення середні значення деформацій можна пов'язати із середніми значеннями напружень за допомогою закону Гука. Тоді із (8) для деформацій включення матимемо

$$\varepsilon_{\{n,\tau\}} = \frac{\partial u_{\{n,\tau\}}}{\partial x_\tau},$$

$$\varepsilon_{\{n,\tau\}}^k = \frac{\sigma_{\{n,\tau\}}^k}{\{G^{\text{in}}, E^{\text{in}}\}} = \varepsilon_{\{n,\tau\}}^k(-1) + \frac{1}{2h\{G^{\text{in}}, E^{\text{in}}\}} \int_{-1}^{\xi} \Sigma t_{\{n,\tau\}}^k(\zeta) J_k d\zeta. \quad (9)$$

Інтегруючи (9), переходячи до глобальної системи координат і враховуючи, що для тонкого включення величину $\frac{1}{2}\Sigma u_i$ можна вважати середнім значенням його переміщень, отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\Sigma u_i^k(\xi) &= \frac{1}{2}\Sigma u_i^k(-1) + \varepsilon_i^k(-1)(\xi+1)J_k + \\ &+ \alpha_{pi}^k \alpha_{qj}^k B_{pq} J_k^2 \int_{-1}^{\xi} \int_{-1}^{\eta} \Sigma t_j^k(\zeta) d\zeta d\eta. \end{aligned} \quad (10)$$

Тут відповідно до (9) $B_{11} = (2hG^{\text{in}})^{-1}$, $B_{22} = (2hE^{\text{in}})^{-1}$, $B_{12} = B_{21} = 0$.

Із рівноваги частини включення, що складається з елементів $1, \dots, k-1$, та закону Гука випливає, що

$$\begin{aligned} \varepsilon_i^k(-1) &= \alpha_{pi}^k \alpha_{qj}^k B_{pq} \left(2h\sigma_j^0 + \int_{\mathbf{x}_0}^{\mathbf{x}_k} \Sigma t_j(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) \right) = \\ &= \alpha_{pi}^k \alpha_{qj}^k B_{pq} \left(2h\sigma_j^0 + \sum_{s=1}^{k-1} J_s \int_{-1}^1 \Sigma t_j^s(\xi) d\xi \right), \end{aligned} \quad (11)$$

де σ_j^0 – середнє значення напружень на лівому торці включення.

Нерозривність осі включення дає умову $\Sigma u_i^{k-1}(1) = \Sigma u_i^k(-1)$. Тоді з урахуванням (10) та (11), виконуючи рекурсивну підстановку, отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\Sigma u_i^k(\xi) &= u_i^0 + \sum_{s=1}^{k-1} \alpha_{pi}^s \alpha_{qj}^s B_{pq} J_s^2 \int_{-1}^1 \int_{-1}^{\eta} \Sigma t_j^s(\zeta) d\zeta d\eta + \\ &+ \alpha_{pi}^k \alpha_{qj}^k B_{pq} J_k^2 \int_{-1}^{\xi} \int_{-1}^{\eta} \Sigma t_j^k(\zeta) d\zeta d\eta + \\ &+ 2 \sum_{m=1}^{k-1} J_m \alpha_{pi}^m \alpha_{qj}^m B_{pq} \left(2h\sigma_j^0 + \sum_{s=1}^{m-1} J_s \int_{-1}^1 \Sigma t_j^s(\xi) d\xi \right) + \\ &+ (\xi+1)J_k \alpha_{pi}^k \alpha_{qj}^k B_{pq} \left(2h\sigma_j^0 + \sum_{s=1}^{k-1} J_s \int_{-1}^1 \Sigma t_j^s(\xi) d\xi \right). \end{aligned} \quad (12)$$

Сталі u_i^0 визначаємо з рівнянь глобальної рівноваги включення. Вирази (7) і (12) є моделлю тонкої неоднорідності, що враховує її розтяг і зсув в обох напрямках.

2.4. Урахування згину включення. Окрім розтягу та зсуву (особливо для викривлених включень) слід враховувати також їхній згин. Для цього розглянемо рівновагу k -го граничного елемента включення щодо згинальних моментів (рис. 3).

Відповідно до рис. 3 момент $M^k(\xi)$ у довільному перерізі ξ граничного елемента k -го включення дорівнює

$$M^k(\xi) = -M^k(-1) - Q_n^k J_k(\xi+1) + J_k^2 n_j \int_{-1}^{\xi} \Sigma t_j^k(\eta)(\xi-\eta) d\eta. \quad (13)$$

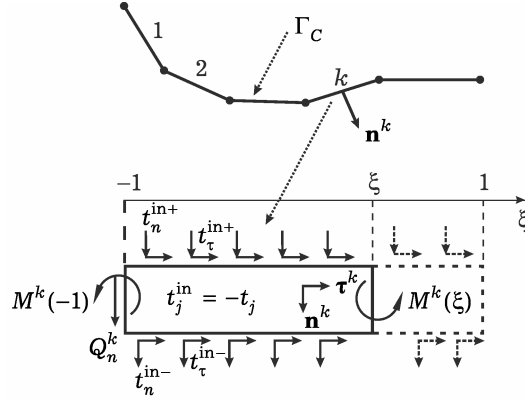


Рис. 3. Схема для запису рівнянь рівноваги моментів.

Значення моменту $M^k(-1)$ на лівому торці граничного елемента k визначається за навантаженням, прикладеним до елементів $1, \dots, k-1$:

$$M^k(-1) = M_0(\mathbf{x}_k) - \sum_{s=1}^{k-1} J_s^2 \left(C_j^s \int_{-1}^1 \Sigma t_j^s(\xi) d\xi - n_j^s \int_{-1}^1 \Sigma t_j^s(\xi) \xi d\xi \right), \quad (14)$$

де $C_1^s = -[x_2^s(0) - x_2^k(-1)]/J_s$, $C_2^s = [x_1^s(0) - x_1^k(-1)]/J_s$; $M_0(\mathbf{x}_k)$ – момент сил, зумовлений торцевими напруженнями σ_j^0 і моментом M_0 на лівому торці включення.

Подібно обчислюємо значення перерізувальної сили Q_n^k на лівому торці граничного елемента k включення:

$$Q_n^k = -n_j^k \left(2h\sigma_j^0 + \sum_{s=1}^{k-1} J_s \int_{-1}^1 \Sigma t_j^s(\xi) d\xi \right). \quad (15)$$

Відповідно до [12] малий кут повороту $\omega = \frac{\partial u_n}{\partial x_\tau}$ осі тонкого стрижня пов'язаний зі згинальним моментом співвідношенням Ейлера – Бернуллі

$$\frac{\partial \omega}{\partial x_\tau} = -\frac{M(x_\tau)}{D}, \quad (16)$$

де $D = 2E^{\text{in}}h^3/3$ для згину стрижнів (плоский напружений стан пластини з включенням) і $D = 2E^{\text{in}}h^3/[3(1 - \nu_{\text{in}}^2)]$ для згину пластин (плоска деформація тіла з включенням). Інтегруючи (16), отримаємо

$$\omega^k(\xi) = \omega^k(-1) - \frac{J_k}{D} \int_{-1}^{\xi} M^k(\xi) d\xi, \quad (17)$$

$$\frac{1}{2} \Sigma u_i^k(\xi) = \frac{1}{2} \Sigma u_i^k(-1) + n_i^k \omega^k(-1) J_k(\xi + 1) - \frac{n_i^k J_k^2}{D} \int_{-1}^{\xi} \int_{-1}^{\eta} M^k(\zeta) d\zeta d\eta.$$

Умова нерозривності осі включення, записана у вигляді

$$\omega^{k-1}(1) = \omega^k(-1), \quad (18)$$

$$\Sigma u_i^{k-1}(1) = \Sigma u_i^k(-1),$$

дає можливість виконати у (17) рекурсивну підстановку і знайти середнє значення переміщень включення у розгорнутій формі:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Sigma u_i^k(\xi) &= u_i^0 + \omega^0 \left[\sum_{s=1}^{k-1} 2J_s n_i^s + J_k n_i^k (\xi + 1) \right] - \\
&- \frac{2}{D} \sum_{s=1}^{k-1} \sum_{m=1}^{s-1} J_s J_m n_i^s \int_{-1}^1 M^m(\xi) d\xi - \\
&- \frac{1}{D} \left[\sum_{s=1}^{k-1} n_i^s J_s^2 \int_{-1}^1 \int_{-1}^{\eta} M^s(\zeta) d\zeta d\eta + n_i^k J_k^2 \int_{-1}^{\xi} \int_{-1}^{\eta} M^k(\zeta) d\zeta d\eta \right] - \\
&- \frac{(\xi + 1)}{D} J_k n_i^k \sum_{s=1}^{k-1} J_s \int_{-1}^1 M^s(\xi) d\xi. \tag{19}
\end{aligned}$$

Об'єднуючи моделі розтягу-зсуву (7), (12) із моделлю згину (19), отримаємо рівняння математичної моделі тонкого пружного включення, пристосовані до впровадження у ДМГЕ із прямолінійними граничними елементами:

$$\begin{aligned}
\Delta t_i &= -\alpha_{pi} \alpha_{qj} A_{pq} \Delta u_j, \\
\frac{1}{2}\Sigma u_i^k(\xi) &= u_i^0 + \omega^0 \left[\sum_{s=1}^{k-1} 2J_s n_i^s + J_k n_i^k (\xi + 1) \right] + \\
&+ \sum_{s=1}^{k-1} \alpha_{pi}^s \alpha_{qj}^s B_{pq} J_s^2 \int_{-1}^1 \int_{-1}^{\eta} \Sigma t_j^s(\zeta) d\zeta d\eta + \\
&+ \alpha_{pi}^k \alpha_{qj}^k B_{pq} J_k^2 \int_{-1}^{\xi} \int_{-1}^{\eta} \Sigma t_j^k(\zeta) d\zeta d\eta + \\
&+ 2 \sum_{m=1}^{k-1} J_m \alpha_{pi}^m \alpha_{qj}^m B_{pq} \left(2h\sigma_j^0 + \sum_{s=1}^{m-1} J_s \int_{-1}^1 \Sigma t_j^s(\xi) d\xi \right) + \\
&+ (\xi + 1) J_k \alpha_{pi}^k \alpha_{qj}^k B_{pq} \left(2h\sigma_j^0 + \sum_{s=1}^{k-1} J_s \int_{-1}^1 \Sigma t_j^s(\xi) d\xi \right) - \\
&- \frac{2}{D} \sum_{s=1}^{k-1} \sum_{m=1}^{s-1} J_s J_m n_i^s \int_{-1}^1 M^m(\xi) d\xi - \frac{\xi + 1}{D} J_k n_i^k \sum_{s=1}^{k-1} J_s \int_{-1}^1 M^s(\xi) d\xi - \\
&- \frac{1}{D} \left[\sum_{s=1}^{k-1} n_i^s J_s^2 \int_{-1}^1 \int_{-1}^{\eta} M^s(\zeta) d\zeta d\eta + n_i^k J_k^2 \int_{-1}^{\xi} \int_{-1}^{\eta} M^k(\zeta) d\zeta d\eta \right]. \tag{20}
\end{aligned}$$

Середні значення переміщень u_i^0 та повороту ω^0 лівого торця включення визначаємо з рівнянь глобальної рівноваги включення:

$$\begin{aligned}
2h(\sigma_j^n - \sigma_j^0) - \int_{\mathbf{x}_0}^{\mathbf{x}_n} \Sigma t_j(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) &= 0, \\
M^n(1) + M_n &= 0. \tag{21}
\end{aligned}$$

Рівняння (1), (2), (20) разом із рівнянням глобальної рівноваги включення (21) є математичною моделлю тіла з тонким пружним включенням, придатною для розв'язування за допомогою дуального методу граничних елементів. Сталі σ_j^0 , σ_j^n відповідно до підходів теорії тонких дефектів [7] або вважають нульовими, або задають апріорно. Стосовно торцевих моментів M_0 , M_n , то очевидно, що внаслідок тонкості включення їх можна вважати нульовими.

3. Методи визначення узагальнених КІН. Відповідно до [6, 7] поля переміщень і напружень в околі вершини тонкого пружного включення описуються такими асимптотичними залежностями:

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} &= \frac{\sqrt{r}}{4G\sqrt{2\pi}} + \left[K_{11} \begin{pmatrix} (2\alpha - 1) \cos \theta_1 - \cos \theta_3 \\ (2\alpha + 1) \sin \theta_1 - \sin \theta_3 \end{pmatrix} + \right. \\
 &+ K_{21} \begin{pmatrix} (2\alpha + 3) \sin \theta_1 + \sin \theta_3 \\ -(2\alpha - 3) \cos \theta_1 - \cos \theta_3 \end{pmatrix} + \\
 &+ \alpha_* K_{12} \begin{pmatrix} -(4\alpha + 1) \cos \theta_1 + \cos \theta_3 \\ \sin \theta_1 + \sin \theta_3 \end{pmatrix} + \\
 &\left. + \alpha_* K_{22} \begin{pmatrix} -\sin \theta_1 - \sin \theta_3 \\ (4\alpha - 1) \cos \theta_1 + \cos \theta_3 \end{pmatrix} \right] + O(r^{3/2}), \\
 \begin{pmatrix} \sigma_{22} \\ \sigma_{11} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} &= \frac{1}{4\sqrt{2\pi r}} \left\{ K_{11} \begin{pmatrix} 5 \cos \theta_1 - \cos \theta_5 \\ 3 \cos \theta_1 + \cos \theta_5 \\ -\sin \theta_1 + \sin \theta_5 \end{pmatrix} + K_{21} \begin{pmatrix} -\sin \theta_1 + \sin \theta_5 \\ -7 \sin \theta_1 - \sin \theta_5 \\ 3 \cos \theta_1 + \cos \theta_5 \end{pmatrix} + \right. \\
 &+ \alpha_* \left[K_{12} \begin{pmatrix} (2\alpha - 3) \cos \theta_1 + \cos \theta_5 \\ -(2\alpha + 5) \cos \theta_1 - \cos \theta_5 \\ -(2\alpha + 1) \sin \theta_1 - \sin \theta_5 \end{pmatrix} + \right. \\
 &\left. \left. + K_{22} \begin{pmatrix} (2\alpha + 3) \sin \theta_1 - \sin \theta_5 \\ -(2\alpha - 5) \sin \theta_1 + \sin \theta_5 \\ (2\alpha - 1) \cos \theta_1 - \cos \theta_5 \end{pmatrix} \right] \right\} + \dots, \quad (22)
 \end{aligned}$$

де r – відстань до вершини включення; K_{ij} – узагальнені КІН; α – стала Мусхелішвілі, яка для плоского напруженого стану дорівнює $\alpha = (3 - \nu)/(1 + \nu)$, а для плоскої деформації $\alpha = 3 - 4\nu$; $\alpha_* = 2/(\alpha - 1)$; $\theta_j = j\theta/2$; θ – полярний кут; Ox_1x_2 – прямокутна система координат, вісь Ox_1 якої спрямована уздовж дотичної до серединної лінії включення у його вершині (рис. 4). Відповідно до (22) поле напружень біля вершини дефекту має кореневу особливість.

У більшості реалізацій ДМГЕ для дослідження тріщин спеціальні граничні елементи, що моделюють особливість поля напружень у вершині дефекту, не використовуються, а КІН визначають методами екстраполяції чи на основі J -інтеграла [8].

Для визначення узагальнених КІН (УКІН) біля вершини включення також пропонується не використовувати спеціальних граничних елементів, а застосувати підходи на основі J -інтеграла [8] чи апроксимації поля напружень асимптотичним розв'язком [11].

Окрім зазначених підходів, розробимо метод екстраполяції вузлових значень розриву напружень і переміщень на крайньому граничному елементі. За ним відповідно до (22) крайові функції біля вершини дефекту подамо у вигляді

$$\Delta u_j = \frac{\sqrt{r}(\alpha + 1)K_{i1}}{\sqrt{2\pi G}}, \quad i \neq j, \quad \Sigma t_i = (-1)^{i+1} \frac{K_{i2}\alpha_*(\alpha + 1)}{\sqrt{2\pi r}}. \quad (23)$$

Для визначення УКІН K_{ij} використаємо значення функцій Δu_i та Σt_i у вузлах 3–3' та 2–2' (рис. 4). Апроксимуючи функціями (23) вузлові значення розривів переміщень Δu_i та напружень Σt_i , обчислені на

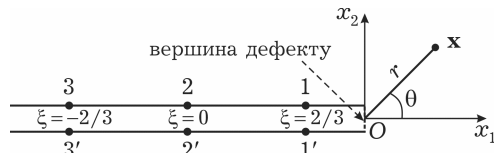


Рис. 4. Система вузлів на кінцевому граничному елементі

основі розробленого ДМГЕ, за допомогою методу найменших квадратів отримуємо прості розрахункові формули:

$$K_{i1} = \frac{\sqrt{\pi}G(3\Delta u_j^{2-2'} + \sqrt{15}\Delta u_j^{3-3'})}{4\sqrt{2J}(x+1)}, \quad i \neq j,$$

$$K_{i2} = (-1)^{i+1} \frac{\sqrt{2\pi J}(5\Sigma t_i^{2-2'} + \sqrt{15}\Sigma t_i^{3-3'})}{8x_*(x+1)}. \quad (24)$$

При застосуванні цих виразів необхідно використовувати значення функцій Δu_i та Σt_i , виражені у локальній системі координат, для якої записані асимптотичні залежності (22).

4. Числовий аналіз. Прямолінійне включення. Для ілюстрації ефективності застосування розробленого підходу розглянемо задачу про тонке прямолінійне пружне включення скінченної довжини у безмежній матриці. Відносну жорсткість включення характеризуватимемо величиною $k = E^{\text{inc}}/E^{\text{m}}$, де E^{m} – модуль пружності матеріалу матриці. Коефіцієнти Пуассона матриці і включення вважатимемо однаковими: $\nu^{\text{inc}} = \nu^{\text{m}} = 0.3$. Схема задачі зображена на врізці до рис. 5. Приймаємо, що товщина включення дорівнює 0.01 його довжини. Торцеві напруження вважатимемо нульовими. Узагальнені КІН обчислюватимемо за формулою (24). Отримані розробленим підходом дані зіставлятимемо із результатами прямого розрахунку тонкого прямокутного включення відповідних розмірів за допомогою регуляризаційного МГЕ [9] із визначенням УКІН за допомогою апроксимаційного підходу [11].

Результати числового аналізу задачі за допомогою зазначених підходів зображено на рис. 5. Суцільні лінії відповідають запропонованому методу на основі моделі тонкого включення (20), а штрихові – прямому розрахунку тонкого прямокутного включення за допомогою регуляризаційного МГЕ.

Для випадків, близьких до крайніх значень відносної жорсткості k включення (нуль, безмежність), відхилення узагальнених КІН, обчислених запропонованим підходом, від аналітичних розв'язків для тріщини та абсолютно жорсткого включення є меншим ніж 1.2%. Узагальнені КІН, отримані прямим методом для дуже податного і дуже жорсткого включення, відрізняються від аналітичного розв'язку дещо більше: 2% відхилення від розв'язку для тріщини і 5.3% – відхилення від розв'язку для абсолютно жорсткого включення. Такі результати зумовлені впливом урахування реальної ненульової товщини включення, а далі і проміжної асимптотики, що залежить від розміру і форми торця включення.

На рис. 5 бачимо достатньо добру узгодженість результатів розрахунку тонкого включення за моделлю (20) і прямим методом, хоча останній дає дещо більші за величиною значення узагальнених КІН для жорстких включень та менші для податних. Таким чином, для останніх запропонований підхід залишає певний «запас міцності». Однією із причин цих відхилень для прямого підходу є згадана вище проміжна асимптотика, зумовлена формою торця, що впливає на визначення узагальнених КІН методом апроксимації поля напружень. Іншою причиною є нехтування при розрахунках запропонованим підходом торцевими сталими, а також більша міра наближеності у моделюванні включення дуальним методом.

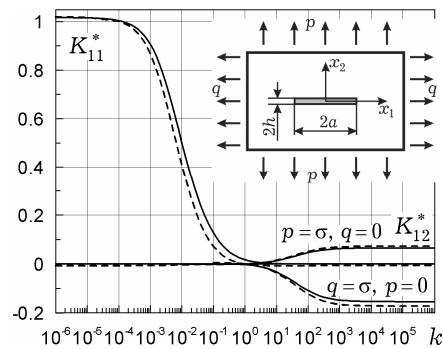


Рис. 5. Нормовані узагальнені КІН $K_{ij}^* = K_{ij}/(\sigma\sqrt{\pi a})$ для тонкого прямолінійного пружного включення

Перевагою пропонованого підходу є зменшення необхідної кількості граничних елементів. Скажімо, для числового розв'язування розглянутої задачі використано 30 розривних квадратичних граничних елементів (складено систему із $30 \times 3 \times 4 + 3 = 363$ рівнянь), тоді як для моделювання прямим підходом використано 80 неперервних квадратичних граничних елементів (система із $80 \times 2 \times 4 = 640$ рівнянь). Важливим є і те, що запропонований метод дає можливість використовувати моделі включення різного рівня складності, у тому числі й механічно нелінійні.

Включення уздовж дуги кола. Під час розгляду задач для тонкого пружного включення за допомогою прямого підходу [10] з'ясовано, що окремі методи теорії тонких включень, зокрема, на основі лінійного розвинення комплексних потенціалів дефекту [2], не дають можливості з достатньою точністю визначити напружений стан у випадку пружного включення з жорсткістю, вищою ніж у матриці. Так, коефіцієнт інтенсивності напружень K_{22} , отриманий прямим підходом [10] із використанням МГЕ, змінював свій знак і досягав граничного значення за значень відносної жорсткості k , значно більших, ніж у роботі [2]. Така поведінка в праці [10] пов'язується зі згином тонкого включення.

Для додаткової верифікації цих результатів дослідимо розтяг безмежної матриці з тонким включенням уздовж дуги півкола прямим підходом і за допомогою розробленого ДМГЕ з використанням двох моделей включення: 1) лише розтягу-зсуву (7), (12); 2) повною моделлю (20), що враховує також згинальне навантаження. Схема задачі зображена на врізці до рис. 6. Пружні сталі та умови такі ж, як і в попередній задачі. Нормовані значення узагальнених КІН $K_{ij}^* = K_{ij}/(p\sqrt{\pi a})$, отримані за моделями 1 (штрихові криві) та 2 (суцільні криві), а також за допомогою прямого підходу [9] із використанням для визначення УКІН методу [11] (штрихпунктирні криві) зображено на рис. 6.

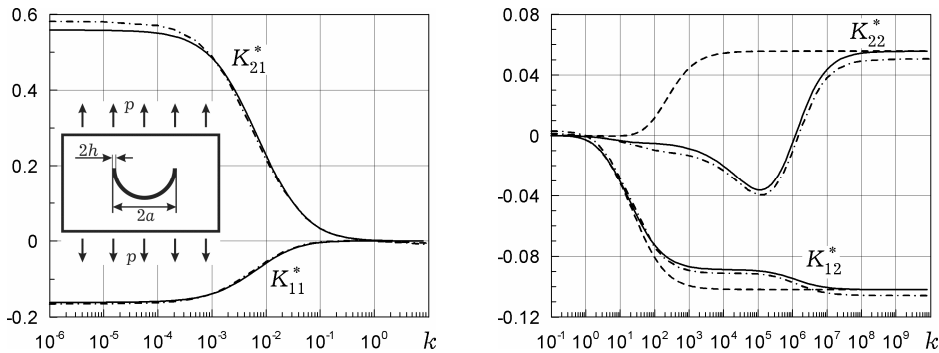


Рис. 6. Нормовані УКІН для тонкого включення уздовж дуги кола.

На рис. 6 бачимо, що результати, отримані за обома моделями для сильно податного ($k \ll 1$, $K_{i1}^* \approx 0$) включення (ліва частина рисунку), практично збігаються і на графіках їх розрізнити неможливо. Прямий підхід дає дещо завищені значення УКІН внаслідок впливу зазначеної вище проміжної асимптотики. Стосовно жорстких включень (права частина рисунку), то врахування згину суттєво впливає на обчислені значення істотно ненульових УКІН. Отримані за моделлю 2 значення УКІН досить добре узгоджуються із відповідними величинами, визначеними за допомогою прямого підходу, а мінімум УКІН K_{22}^* досягається для визначеної у роботі [10] відносної жорсткості. Модель [2] на основі лінійного розвинення комплексних потенціалів дає результати, близькі до моделі 1 включення. Отже, додатково підтверджується висловлене в [10] припущення, що отримані особливості зміни УКІН зумовлені урахуванням опору пружного включення згинові.

Тобто у підході [2] недостатньо повно враховано згин тонкого включення, що зумовлено, можливо, не стільки зробленим вибором торцевих сталей, як нехтуванням у розвиненні комплексних потенціалів членами при степенях h , більших від першої.

Висновки. Розроблено спосіб моделювання тонких пружних включень за допомогою дуального методу граничних елементів. У розгорнутій формі записано відповідні рівняння моделі. Запропоновано методіку числового визначення УКІН екстраполяцією крайових функцій, обчислених на кінцевому елементі, що моделює тонке включення. У числових прикладах для включення прямолінійного та уздовж дуги кола зіставлено отримані запропонованим методом результати із розрахунком відповідних задач прямим підходом регуляризаційного МГЕ. На прикладі включення уздовж дуги кола виконано порівняння моделей, що враховують або не враховують ефект згину. Зазначено переваги використання розробленого дуального МГЕ для тонких включень порівняно із прямим підходом та існуючими підходами теорії тонких включень.

1. Александров В. М., Мхитарян С. М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. – Москва: Наука, 1983. – 488 с.
2. Бернар И. И., Опанасович В. К. Напряженное состояние пластинки с тонкостенным включением по дуге окружности // Прикл. математика и механика. – 1983. – 47, № 2. – С. 249–256.
3. Грилицкий Д. В., Сулим Г. Т. Упругие напряжения в плоскости с тонкостенным включением // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1975. – Вып. 1. – С. 41–48.
4. Панасюк В. В., Стадник М. М., Силованюк В. П. Концентрация напряжений в трехмерных телах с тонкими включениями. – Киев: Наук. думка, 1986. – 216 с.
5. Подстригач Я. С. Условия скачка напряжений и перемещений на тонкостенном включении в сплошной среде // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1982. – № 12. – С. 29–31.
6. Сулим Г. Т. Концентрация напряжений возле тонкостенных линейных включений // Прикл. механика. – 1981. – 17, № 11. – С. 82–89.
Te same: Sulim G. T. Stress concentration next to thin-walled linear inclusions // Int. Appl. Mech. – 1981. – 17, No. 11. – P. 1011–1017.
7. Сулим Г. Т. Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями. – Львів: Досл.-вид. центр НТШ, 2007. – 716 с.
8. Сулим Г., Пастернак Я. Використання енергетичних підходів для дослідження тонкостінних пружних включень // Машинознавство. – 2006. – № 9–10. – С. 13–16.
9. Сулим Г., Пастернак Я. Регуляризована тотожність Сомільяни для задач теорії пружності з тонкостінними структурами // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. Прикл. математика та інформатика. – 2007. – Вип. 13. – С. 142–150.
10. Сулим Г. Т., Пастернак Я. М. Визначення параметрів граничного стану пластинок із тонкими криволінійними пружними включеннями // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2009. – 45, № 2. – С. 75–84.
Te same: Sulym H. T., Pasternak Ya. M. Determination of the parameters of the limiting state of the plates with thin curvilinear elastic inclusion // Mater. Sci. – 2009. – 45, No. 2. – P. 227–237.
11. Сулим Г. Т., Пастернак Я. М. Визначення параметрів граничного стану пружних тіл із тонкими включеннями за числовим розв'язком задачі // Вісн. Тернопільськ. держ. техн. ун-ту. – 2009. – 14, № 1. – С. 15–22.
12. Тимошенко С. П. Курс теории упругости. – Киев: Наук. думка, 1972. – 501 с.
13. Чобанян К. С., Хачикян А. С. Плоское деформированное состояние упругого тела с тонкостенным гибким включением // Изв. АН АрмССР. Механика. – 1967. – 20, № 6. – С. 19–29.
14. Portela A., Aliabadi M. H., Rooke D. P. The dual boundary element method: Effective implementation for crack problems // Int. J. Numer. Meth. Engng. – 1992. – 33. – P. 1269–1287.
15. Portela A., Aliabadi M. H., Rooke D. P. Dual boundary element incremental analysis of crack propagation // Comput. Struct. – 1993. – 46. – P. 237–247.
16. Portela A. Dual boundary element analysis of crack growth. – Southampton: Comp. Mech. Publ, 1993.

ДУАЛЬНЫЙ МЕТОД ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ТОНКИХ ВКЛЮЧЕНИЙ

Предложено использовать дуальный метод граничных элементов в задачах теории тонких включений. Контактные условия на границе включения рассматриваются как скачки смещений и напряжений в теле на срединной поверхности дефекта. Таким образом, моделью включения являются связи между неизвестными разрывами и средними значениями смещений и напряжений. Для прямолинейных граничных элементов построены модели включений, учитывающие растяжение, сдвиг и изгиб тонкого включения. Рассмотрены примеры, в которых путем сравнения результатов, полученных с помощью разработанного подхода, с данными, полученными на основании прямого подхода, показана эффективность применения предложенного метода.

DUAL BOUNDARY ELEMENT METHOD FOR THE PROBLEMS OF THIN INCLUSIONS THEORY

A dual boundary element method we propose to apply in the problems of thin inclusions theory. The contact conditions on the boundary of thin inclusion are considered as displacement and stress jumps in a body on the median surface of defect. Thus the relations between unknown discontinuities and average values of the displacements and stresses are a model of inclusions. For rectilinear boundary elements the models of inclusions are constructed considering tension, shear and bending of a thin inclusion. The examples for rectilinear and curved inclusions are studied. The results obtained by the proposed technique compared with that obtained by a direct approach show the efficiency of utilization of proposed method.

¹ Луцьк. нац. техн. ун-т, Луцьк,

² Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів,

³ Львів. нац. ун-т ім. Івана Франка, Львів

Одержано
28.09.09