УДК 517.95

Р. В. Слоньовський, Р. Р. Столярчук

ОЦІНКА ЛОКАЛЬНОЇ ПОХИБКИ ДРОБОВО-РАЦІОНАЛЬНИХ БАГАТОКРОКОВИХ МЕТОДІВ ЗІ ЗМІННИМ КРОКОМ ІНТЕГРУВАННЯ

Для забезпечення належної якісної характеристики наближеного чисельного розв'язування задачі Коші для систем звичайних диференціальних рівнянь необхідно сформулювати певні вимоги, які повинні задовольняти чисельні методи. Ефективність чисельного методу визначається побудовою алгоритму зміни кроку інтегрування і вибором порядку методу. Побудова такого методу вимагає попереднього визначення величини допустимої похибки методу на кожному кроці інтегрування. Сформульовано теорему про оцінку локальної похибки багатокрокових чисельних методів p-го порядку зі змінним кроком інтегрування без урахування похибки заокруглення. Ця теорема дає можливість побудови ефективного алгоритму зміни кроку та вибору відповідного порядку методу.

Багатокрокові чисельні методи є більш економними з точки зору обчислювальних затрат порівняно з однокроковими чисельними методами [3, 4]. Однак у вказаних роботах розглядаються лише лінійні багатокрокові методи з обмеженою областю стійкості і сталим кроком інтегрування, що ускладнює алгоритм побудови зміни кроку та забезпечення потрібної точності розв'язків [1–3]. Тому доцільно розглянути проблему побудови надійних багатокрокових методів на основі методики побудови дробово-раціональних наближень, яка наведена у [5–7].

У цій роботі встановимо оцінку локальної похибки для дробово-раціональних багатокрокових чисельних методів зі змінним кроком інтегрування і доведемо теорему про зображення локальної похибки методу p-го порядку без урахування похибки заокруглення.

1. Постановка задачі. Розглянемо задачу Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь

$$y' = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0 , \tag{1}$$

де $y \in \mathbb{R}^N$; $f : \mathbb{R}^{N+1} \to \mathbb{R}^N$, на інтервалі зміни незалежної змінної $x \in [0, x_k]$.

Розв'язок задачі (1) конструюємо за допомогою багатокрокових дробово-раціональних числових методів, які базуються на дробово-раціональних наближеннях [5, 7]:

$$y_{n+1}^{[p]} = \frac{\sum\limits_{j=0}^{p} (-1)^j C_p^j a_p^j h^j J_n^j T_{p-j,n}}{(E - a_p h J_n)^p} , \tag{2}$$

де $T_{p-j,n}$ – тейлорівське $(p-j)$-те наближення розв'язку p-го порядку відносно сіткового вузла x_n; C_p^j – біноміальні коефіцієнти; a_p^j – параметр апроксимації узгодження p-го порядку; J_n – матриця Якобі правої частини системи (1).

Апроксимацію вказаних тейлорівських наближень потрібних порядків забезпечимо використанням лінійних багатокрокових методів відповідних порядків, допускаючи певну локальну похибку ε_p:

$$T_{p,n} = y(x_{n+1}) - \varepsilon_p ,$$

де $y(x_{n+1})$ – значення точного розв'язку в сітковому вузлі x_{n+1}.

Враховуючи, що в дробово-раціональні наближення входять всі тейлорівські наближення розв'язку від першого до p-го порядків, які апроксимуються лінійними багатокроковими методами, для визначення локальної похибки такого наближення доцільно попередньо визначити оцінки локальних похибок лінійних багатокрокових методів.

Оцінку локальної похибки лінійного багатокрокового методу визначимо на окремо взятому кроці інтегрування без урахування похибки заокруглень.

Розглянемо загальне подання лінійного багатокрокового методу довільного порядку p у вигляді

$$y_{n+1}^{[p]_L} = y_n + \sum_{j=0}^{p-1} \beta_{pj} h y'_{n-j} , \tag{3}$$

де $y_{n+1}^{[p]_L}$ − наближене значення розв’язку в сітковому вузлі x_{n+1} лінійним багатокроковим методом; β_{pj} − коефіцієнти, які необхідно вибрати так, щоб метод (3) узгоджувався з тейлорівським наближенням p -го порядку.

2. Основні результати.

2.1. Локальна похибка лінійного багатокрокового методу зі змінним кроком інтегрування. Означимо локальну похибку методу p -го порядку як

$$\varepsilon_p = y(x_{n+1}) - y_{n+1}^{[p]} , \tag{4}$$

де $y(x_{n+1})$ − значення точного розв’язку в сітковому вузлі x_{n+1}; $y_{n+1}^{[p]}$ − значення наближеного розв’язку в цьому вузлі, одержане методом p -го порядку вигляду (3) з використанням методики для лінійних багатокрокових методів зі сталим кроком інтегрування.

Припускаємо, що на всьому заданому інтервалі інтегрування існує єдиний $p+1$ разів диференційовний розв’язок вихідної задачі Коші (1). При дослідженні методів зі змінним кроком інтегрування будемо враховувати, що вузли інтегральної сітки розподілені нерівномірно:

$$x_{n-i} = x_n - S_i h , \tag{5}$$

де S_i визначаються співвідношеннями

$$S_i = \frac{1}{h}\sum_{j=1}^{i} h_j, \qquad i = 1,\dots,p-1 ,$$

$$S_i = S_{i-1} + \frac{h_i}{h} ,$$

а коефіцієнти β_{pj} у співвідношенні (3) є функціями від S_i, $\beta_{pj}(S_1, S_2, \dots, S_{p-1})$. При конкретному розподілі сіткових вузлів у процесі визначення наближення у вузлі $x_{n+1} = x_n + h$ коефіцієнти β_{pj} приймають певні числові значення.

Теорема 1. *Локальна похибка* ε_p *лінійного багатокрокового методу вигляду* (3) p *-го порядку визначається співвідношенням*

$$\varepsilon_p = C_p y^{(n+1)}(\tau) h^{p+1} = O(h^{p+1}), \qquad x_n - S_{p-1}h < \tau < x_n + h , \tag{6}$$

де

$$C_p = \frac{1}{(p+1)!}\left[(2+S_{p-1})^{p+1} - S_{p-1}^{p+1} - (p+1)\sum_{j=0}^{p-2} \beta_{pj}(S_{p-1} - S_j)^p\right]. \tag{7}$$

Д о в е д е н н я. Розвинемо точний розв’язок задачі Коші $y(x)$ у ряд Тейлора з залишковим членом в інтегральній формі в околі сіткового вузла $x_{n-p+1} = x_n - S_{p-1}h$:

$$y(x) = y(x_{n+1}) + \sum_{i=1}^{p} \frac{(x - x_{n-p+1})^i}{i!} y^{(i)}(x_{n-p+1}) + R_p(x), \qquad (8)$$

де

$$R_p = \frac{1}{p!} \int_{x_{n-p+1}}^{\infty} y^{(p+1)}(t)(x-t)^p \, dt.$$

Увівши позначення

$$g_p(x) = y(x_{n-p+1}) + \sum_{i=1}^{p} \frac{(x - x_{n-p+1})^i}{i!} y^{(i)}(x_{n-p+1}) \qquad (9)$$

і функцію

$$K_p(u) = \begin{cases} u^p, & u \ge 0, \\ 0, & u < 0, \end{cases} \qquad (10)$$

вираз (8) подамо у вигляді

$$y(x) = g_p(x) + \frac{1}{p!} \int_{x_{n-p+1}}^{\infty} y^{(p+1)}(t) K_p(x-t) \, dt. \qquad (11)$$

Запишемо значення тейлорівського розвинення (11) у сітковому вузлі $x_{n+1} = x_n + h$:

$$y(x_{n+1}) = g_p(x_{n+1}) + \frac{1}{p!} \int_{x_{n-p+2}}^{\infty} y^{(p+1)}(t) K_p(x_n + h - t) \, dt. \qquad (12)$$

Використовуючи значення функції $y(x)$ в сітковому вузлі x_n і її першої похідної у вузлах x_{n-i}, $i = 0, \ldots, p-1$, що визначаються за формулами (11), знайдемо наближення цієї функції у вузлі x_{n+1} багатокроковим методом (3). Після перетворень отримаємо

$$y_{n+1}^{[p]} = \left[g_p(x_n) + \sum_{i=0}^{p-1} \beta_{pi} h g_p'(x_{n-i}) \right] + \frac{1}{p!} \int_{x_{n-p+1}}^{\infty} y^{(p+1)}(t) \left\{ K_p(x_n - t) + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=0}^{p-1} \beta_{pi} h K_p'(x_n - S_i h - t) \right\} dt. \qquad (13)$$

Перша група доданків (у квадратних дужках) у (13) визначає значення наближення функції $g_p(x)$ у вузлі x_{n+1}. Оскільки функція $g_p(x)$ є многочленом степеня p, то метод (3) p-го порядку визначає її точне значення:

$$g_p(x_{n+1}) = g_p(x_n) + \sum_{i=0}^{p-1} \beta_{pi} h g_p'(x_{n-i}). \qquad (14)$$

Віднявши від рівності (12) співвідношення (13), враховуючи рівність (14), отримаємо

$$\varepsilon_p = y(x_{n+1}) - y_{n+1}^{[p]} = -\frac{1}{p!} \int_{x_{n-p+1}}^{x_n + h} y_{n+1}^{(p+1)}(t) \left\{ K_p(x_n + h - t) - \right.$$

$$\left. - K_p(x_n - t) - \sum_{i=0}^{p-1} \beta_{pi} h K_p'(x_n - S_i h - t) \right\} dt.$$

При цьому верхня межа інтеграла в співвідношенні (12) звужена, оскільки для $t > x_n + h$ функція $K_p(t)$ та її похідні, що містяться під знаком інтеграла, дорівнюють нулеві.

Зважаючи на те, що підінтегральний вираз у наведеному вище співвідношенні не міняє знаку на інтервалі інтегрування, за теоремою про середнє перетворимо це співвідношення до вигляду

$$\varepsilon_p = \frac{1}{p!} y^{(p+1)}(\tau) \int_{x_{n-p+1}}^{x_n+h} \Big\{ K_p(x_n + h - t) - K_p(x_n - t) - $$

$$- \sum_{i=0}^{p-1} \left(\beta_{pi} h K'_p(x_n - S_i h - t)\right) \Big\} dt. \qquad (15)$$

Використовуючи означення (10) функції $K_p(u)$, подамо (15) у вигляді суми

$$\varepsilon_p = \frac{1}{p!} y^{(p+1)}(\tau) \left\{ \int_{x_n - S_{p-1}h}^{x_n+h} (x_n + t - h)^p dt - \int_{x_n - S_{p-1}h}^{x_n} (x_n - t)^p \, dt - \right.$$

$$\left. - h \sum_{i=0}^{p-1} \left[\beta_{pi} \int_{x_n - S_{p-1}h}^{x_n - S_i h} (x_n - S_i h - t)^{p-1} \, dt \right] \right\}. \qquad (16)$$

Після обчислення інтегралів у співвідношенні (16) отримаємо вираз

$$\varepsilon_p = \frac{1}{p!} y^{(p+1)}(\tau) \left[\frac{(1 + S_{p-1})^{p+1} h^{p+1}}{p+1} - \frac{(S_{p-1}h)^{p+1}}{p+1} - \right.$$

$$\left. - \sum_{i=0}^{p-2} \beta_{pi} (S_{p-1} - S_i)^p h^{p+1} \right],$$

який запишемо як

$$\varepsilon_p = C_p y^{(n+1)}(\tau) h^{p+1} = O(h)^{p+1},$$

$$C_p = \frac{1}{(p+1)!} \left[(2 + S_{p-1})^{p+1} - S_{p-1}^{p+1} - (p+1) \sum_{i=0}^{p-2} \beta_{pi} (S_{p-1} - S_i)^p \right].$$

Теорему доведено. ◊

Числові значення коефіцієнтів C_p залежать від порядку методу, відношень попередніх кроків інтегрування до наступного кроку і коефіцієнтів типу β_{ip}, які відповідають методу.

Використання оцінок локальних похибок методів різних порядків дає можливість побудувати алгоритми зміни порядку методу і величини кроку.

2.2. Локальна похибка багатокрокового дробово-раціонального методу. Оцінимо локальну похибку багатокрокового дробово-раціонального методу.

Локальна похибка дробово-раціональних методів, що базуються на дробово-раціональних наближеннях

$$y_{n+1}^{[p]} = \frac{\sum_{i=0}^{p} (-1)^i \alpha_i h^i J_n^i y_{n+1}^{[p-i]_L}}{\sum_{j=0}^{p} (-1)^j \alpha_j h^j J_n^j}, \qquad (17)$$

є усередненням локальних похибок лінійних багатокрокових методів з ваговими коефіцієнтами

$$\omega_i = \frac{(-1)^i \alpha_i h^i J_n^i}{\sum_{j=0}^{p} (-1)^j \alpha_j h^j J_n^j}, \qquad i = 0, \dots, p, \tag{18}$$

тобто

$$\varepsilon_{pq} = \sum_{i=0}^{p} \omega_i \varepsilon_{p-i}, \tag{19}$$

де ε_i – локальна похибка лінійного багатокрокового методу i-го порядку.

Використовуючи оцінки локальних похибок лінійних методів $\varepsilon_p = y(x_{n+1}) - y_{n+1}^{[p]}$, запишемо

$$y_{n+1}^{[k]_L} = y(x_{n+1}) - \varepsilon_k, \qquad k = 0, \dots, p.$$

Підставляючи це співвідношення у (17) і використовуючи позначення (18), отримаємо

$$y_{n+1}^{[p]} = y(x_{n+1}) - \sum_{i=0}^{p} \omega_i \varepsilon_{p-i},$$

звідки випливає, що

$$\varepsilon_{pq} = y(x_{n+1}) - y_{n+1}^{[p]} = \sum_{i=0}^{p} \omega_i \varepsilon_{p-i}.$$

Якщо у співвідношення (19) підставити ε_i, означене формулою (6) з теореми 1, то для оцінки локальної похибки ε_{pq} отримаємо

$$\varepsilon_{pq} \approx h^{p+1} \sum_{i=0}^{p} \bar{\omega}_i C_{p-i} y^{(p-i+1)}(\tau_{p-i}) = O(h^{p+1}), \tag{20}$$

де

$$\bar{\omega}_i = \frac{(-1)^i \alpha_i J_n^i}{\sum_{j=0}^{p} (-1)^j \alpha_j h^j J_n^j}, \qquad \tau_k \in (x_n - S_{k-1} h,\, x_n + h).$$

Для визначення оцінки локальної похибки дробово-раціональних методів вигляду

$$y_{n+1}^{[p]} = y_n + \frac{\sum_{j=0}^{p-1} (-1)^j C_p^j a_p^j h^j J_p^j F_{p-j,n}}{(E - a_p h J_n)^p},$$

де

$$F_{k,n} = \sum_{i=1}^{k} \frac{h^i}{i!} y_n^i, \qquad T_{k,n} = y_n + F_{k,n},$$

використаємо рекурентні співвідношення

$$Q_n B_i = B_{i-1} + C_p^{i-1} D_{p+1-i}, \qquad i = 1, \dots, p,$$

$$Q_n = E - a_p J_n, \qquad B_0 = 0,$$

$$D_j = \sum_{k=0}^{j-1} (-1)^k C_j^k (y_{n+1}^{[j-k]_L} - y_n),$$

$$y_{n+1}^{[p]} = y_n + B_p,$$

позначивши

$$\varepsilon_{pq} = \varepsilon_0 + B_p ,$$

$$D_j = \sum_{k=0}^{j-1} (-1)^k C_j^k (\varepsilon_{j-k} - \varepsilon_0) ,$$

де $\varepsilon_0 = hy'_n(\tau_0)$, $\tau_0 \in (x_n, x_{n+1})$. Але оцінки локальної похибки (6), де коефіцієнти C_p визначаються формулою (7), використовуються лише для лінійного методу порядку p вигляду $y_{n+1}^{[p]_L} = y_n + \sum_{j=0}^{p-1} \beta_{pj}^{(p)} hy'_{n-j}$, який входить у багатокрокові дробово-раціональні методи.

Для забезпечення потрібного типу стійкості згідно з методом, запропонованим у [7]:

$$y_{n+1}^{[p-k]_L} = \sum_{i=0}^{p-k} \alpha_{i,p-k}^{(p)} y_{n-i} + \sum_{j=0}^{p-k-1} \beta_{j,p-k}^{(p)} hy'_{n-j}, \qquad k = 1,\dots, p-1 , \tag{21}$$

існують свої похибки, які визначаються наступною теоремою.

Теорема 2. *Локальна похибка лінійних багатокрокових методів вигляду* (21) *визначається співвідношенням*

$$\varepsilon_{p-k}^{(p)} = C_{p-k}^{(p)} y^{(p-k+1)}(\tau) h^{p-k+1}, \qquad x_n - S_{p-k}h < \tau < x_n + h , \tag{22}$$

де

$$C_{p-k}^{(p)} = \frac{1}{(p-k+1)!}\Bigg[(1 + S_{p-k})^{p-k+1} - \\ - (p-k+1) \sum_{j=0}^{p-k+1} \beta_{j,p-k}^{(p)} (S_{p-k} - S_j)^{p-k}\Bigg], \tag{23}$$

при умові, що функція

$$F(t) = K_\nu(x_n + h - t) - \sum_{i=0}^{\nu} \alpha_{i\nu}^{(p)} K_\nu(x_n - S_i h - t) - \\ - h\sum_{j=0}^{\nu-1} \beta_{j\nu}^{(p)} K'_\nu(x_n - S_j h - t) \tag{24}$$

не міняє знаку на інтервалі $x_n - S_{p-k}h \le t \le x_n + h$.

Д о в е д е н н я проводимо аналогічно доведенню теореми 1 про похибку лінійних багатокрокових методів, враховуючи структуру методу, тобто співвідношення (21).

Для спрощення викладок введемо позначення

$$\nu = p - k .$$

Подібно, як при доведенні теореми 1, розвинення точного розв'язку вихідної задачі Коші і його похідної у ряд Тейлора в околі сіткового вузла $x_{n-\nu} = x_n - S_\nu h$ подаємо у вигляді

$$y(x) = g_\nu(x) + \frac{1}{\nu!} \int_{x_{n-\nu}}^{\infty} y^{(\nu+1)}(t) K_\nu(x-t)\, dt ,$$

$$y'(x) = g'_\nu(x) + \frac{1}{\nu!} \int_{x_{n-\nu}}^{\infty} y^{(\nu+1)}(t) K'_\nu(x-t)\, dt ,$$

де

$$g_\nu(x) = y(x_{n-\nu}) + (x - x_{n-\nu})y'(x_{n-\nu}) + \ldots + \frac{(x - x_{n-\nu})^p}{p!} y^{(p)}(x_{n-\nu}),$$

а функції $K_\nu(u)$ означені співвідношенням (10).

Означимо наближення у сітковому вузлі x_{n+1} шуканого розв'язку $y(x)$ лінійним багатокроковим методом ν-го порядку вигляду

$$y_{n+1}^{[\nu]_L} = \sum_{i=0}^{\nu} \alpha_{i\nu}^{(p)} y_{n-i} + \sum_{j=0}^{\nu-1} \beta_{jp}^{(p)} h y'_{n-j}.$$

Після перетворення отримаємо

$$y_{n+1}^{[k]_L} = g_\nu(x_n + h) + \frac{1}{\nu!} \int_{x_{n-\nu}}^{\infty} y^{(\nu+1)}(t) \left[\sum_{i=0}^{\nu} \alpha_{i\nu}^{(p)} K_\nu(x_n - S_i h - t) + \right.$$

$$\left. + h \sum_{j=0}^{\nu-1} \beta_{j\nu}^{(p)} K'_\nu(x_n - S_j h - t) \right] dt.$$

Тоді локальна похибка $\varepsilon_\nu^{(p)}$ цього наближення з урахуванням структури функції $K_\nu(u)$ подається рівністю

$$\varepsilon_\nu^{(p)} = y(x_{n+1}) - y_{n+1}^{[\nu]_L} = \frac{1}{\nu!} \int_{x_n - S_\nu h}^{x_n + h} y^{(\nu+1)}(t) \left[K_\nu(x_n + h - t) - \right.$$

$$\left. - \sum_{i=0}^{\nu} \alpha_{i\nu}^{(p)} K_\nu(x_n - S_i h - t) - h \sum_{j=0}^{\nu-1} \beta_{j\nu}^{(p)} K'_\nu(x_n - S_j h - t) \right] dt \qquad (26)$$

або, використовуючи співвідношення (24),

$$\varepsilon_\nu^{(p)} = \frac{1}{\nu!} \int_{x_n - S_\nu h}^{x_n + h} y^{(\nu+1)}(t) F(t)\, dt.$$

Функція $F(t)$ є фінітною (на інтервалі інтегрування $x_n - S_\nu h \le t \le x_n + h$ має значення, відмінні від нуля, а зовні цього інтервалу функція $F(t) = 0$).

Враховуючи, що функція $F(t)$ задовольняє умову теореми, застосуємо до співвідношення (26) теорему про середнє:

$$\varepsilon_\nu^{(p)} = \frac{1}{\nu!} y^{(\nu+1)}(\tau) \int_{x_n - S_\nu h}^{x_n + h} \left[K_\nu(x_n + h - t) - \sum_{i=0}^{\nu} \alpha_{i\nu}^{(p)} K_\nu(x_n - S_i h - t) - \right.$$

$$\left. - h \sum_{j=0}^{\nu-1} \beta_{j\nu}^{(p)} K'_\nu(x_n - S_j h - t) \right] dt.$$

Використовуючи означення (10) функції $K_\nu(u)$, отримаємо

$$\varepsilon_\nu^{(p)} = \frac{1}{\nu!} y^{(\nu+1)}(\tau) \int_{x_n - S_\nu h}^{x_n + h} (x_n + h - t)^\nu \, dt -$$

$$- \sum_{i=0}^{\nu} \alpha_{i\nu}^{(p)} \int_{x_n - S_\nu h}^{x_n + h} (x_n - S_i h - t)^\nu \, dt -$$

$$- h\nu \sum_{j=0}^{\nu-1} \beta_{j\nu}^{(p)} \int_{x_n - S_\nu h}^{x_n + h} (x_n - S_j h - t)^{\nu-1} \, dt.$$

Після інтегрування і перетворень отримаємо

$$\varepsilon_{\nu}^{(p)} = \frac{h^{\nu+1}}{(\nu+1)!} y^{(\nu+1)}(\tau) \Bigg[(1+S_{\nu})^{\nu+1} -$$

$$- \sum_{i=0}^{\nu} \alpha_{i\nu}^{(p)} (S_{\nu} - S_i) - (\nu+1) \sum_{j=0}^{\nu-1} \beta_{j\nu}^{(p)} (S_{\nu} - S_j)^{\nu} \Bigg].$$

Враховуючи прийняте позначення ν, з цього співвідношення отримаємо рівність (22), що й потрібно було довести. ◊

Формулу (23) для визначення коефіцієнтів $C_{p-k}^{(p)}$ можна спростити. Використавши співвідношення з [7]

$$\alpha_{0,p-k}^{(p)} = 1 - \sum_{i=1}^{p-k} \alpha_{i,p-k}^{(p)},$$

$$\beta_{0,p-k}^{(p)} = 1 + \sum_{i=1}^{p-k} S_i \alpha_{i,p-k}^{(p)} - \sum_{j=1}^{p-k-1} \beta_{j,p-k}^{(p)}, \qquad k = 1, \ldots, p-1,$$

після деяких перетворень рівності (22) і певного перегрупування членів для $C_{p-k}^{(p)}$ отримаємо

$$C_{p-k}^{(p)} = \frac{1}{(p-k+1)!} \Bigg(1 + (-1)^{p-k} \Bigg(\sum_{i=1}^{p-k} S_i^{p-k+1} \alpha_{i,p-k}^{(p)} -$$

$$- (p-k+1) \sum_{j=1}^{p-k-1} S_j^{p-k} \beta_{j,p-k}^{(p)} \Bigg) \Bigg).$$

Це співвідношення дає можливість оцінювати величину локальної похибки дробово-раціональних методів у процесі їх реалізації на кожному окремому інтервалі інтегрування.

Отже, локальна похибка багатокрокового дробово-раціонального методу p-го порядку визначається з використанням співвідношення (19) через деяку узгоджену норму $\|\varepsilon_{pq}\|$.

1. *Крылов В. И., Бобков В. В., Монастырный П. И.* Начала теории вычислительных методов. Дифференциальные уравнения. – Минск: Наука и техника, 1982. – 286 с.
2. *Ракитский Ю. В., Устинов С. М., Черноруцкий И. Г.* Численные методы решения жестких систем. – Москва: Наука, 1979. – 208 с.
3. *Hairer E., Wanner G.* Solving ordinary differential equations II: Stiff and differential-algebraic problems. – Springer-Verlag, 1996. – 601 p. – (Springer Ser. in Comput. Math., Vol. **14**.)
4. *Kirlinger G.* Linear multistep methods applied to stiff initial value problems. – A survey // Math. and Comput. Modelling. – 2004. – **40**, No. 11-12. – P. 1181–1192.
5. *Slonevsky R., Stolyarchuk R.* New methods for numerical investigation of dynamic processes // Proc. SIMS 2004: 45th Int. Conf. Scand. Simulation Society (Copengagen, Denmark, Sept. 23–24, 2004). – 2004. – P. 249–254.
6. *Slonevskii R. V., Stolyarchuk R. R.* Rational-fractional methods for solving stiff systems of differentials equations // J. Math. Sci. – 2008. – **150**, No. 5. – P. 2434–2438.

   Те саме: *Слоньовский Р. В., Столярчук Р. Р.* Дробно-рациональные методы решения жёстких систем дифференциальных уравнений // Фундам. и прикл. математика. – 2006. – **12**, № 4. – 203–208.
7. *Stolyarchuk R.* Multistep fractional-rational numerical method for stiff dynamic problems // Proc. on CD 5th MATHMOD (Vienna, 7–10 Febr. 2006). – P. 8-1-8-8.

ОЦЕНКА ЛОКАЛЬНОЙ ПОГРЕШНОСТИ ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНЫХ МНОГОШАГОВЫХ МЕТОДОВ С ПЕРЕМЕННЫМ ШАГОМ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Для обеспечения надлежащей качественной характеристики приближенного численного решения задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений необходимо сформулировать определенные требования, которым должны удовлетворять численные методы. Эффективность численного метода определяется построением алгоритма изменения шага интегрирования и выбором порядка метода. Построение такого метода требует предварительного определения величины допустимой погрешности метода на каждом шаге интегрирования. Сформулирована теорема об оценке локальной погрешности многошаговых численных методов p*-го порядка с переменным шагом интегрирования без учета погрешности округления. Эта теорема дает возможность построения эффективного алгоритма изменения шага и выбора соответствующего порядка метода.*

LOCAL ERROR ESTIMATION OF FRACTIONAL-RATIONAL MULTISTEP METHODS WITH VARIABLE STEP OF INTEGRATION

To ensure the proper qualitative characteristics of approximate numerical solution of the Cauchy problem for a system of ordinary differential equations it is necessary to formulate certain demands that are to be satisfied by the corresponding numerical methods. Construction of the algorithm of change of the integration step and choice of the corresponding order of the method are characteristic signs of efficiency of the numerical method. Construction of such a method demands the preliminary definition of the value of admissible error of the method at each integration step. In the paper the theorem on estimation of local error of the multistep numerical p*-th order methods with variable integration step, not allowing for the rounding-off error, is considered. The theorem allows one to construct an efficient algorithm of the step change and choice of the corresponding order of the method.*

Нац. ун-т «Львів. політехніка», Львів

Одержано
10.04.09