УДК 517.5

Г. Я. Попов

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ДВУМЕРНЫХ БЕСКОНЕЧНЫХ СИСТЕМ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Исследуются бесконечные системы алгебраических уравнений вида $x_{jm} - \sum_{i,k=1}^{\infty} t_{jmik} x_{ik} = f_{jm}$, $j = 1,2,\ldots$, $m = 1,2,\ldots$. *Числа* x_{ik} *являются искомыми, а числа* t_{jmik} *и* f_{jm} *заданы и вещественны. Рассмотрен также случай, когда вместо указанных чисел введены векторы. Чтобы записать рассматриваемые уравнения в операторной форме, вводятся некоторые нормированные пространства и доказывается их полнота. В этих пространствах вводятся операторы, с помощью которых записываются рассматриваемые уравнения. Доказывается компактность этих операторов. Для приближенного решения рассматриваемых бесконечных систем используется метод редукции, при котором верхний предел в бесконечных суммах заменяется конечным числом с увеличивающимися значениями. Установлены критерии сходимости метода редукции для рассматриваемых двумерных бесконечных систем алгебраических уравнений.*

1. Рассмотрим бесконечные системы алгебраических уравнений вида

$$x_{jm} - \sum_{i,k=1}^{\infty} t_{jmik} x_{ik} = f_{jm}, \qquad j = 1,2,\ldots, \qquad m = 1,2,\ldots. \tag{1}$$

Числа x_{ik} (двумерная числовая последовательность) являются искомыми, а числа t_{jmik} и f_{jm} заданы и вещественны. К необходимости решать уравнения вида (1), а также конечных систем из таких уравнений автор пришел при построении аналитического решения задачи об изгибе толстой прямоугольной плиты, жестко закрепленной по контуру.

Теория одномерных бесконечных систем, когда искомыми являются не двумерные числовые последовательности x_{im}, $i = 1,2,\ldots$, $m = 1,2,\ldots$, а одномерные числовые последовательности, т. е. x_i, $i = 1,2,\ldots$, достаточно хорошо разработаны. Этой теории посвящена книга Ruth F. Curtain и Hans Zwart'a [3]. Элементы этой теории содержатся в книгах Л. В. Канторовича, Г. П. Акилова [2], В. З. Вулиха [1], там же указаны критерии сходимости приближенного метода редукции при решении указанных одномерных систем алгебраических уравнений. В работе F. Ursell'a [6] устанавливается оценка погрешности этого метода. Вопросу единственности решения одномерных бесконечных систем посвящены статьи В. В. Мелешко, А. М. Гомилко [5] и A. M. J. Davis'a [4].

Для изучения системы уравнений (1) вводим пространство l_2^*, элементами которого являются двумерные числовые последовательности

$$x_{jm}, y_{jm}, \qquad j = 1,2,\ldots, \qquad m = 1,2,\ldots, \tag{2}$$

для которых выполняется условие

$$\sum_{j,m=1}^{\infty} (x_{jm})^2 < \infty, \qquad \sum_{j,m=1}^{\infty} (y_{jm})^2 < \infty. \tag{3}$$

В пространстве l_2^* определим операции сложения и умножения на число, а также скалярное произведение:

$$x + y \to x_{jm} + y_{jm}, \qquad \lambda x \to \lambda x_{jm}, \qquad (x, y) = \sum_{n,j=1}^{\infty} x_{nj} y_{nj}.$$

Определим норму элемента

$$\|x\| = \sqrt{(x,x)} = \sqrt{\sum_{n,j=1}^{\infty} x_{nj}^2}\,.$$

Введем оператор $Tx = y$, где

$$y_{jm} = \sum_{i,k=1}^{\infty} t_{jmik} x_{ik}\,. \tag{4}$$

Чтобы оператор T переводил любой элемент $x \in l_2^*$ в элемент $y \in l_2^*$, потребуем выполнения условия

$$\sum_{j,m=1}^{\infty} \sum_{k,i=1}^{\infty} t_{jmik}^2 < \infty\,. \tag{5}$$

Для доказательств достаточности условия (5), чтобы $Tx \in l_2^*$, воспользуемся неравенством Гельдера для двойных бесконечных сумм

$$\sum_{j,m=1}^{\infty} |a_{jm} b_{jm}| \le \left(\sum_{j,m=1}^{\infty} |a_{jm}|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{j,m=1}^{\infty} |b_{jm}|^q \right)^{1/q}, \qquad p^{-1} + q^{-1} = 1\,, \tag{6}$$

доказательство которого проводится по той же схеме, что и для одномерных рядов [2].

Запишем неравенство (6) для частного случая $p = q = 2$:

$$\sum_{j,m=1}^{\infty} |a_{jm} b_{jm}| \le \left(\sum_{j,m=1}^{\infty} a_{jm}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{j,m=1}^{\infty} b_{jm}^2 \right)^{1/2}. \tag{7}$$

Согласно (4) имеем

$$y_{jm}^2 \le \left(\sum_{i,k=1}^{\infty} |t_{jmik} x_{ik}| \right)^2,$$

или, воспользовавшись неравенством (7),

$$y_{jm}^2 \le \|x\|^2 \sum_{i,k=1}^{\infty} t_{jmik}^2\,. \tag{8}$$

Проведя двойное суммирование в последнем неравенстве, убеждаемся в выполнении (3), т. е., что $Tx \in l_2^*$, и одновременно получаем оценку для нормы оператора T:

$$\|T\|^2 \le \sum_{j,m=1}^{\infty} \sum_{i,k=1}^{\infty} t_{jmik}^2\,. \tag{9}$$

Для пространства l_2^* выполняется неравенство треугольника

$$\|a + b\| \le \|a\| + \|b\|. \tag{10}$$

Действительно, если к обеим частям неравенства (7), умноженного на 2, прибавим

$$\sum_{j,m=1}^{\infty} a_{jm}^2 + \sum_{j,m=1}^{\infty} b_{jm}^2\,,$$

то придем к неравенству

$$\sum_{j,m=1}^{\infty} (|a_{jm}| + |b_{jm}|)^2 \le \left(\sqrt{\sum_{j,m=1}^{\infty} a_{jm}^2} + \sqrt{\sum_{j,m=1}^{\infty} b_{jm}^2} \right)^2.$$

Поскольку $(a_{jm} + b_{jm})^2 \le (|a_{jm}| + |b_{jm}|)^2$, то

$$\sum_{j,m=1}^{\infty} (a_{jm} + b_{jm})^2 \le \left(\sqrt{\sum_{j,m=1}^{\infty} a_{jm}^2} + \sqrt{\sum_{j,m=1}^{\infty} b_{jm}^2} \right)^2.$$

Извлекая от обеих частей корень, приходим к неравенству (10), гарантирующему принадлежность суммы элементов из l_2^* к пространству l_2^*.

Теорема 1. *Пространство l_2^* является полным нормированным пространством.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Следует показать [1], что фундаментальная последовательность элементов из l_2^* сходится к элементу $\bar{x} \in l_2^*$, т. е. из

$$\left\| x^{(n)} - x^{(p)} \right\| \to 0, \qquad n, p \to \infty, \tag{11}$$

следует, что $\bar{x} \in l_2^*$ и $\left\| x^{(n)} - \bar{x} \right\| \to 0$ при $n \to \infty$.

Действительно, учитывая, что

$$\left\| x^{(n)} - x^{(p)} \right\|^2 = \sum_{j,m=1}^{\infty} (x_{jm}^{(n)} - x_{jm}^{(p)})^2,$$

получаем, что при каждом j и m

$$(x_{jm}^{(n)} - x_{jm}^{(p)})^2 \le \sum_{j,m=1}^{\infty} (x_{jm}^{(n)} - x_{jm}^{(p)})^2 \to 0, \qquad n, p \to \infty.$$

Следовательно, $x_{jm}^{(n)} - x_{jm}^{(p)} \to 0$ при каждом значении $j, m = 1, 2, \ldots$. По признаку Больцано – Коши для вещественных чисел отсюда следует, что при каждом значении j и m существует конечное $\bar{x}_{jm} = \lim\limits_{n \to \infty} x_{jm}^{(n)}$.

Из полученных пределов составим элемент

$$\bar{x} = (\bar{x}_{11}, \bar{x}_{12}, \ldots, \bar{x}_{1m}, \ldots, \bar{x}_{j1}, \bar{x}_{j2}, \ldots, \bar{x}_{jm}, \ldots),$$

и докажем, что он входит в l_2^*. Согласно условию (11) для любого $\varepsilon > 0$ существует такое N, что при $n, p \ge N$

$$\sum_{j,m=1}^{\infty} (x_{jm}^{(n)} - x_{jm}^{(p)})^2 = \left\| x^{(n)} - x^{(p)} \right\|^2 < \frac{1}{2}\varepsilon^2.$$

Оставляя в сумме лишь конечное число слагаемых ℓ, имеем тем более при любом ℓ и при $n, p \ge N$, что

$$\sum_{j,m=1}^{\ell} (x_{jm}^{(n)} - x_{jm}^{(p)})^2 < \frac{1}{2}\varepsilon^2.$$

Фиксируя n и переходя к пределу при $p \to \infty$, получаем

$$\sum_{j,m=1}^{\ell} (x_{jm}^{(n)} - \bar{x}_{jm})^2 \le \frac{1}{2}\varepsilon^2.$$

Так как неравенство верно при любом натуральном ℓ, то ряд

$$\sum_{j,m=1}^{\infty} (x_{jm}^{(n)} - \bar{x}_{jm})^2$$

сходится и

$$\sum_{j,m=1}^{\infty} (x_{jm}^{(n)} - \bar{x}_{jm})^2 \le \frac{1}{2}\varepsilon^2 < \varepsilon^2.$$

Следовательно, элемент $x^{(n)} - \bar{x}$ входит в l_2^* и $\left\| x^{(n)} - \bar{x} \right\| < \varepsilon$, $n > N$, но тогда элемент $\bar{x} = x^{(n)} - (x^{(n)} - \bar{x})$ как сумма элементов из l_2^* содержится в l_2^* и при этом $x^{(n)} \to \bar{x}$. Теорема доказана. ◊

Теорема 2. *Оператор* T, *введенный по формуле* (4) *и действующий в* l_2^*, *является компактным.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Введем оператор T_n, определяемый матрицей с элементами вида

$$t_{jmik}^{(n)} = \begin{cases} t_{jmik}, & j,\ m \le n, \\ 0, & j > n,\ m \le n;\ j \le n,\ m > n;\ j,\ m > n, \end{cases} \tag{12}$$

и покажем его компактность, т. е. покажем, что множество значений этого оператора

$$y = T_n x, \qquad y_{jm} = \sum_{i,k=1}^{\infty} t_{jmik}^{(n)} x_{ik}, \qquad j,m \le n, \tag{13}$$

является компактным. Для этого нужно показать, что из любой ограниченной бесконечной последовательности $y^{(\ell)}$, $\ell = 1,2,\dots$, из множества значений оператора T_n можно выделить сходящуюся к элементу из l_2^* [1].

Рассмотрим шар $S(a,R) = \{y : \|y - a\| < R\}$ и бесконечную последовательность $y^{(\ell)} \in S(a,R)$, $\ell = 1,2,\dots$, в указанной области, т. е.

$$\sqrt{\sum_{j,m=1}^{\infty} (y_{jm}^{(\ell)} - a_{jm})^2} < R,$$

и тем более при каждом j и m $\left|y_{jm}^{(\ell)} - a_{jm}\right| < R$, $a_{jm} - R < y_{jm}^{(\ell)} < a_{jm} + R$. Таким образом, числа $y_{jm}^{(\ell)}$ в совокупности ограничены $(j,m \le n)$. Так как числовая последовательность $y_{11}^{(\ell)}$, $\ell = 1,2,\dots$, ограничена, то по теореме Больцано – Вейерштрасса из нее можно выделить частичную последовательность, сходящуюся к конечному пределу $y_{11}^{(\ell_k)} \to y_{11}$. Из данной последовательности элементов сохраним только ту, которая дает названный предел, а из нее выделим частичную последовательность, ℓ_k, $k = 1,2,\dots$, которая дает конечный предел $y_{11}^{(\ell_k)} \to y_{11}$.

Таким образом переберем все числа $y_{jm}^{(\ell)}$, $j,m \le n$, и найдем предельный элемент y из l_2^*, тем самым будет доказана компактность оператора T_n. Чтобы доказать компактность оператора T, вычислим норму

$$\|T - T_n\| \le \sqrt{\sum_{j,m=1}^{\infty} \sum_{i,k=1}^{\infty} (t_{jmik} - t_{jmik}^{(n)})^2} = \sqrt{\sum_{j,m=n}^{\infty} \sum_{i,k=1}^{\infty} t_{jmik}^2}.$$

Она стремится к нулю при $n \to \infty$ и по теореме 11.1.3 из [1] следует, что оператор T – компактный. Теорема доказана. ◊

2. Вернемся к бесконечной системе уравнений (1). Наложим на заданные вещественные числа ограничение (5), а также условие

$$\sum_{j,m=1}^{\infty} f_{jm}^2 < \infty. \tag{14}$$

Тогда уравнение (1) в пространстве l_2^* можно записать в виде

$$(I - T)x = f, \qquad x, f \in l_2^*, \tag{15}$$

где I – тождественный оператор в l_2^*, а T – компактный оператор.

Для решения уравнения (1) или (15) естественно применить метод редукции, т. е. решать урезанную систему уравнений

$$x_{jm}^{(n)} - \sum_{i,k=1}^{n} t_{jmik} x_{ik}^{(n)} = f_{jm}, \qquad j,m = 1\ldots,n, \tag{16}$$

со все увеличивающимся числом n.

Теорема 3. *Если для уравнений* (1) *или* (15) *выполнены условия* (5) *и* (14) *и их однородные варианты имеют только нулевые решения, то метод редукции для уравнений* (1) *или* (15) *сходится.*

Д о к а з а т е л ь с т в о проведем по схеме, изложенной в [1]. В силу условия теоремы, согласно изложенному в **п**. 8.7 из [1], обратный оператор $(I-T)^{-1}$ существует, линеен, ограничен и задан во всем l_2^*. Наряду с уравнением (15) рассмотрим в l_2^* уравнение

$$(I-T_n)x_n^* = f. \tag{17}$$

При этом для всех достаточно больших n имеет место неравенство $\|T-T_n\| < \delta$, где δ − любое малое положительное число. Его выберем так, что $\delta\left\|(1-T)^{-1}\right\| \le q < 1$, и к уравнению (15) можно применить теорему 12.1.1 из [1], приняв в качестве U оператор T, а в качестве V − оператор T_n с достаточно большим номером n. В результате приходим к неравенству

$$\left\|x_n^* - x\right\| \le \delta\left\|I-T_n\right\|^{-1}\|x\|.$$

Если воспользоваться теоремой 8.7.4 из [1], приняв там в качестве $U = I-T$, а в качестве $V = I-T_n$, то получим неравенство

$$\left\|(I-T_n)^{-1}\right\| \le \frac{1}{1-q}\left\|(I-T)^{-1}\right\|. \tag{18}$$

Использование его позволяет предыдущее неравенство записать в виде $\left\|x_n^* - x\right\| \le \dfrac{\delta}{1-q}\left\|(1-T_n)^{-1}\right\|\|x\|$, справедливое при всех достаточно больших n, т.е. $x_n^* \to x$. Однако x_n^* − это решение уравнения (17), а не редуцированного уравнения (16). Поэтому по заданным в (1), (15) $f = \{f_{mj}\}$ составим $f_n' = \{f_{jm}^{(n)}\}$, где $f_{jm}^{(n)} = f_{jm}$ при $m,j \le n$ и $f_{jm}^{(n)} = 0$ при $m,j > n$, т.е. придем к уравнению

$$(I-T_n)x_n' = f_n'. \tag{19}$$

Уравнение (19) можно записать в виде

$$x_{jm}'^{n} + \sum_{i,k=1}^{n} t_{jmik} x_{ik}'^{n} = f_{jm}, \quad j,m \le n, \quad x_{jm}'^{n} = 0, \quad j,m > n.$$

Эта система уравнений совпадает с системой (16), дополненной условиями $x_{jm} = 0,\ j,m \ge n$. На основании (19) и (17) имеем $x_n' = (I-T_n)^{-1} f_n'$ и $x_n^* = (I-T_n)^{-1} f$, и поэтому с учетом (18) можем записать

$$\left\|x_n' - x_n^*\right\| \le \left\|(I-T_n)^{-1}\right\|\left\|f_n' - f\right\| \le \frac{1}{1-q}\|(I-T)\|^{-1}\left\|f_n' - f\right\|,$$

но так как $f_n' \to f$, то $x_n' - x_n^* \to 0$, а $x_n^* \to x$ и поэтому $x_n' \to x$. Тем самым теорема доказана. ◊

3. Перейдем к рассмотрению двумерных бесконечных систем с конечным ℓ $(\ell = 2,3,4,\ldots)$:

$$x_{jm}^{(r)} - \sum_{\rho=1}^{\ell}\sum_{i,k=1}^{\infty} t_{jmik}^{r,\rho} x_{ik}^{(\rho)} = f_{jm}^{(r)}, \qquad r,\rho = 1,\ldots,\ell, \qquad j,m = 1,2,\ldots. \tag{20}$$

Представляется удобным начать с одномерного аналога систем (20):

$$x_i^{(r)} - \sum_{\rho=1}^{\ell} \sum_{k=1}^{\infty} t_{ik}^{r,\rho} x_k^{(\rho)} = f_i^{(r)}, \qquad r, \rho = 1, \ldots, \ell, \qquad i = 1, 2, \ldots, \tag{21}$$

представляющего и самостоятельный интерес.

Здесь $f_j^{(r)}$ – заданные и $x_j^{(r)}$ – искомые последовательности коэффициентов, обладающих свойством

$$\sum_{i=1}^{\infty} (f_i^{(r)})^2, \qquad \sum_{i=1}^{\infty} (x_i^{(r)})^2 < \infty, \qquad r = 1, \ldots, \ell, \tag{22}$$

т. е. элементы $f^{(r)}$ и $x^{(r)}$ принадлежат пространству l^2 [1].

С целью записать уравнение (21) в операторной форме введем пространство $\mathbf{I}_2$, элементами которого являются векторы $\mathbf{x}$, $\mathbf{f}$, составляющими последних суть элементы пространства l^2, т. е.

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x^{(1)} \\ x^{(2)} \\ \vdots \\ x^{(\ell)} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} f^{(1)} \\ f^{(2)} \\ \vdots \\ f^{(\ell)} \end{pmatrix}, \qquad x^{(r)}, f^{(r)} \in l^2, \qquad r = 1, \ldots, \ell. \tag{23}$$

Операции сложения и умножения на число вводятся по стандартам векторного исчисления, а умножение элементов (скалярное) введем следующим образом:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{f}) = \sum_{r=1}^{\ell} (x^{(r)}, f^{(r)}), (x^{(r)}, f^{(r)}) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j^{(r)} f_j^{(r)}. \tag{24}$$

Нормы элементов определим так:

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{r=1}^{\ell} \left\|x^{(r)}\right\|^2}, \qquad \left\|x^{(r)}\right\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} (x_j^{(r)})^2. \tag{25}$$

Для введенного пространства справедливо неравенство треугольника

$$\|x + f\| \le \|x\| + \|f\|. \tag{26}$$

Действительно,

$$\|x + f\|^2 = \sum_{r=1}^{\ell} \left\|x^{(r)} + f^{(r)}\right\|^2 \le \sum_{r=1}^{\ell} (\left\|x^{(r)}\right\| + \left\|f^{(r)}\right\|)^2 \le$$
$$\le \left(\sqrt{\sum_{r=1}^{\ell} \left\|x^{(r)}\right\|^2} + \sqrt{\sum_{r=1}^{\ell} \left\|f^{(r)}\right\|^2} \right)^2. \tag{27}$$

Здесь использовано неравенство треугольника для элементов из l^2 и неравенство Коши для конечных сумм [1].

Извлекая корень из обеих частей неравенства (27), получим (26).

Теорема 4. *Пространство $\mathbf{I}_2$ является полным нормированным пространством.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как и в случае теоремы 1, следует показать, что любая фундаментальная последовательность из элементов пространства $\mathbf{I}_2$, т. е.

$$\left\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_p\right\| \to 0, \qquad n, p \to \infty,$$

имеет предел в $\mathbf{I}_2$.

Действительно,

$$\left\|x_n - x_p\right\|^2 = \sum_{r=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{\infty} ({}_n x_j^{(r)} - {}_p x_j^{(r)})^2 \to 0, \qquad n, p \to \infty, \tag{28}$$

и так как

$$\left({}_n x_j^{(r)} - {}_p x_j^{(r)}\right)^2 < \sum_{r=1}^{\ell}\sum_{j=1}^{\infty}\left({}_n x_j^{(r)} - {}_p x_j^{(r)}\right),$$

то $\left({}_n x_j^{(r)} - {}_p x_j^{(r)}\right)^2 \to 0$ при $n, p \to \infty$. Следовательно, ${}_n x_j^{(r)} - {}_p x_j^{(r)} \to 0$ при каждом j и r. По признаку Больцано – Коши для вещественных чисел при каждом j, r существует конечный предел $\overline{x}_j^{(r)} = \lim\limits_{n\to\infty}\left({}_n x_j^{(r)}\right)$. Из этих пределов составим вектор $\mathbf{x}_*$:

$$\mathbf{x}_* = \begin{pmatrix} \overline{x}^{(1)} \\ \overline{x}^{(2)} \\ \overline{x}^{(\ell)} \end{pmatrix}, \qquad \overline{x}^{(r)} = \{\overline{x}_j^{(r)}\}, \qquad r = 1,\ldots,\ell, \qquad j = 1,\ldots,\infty, \tag{29}$$

и покажем, что он принадлежит $\mathbf{l}_2$, для чего достаточно показать, что последовательность $\overline{x}^{(r)} \in l^2$.

На основании условия (28) для любого $\varepsilon > 0$ существует такое целое число N, что при $n, p > N$

$$\sum_{r=1}^{\ell}\sum_{j=1}^{\infty}\left({}_n x_j^{(r)} - {}_p x_j^{(r)}\right)^2 < \frac{1}{2}\varepsilon^2,$$

тем более

$$\sum_{j=1}^{M}\left({}_n x_j^{(r)} - {}_p x_j^{(r)}\right)^2 < \frac{1}{2}\varepsilon^2, \qquad n, p > N,$$

или, фиксируя n и устремляя $p \to \infty$, получаем

$$\sum_{j=1}^{M}\left({}_n x_j^{(r)} - \overline{x}_j^{(r)}\right) \le \frac{1}{2}\varepsilon^2, \qquad n > N, \tag{30}$$

но это неравенство верно при любом $M > 0$, следовательно, ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left({}_n x_j^{(r)} - \overline{x}_j^{(r)}\right)^2 \qquad \left(\{{}_n x_j^{(r)}\} = x_n^{(r)}\right),$$

сходится, т. е. доказано, что элемент $x_n^{(r)} - \overline{x}^{(r)}$ принадлежит l^2. Поскольку неравенство (30) верно при любом M, то $\left\|x_n^{(r)} - \overline{x}^{(r)}\right\| < \varepsilon$ при $n > N$, но тогда по неравенству треугольника в l^2 элемент $\overline{x}^{(r)} = x_n^{(r)} - \left(x_n^{(r)} - \overline{x}^{(r)}\right)$ входит в l^2 и при этом $x_n^{(r)} \to \overline{x}^{(r)}$, что и требовалось. Теорема доказана. ◊

В пространстве $\mathbf{l}_2$ введем оператор $\tilde{T}$ с помощью матрицы

$$\tilde{T}_{ik} = \begin{pmatrix} t_{ik}^{11} & t_{ik}^{12} & \cdots & t_{ik}^{1\ell} \\ t_{ik}^{21} & t_{ik}^{22} & \cdots & t_{ik}^{2\ell} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ t_{ik}^{\ell 1} & t_{ik}^{\ell 2} & \cdots & t_{ik}^{\ell\ell} \end{pmatrix} = \left\|t_{ik}^{r,\rho}\right\|_{r,\rho=1}^{\ell}, \qquad i, k = 1, 2, \ldots, \tag{31}$$

на каждый вещественный элемент которой наложим ограничение

$$\sum_{i,k=1}^{\infty}\left(t_{ik}^{r,\rho}\right)^2 < \infty, \qquad r, \rho = 1,\ldots,\ell. \tag{32}$$

Если принять во внимание (23), то систему уравнений (21) в операторной форме можем записать так:

$$(I - \tilde{T})\mathbf{x} = \mathbf{f}, \tag{33}$$

где I – тождественный оператор в $\mathbf{l}_2$.

Покажем, что оператор $\tilde{T}$ переводит каждый элемент $\mathbf{x}$ из $\mathbf{l}_2$ в элемент $\mathbf{y}$ тоже из $\mathbf{l}_2$ и дадим оценку для его нормы $\|\tilde{T}\|$.

Примем во внимание, что операторное уравнение $y = \tilde{T}x$ можем записать в виде

$$y_i^{(r)} = \sum_{\rho=1}^{\ell}\sum_{k=1}^{\infty} t_{ik}^{r,\rho} x_k^{(\rho)}, \qquad r = 1,\dots,\ell, \qquad j = 1,2,\dots. \tag{34}$$

Покажем, что $\mathbf{y} \in \mathbf{l}_2$. Согласно (34) имеем оценку

$$\left|y_i^{(r)}\right| \le \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\rho=1}^{\ell} \left|t_{ik}^{r,\rho}\right|\left|x_k^{(\rho)}\right|. \tag{35}$$

Далее, используя неравенство Коши для конечных сумм [1], можем записать

$$\sum_{\rho=1}^{\ell}\left|t_{ik}^{r,\rho}\right|\left|x_k^{(\rho)}\right| \le \sqrt{\sum_{\rho=1}^{\ell}(t_{ik}^{r,\rho})^2}\sqrt{\sum_{\rho=1}^{\ell}(x_k^{(\rho)})^2}\,. \tag{36}$$

На основании неравенств (35), (36) получаем

$$\left\|y^{(r)}\right\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty}\left|y_i^{(r)}\right|^2 \le \sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{\sum_{\rho=1}^{\ell}(t_{ik}^{r,\rho})^2}\sqrt{\sum_{\rho=1}^{\ell}(x_k^{(\rho)})^2}\right)^2.$$

Последующее использование неравенств Коши для бесконечных сумм [1], а также определения нормы (25) в $\mathbf{l}_2$ приводит к неравенству

$$\left\|y^{(r)}\right\|^2 \le \sum_{\rho=1}^{\ell}\sum_{k=1}^{\infty}(t_{ik}^{r,\rho})^2\,\|\mathbf{x}\|^2. \tag{37}$$

Повторно используя (25), получаем на основании (37) окончательно

$$\|\mathbf{y}\|^2 \le \sum_{r,\rho=1}^{\ell}\sum_{i,k=1}^{\infty}(t_{ik}^{r,\rho})^2\,\|\mathbf{x}\|^2. \tag{38}$$

Если считать выполненным (32), то полученное неравенство (38) показывает, что оператор $\tilde{T}$ переводит элементы $\mathbf{x} \in \mathbf{l}_2$ в элемент $\mathbf{y} \in \mathbf{l}_2$ и дает оценку для его нормы

$$\left\|\tilde{T}\right\|^2 \le \sum_{r,\rho=1}^{\ell}\sum_{i,k=1}^{\infty}(t_{ik}^{r,\rho})^2. \tag{39}$$

Теорема 5. *Оператор* $\tilde{T}$, *введенный с помощью матрицы* (31) *и действующий в пространстве* $\mathbf{l}_2$, *является компактным.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как и при доказательстве теоремы 2, введем оператор $\tilde{T}_n$, $n = 1,2,\dots$, определяемый урезанной матрицей

$$\tilde{T}_{ik}^n = \left\|{}_n t_{ik}^{r,\rho}\right\|_{r,\rho=1}^{\ell}, \tag{40}$$

элементы которой связаны с элементами матрицы (31) соотношениями

$${}_n t_{ik}^{r,\rho} = t_{ik}^{r,\rho}, \qquad i \le n, \qquad {}_n t_{ik}^{r,\rho} = 0, \qquad i > n. \tag{41}$$

Оператор $\tilde{T}_n$ переводит любой элемент $\mathbf{x}$ из $\mathbf{l}_2$ в вектор $\mathbf{y}$ из $\mathbf{l}_2$, составляющие $y_i^{(r)}$ которого обладают в силу (40) и (41) свойством

$$y_i^{(r)} = 0, \qquad i \ge n. \tag{42}$$

Докажем, что введенный оператор $\tilde{T}_n$ компактный. Чтобы убедиться в этом, как и в случае оператора T_n из (13), следует показать, что из любой ограниченной бесконечной последовательности векторов $\mathbf{y}_{\bar{n}}$, $\bar{n} = 1, 2, \ldots$, из множества значений оператора $\tilde{T}_n$ можно выделить сходящуюся в $\mathbf{l}_2$. С этой целью рассмотрим шар $\tilde{S}(a, R)$ радиуса $R > 0 : \|y - a\| < R$, причем компоненты вектора $\mathbf{a}$ должны обладать свойством (42), т. е. $a_i^{(r)} = 0$, $i > n$. Выберем бесконечную последовательность векторов $\mathbf{y}_{\bar{n}}$, $\bar{n} = 1, 2, \ldots$, из $\tilde{S}(\bar{a}, R)$, т. е.

$$\|\mathbf{y}_{\bar{n}} - \mathbf{a}\|^2 = \sum_{r=1}^{\ell} \sum_{i=1}^{n} ({}_{\bar{n}} y_i^{(r)} - a_i^{(r)})^2 < R^2 ,$$

тем более $({}_{\bar{n}} y_i^{(r)} - a_i^{(r)})^2 < R^2$ или $\left|{}_{\bar{n}} y_i^{(r)} - a_i^{(r)}\right| < R$ и поэтому при каждом i и r $a_i^{(r)} - R < {}_{\bar{n}} y_i^{(r)} < a_i^{(r)} + R$. Таким образом, последовательность чисел ${}_{\bar{n}} y_i^{(r)}$ в совокупности ограничена $(i \le n,\ r \le \ell)$. В частности, числовая последовательность ${}_{\bar{n}} y_1^{(1)}$, $\bar{n} = 1, 2, \ldots$, ограничена. По теореме Больцано – Вейерштрасса из нее можно выделить частичную последовательность, сходящуюся к конечному пределу ${}_{\bar{n}_k} y_1^{(1)} \to \bar{y}_1^{(1)}$, $k = 1, 2, \ldots$. Выполняя эту процедуру конечное число раз, как и при доказательстве компактности оператора T_n, из полученных пределов сформируем предельный вектор $\mathbf{y}_*$, составляющие которого суть $\bar{y}^{(r)} = \{\bar{y}_i^{(r)}\}$, обладающие свойством (42). И поэтому $\mathbf{y}_* \in \mathbf{l}_2$, что и требовалось. Компактность оператора $\tilde{T}$ вытекает из того, что норма разности операторов $\tilde{T}$ и $\tilde{T}_n$, согласно (39) и (40), (41),

$$\left\|\tilde{T} - \tilde{T}_n\right\| \le \sqrt{\sum_{r,\rho=1}^{\ell} \sum_{i,k=1}^{\infty} (t_{ik}^{r,\rho} - {}_n t_{ik}^{r,\rho})^2} = \sqrt{\sum_{r,\rho=1}^{\ell} \sum_{i=n}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} (t_{ik}^{r,\rho})^2}$$

при $n \to \infty$ стремится к нулю.

Теперь можем доказать сходимость метода редукции при решении системы бесконечных систем (21) или уравнения (33), по которому вместо (21) и (33) надлежит решать урезанные системы вида

$$x_i^{(r)} - \sum_{\rho=1}^{\ell} \sum_{k=1}^{n} t_{ik}^{r,\rho} x_k^{(\rho)} = f_i^{(r)}, \qquad r, \rho = 1, \ldots, \ell, \qquad i = 1, \ldots, n , \tag{43}$$

с увеличивающимся числом n.

Теорема 6. *Если для уравнения* (21) *или* (33) *выполнены условия* (22) *и* (32) *и их однородные варианты имеют только нулевые решения, то метод редукции для уравнений* (21) *или* (33) *сходится.*

Доказательство полностью аналогично доказательству теоремы 3.

4. Рассмотрим теперь двумерные системы (20). Чтобы их записать в операторной форме, следует ввести нормированное пространство $\mathbf{l}_2^*$. С этой целью, как и в **п. 1**, введем пространство ℓ_2^* двумерных бесконечных последовательностей, обладающих свойством

$$\sum_{j,m=1}^{\infty} (x_{jm}^{(r)})^2 < \infty, \qquad \sum_{j,m=1}^{\infty} (f_{jm}^{(r)})^2 < \infty, \qquad r \in 1, \ldots, \ell . \tag{44}$$

Из этих последовательностей составим векторы $\mathbf{x}$, $\mathbf{f}$ вида (23), только составляющие их $x^{(r)}$ и $f^{(r)}$ принадлежат пространству ℓ_2^*. Именно такие векторы будут элементами пространства $\mathbf{l}_2^*$. Операции сложения элементов и умножение на число вводятся по известным стандартам. Скалярное умножение элементов введем по аналогии (24):

$$(\mathbf{x},\mathbf{f}) = \sum_{r=1}^{\ell}\left(x^{(r)}, f^{(r)}\right), \qquad \left(x^{(r)}, f^{(r)}\right) = \sum_{j=1}^{\infty} x_{jm}^{(r)} f_{jm}^{(r)} . \tag{45}$$

Норму элементов в $\mathbf{I}_2^*$ определим формулой

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\sum_{r=1}^{\ell}\left\|x^{(r)}\right\|}, \qquad \left\|x^{(r)}\right\|^2 = \sum_{j,m=1}^{\infty}\left(x_{jm}^{(r)}\right)^2 . \tag{46}$$

Для пространства $\mathbf{I}_2^*$ справедливо неравенство (26), доказательство которого проводится, как и для $\mathbf{I}_2$, только вместо неравенства Коши в l^2 нужно использовать неравенство (7) и следствия из него, а также неравенства для конечных двойных сумм, аналогичные известным неравенствам для конечных одномерных сумм.

По той же схеме, что и для $\mathbf{I}_2$, доказывается полнота $\mathbf{I}_2^*$. Введем в этом пространстве оператор $\bar{T}$ с помощью матрицы

$$T_{jmik} = \left\|t_{jmik}^{r,\rho}\right\|_{r,\rho=1}^{\ell}, \qquad j,m,i,k = 1,2,\ldots . \tag{47}$$

Чтобы оператор $\bar{T}$ преобразовал $\mathbf{I}_2^*$ в $\mathbf{I}_2^*$, как выше оператор $\tilde{T}$, определенный в $\mathbf{I}_2$, потребуем сходимость рядов

$$\sum_{j,m=1}^{\infty}\sum_{i,k=1}^{\infty}\left(t_{jmik}^{(r,\rho)}\right)^2 < \infty, \qquad r,\rho = 1,\ldots,\ell . \tag{48}$$

Выполняя те же выкладки, что и в **п. 3**, только используя вместо неравенства Коши в l^2 неравенство (7) и следствия из него, убеждаемся в том, что оператор $\bar{T}$ переводит пространство $\mathbf{I}_2^*$ само в себя и для нормы его получаем оценку

$$\left\|\bar{T}\right\|^2 \le \sum_{r,\rho=1}^{\ell}\sum_{j,m=1}^{\infty}\sum_{i,k=1}^{\infty}\left(t_{jmik}^{r,\rho}\right)^2 .$$

Введем, как и в **п. 3**, оператор $\bar{T}_n$, определяемый урезанной матрицей

$$\bar{T}_{jmik}^{(n)} = \left\|{}_n t_{jmik}^{r,\rho}\right\|_{r,\rho=1}^{\ell}, \qquad j,m,i,k = 1,2,\ldots,$$

элементы которой связаны с элементами матрицы (47) соотношениями

$${}_n t_{jmik}^{r,\rho} = t_{jmik}^{r,\rho}, \quad j,m \le n, \qquad {}_n t_{jmik}^{r,\rho} = 0, \quad j,m > n .$$

По той же схеме, что и в **п. 3**, доказываем, что оператор $\bar{T}$ компактный в $\mathbf{I}_2^*$.

Все это позволяет для систем (20) доказать сходимость метода редукции, когда вместо системы (20) решается редуцированная система, т. е.

$$x_{jm}^{(r)} - \sum_{\rho=1}^{\ell}\sum_{i,k=1}^{n} t_{jmik}^{r,\rho} x_{ik}^{(\rho)} = f_{jm}^{(r)}, \qquad r,\rho = 1,\ldots,\ell, \qquad j,m = 1,\ldots,n ,$$

при все увеличивающемся n.

Иными словами, это позволяет сформулировать следующую теорему.

Теорема 7. *Если однородный вариант системы* (20) *имеет только тривиальное решение и заданные коэффициенты удовлетворяют условиям* (44) *и* (48), *то для системы* (20) *метод редукции сходится.*

Схема д о к а з а т е л ь с т в а такая же, как и теоремы 3.

1. *Вулих Б. З.* Введение в функциональный анализ. – Москва: Наука, 1967. – 415 с.
2. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. – Москва: Наука, 1981. – 688 с.
3. *Curtain R. F., Zwart H.* An introduction to infinite-dimensional linear systems theory. – New York: Springer-Verlag, 1995. – 645 p. – (Texts in Appl. Math. – Vol. 21.)
4. *Davis A. M. J.* Infinite systems for a biharmonic problem in a rectangle: discussion of non-uniqueness // Proc. R. Soc. London. – 2003. – **A459**. – P. 409–412.
5. *Meleshko V. V., Gomilko A. M.* Infinite systems for a biharmonic problem in a rectangle: further discussion // Proc. R. Soc. London. – 2004. – **A460**. – P. 807–819.
6. *Ursell F.* Infinite systems of equations. The effect of truncation // Quart. J. Mech. Appl. Math. – 1996. – **49**, No. 2. – P. 217–233.

ОСНОВИ ТЕОРІЇ ДВОВИМІРНИХ НЕСКІНЧЕННИХ СИСТЕМ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ

Досліджуються нескінченні системи алгебраїчних рівнянь $x_{jm} - \sum_{i,k=1}^{\infty} t_{jmik} x_{ik} = f_{jm}$, $j = 1, 2, \ldots$, $m = 1, 2, \ldots$. *Числа* x_{ik} *є шуканими, а числа* t_{jmik} *і* f_{jm} *є задані та дійсні. Розглянуто також випадок, коли замість чисел введено вектори. Щоб записати розглянуті рівняння в операторній формі, введено деякі нормовані простори та доведено їх повноту. У цих просторах введено оператори, за допомогою яких записано розглянуті рівняння. Доведено компактність цих операторів. Для наближеного розв'язання розглянутих нескінчених систем використано метод редукції, коли верхні границі у нескінченних сумах замінюються скінченними числами зі зростаючими значеннями. Встановлено критерії збіжності методу редукції для розглянутих двомірних нескінчених систем алгебраїчних рівнянь.*

PRINCIPLES OF THEORY OF TWO-DIMENSIONAL INFINITE SYSTEMS OF ALGEBRAIC EQUATIONS

The infinite systems of the algebraic equations $x_{jm} - \sum_{i,k=1}^{\infty} t_{jmik} x_{ik} = f_{jm}$, $j = 1, 2, \ldots$, $m = 1, 2 \ldots$, *are considered. Numbers* x_{ik} *are searched, and numbers* t_{jmik} *and* f_{jm} *are given and are the real ones. The case when instead of the specified numbers, a vector is taken, is considered also. To write down the considered equations in the operational form, the some normalized spaces are inputted and their completeness is proved. In these spaces the operators, with help of which the considered equations are written, are inputted. The compactness of these operators is proved. The reduction method is used for the approached solution obtaining: the top limit in the infinite sums is replaced by the finite number with the increasing values. The convergence's criteria of a reduction method for the considered two-dimensional infinite systems of the algebraic equations is established.*

Одесс. нац. ун-т им. И. И. Мечникова, Одесса

Получено
27.09.09