УДК 517.983.54

И. В. Киреев[1], Ю. В. Немировский[2]

ГАМИЛЬТОНОВ ПОДХОД К ИССЛЕДОВАНИЮ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ ИЗ КОМПОЗИТНЫХ МАТЕРИАЛОВ

Предложен метод построения определяющих соотношений линейной теории оболочек вращения в комплексной гамильтоновой форме. На основе вариационного принципа Лагранжа построена математическая модель многослойной ортотропной оболочки вращения. Получены явные выражения коэффициентов и правых частей комплексной гамильтоновой системы уравнений статики оболочек вращения через ее жесткостные характеристики и действующие нагрузки. Сформулированная в осесимметричном случае разрешающая гамильтонова система линейных дифференциальных уравнений обладает рядом специфических свойств, облегчающих как аналитические исследования, так и численные процедуры их решения.

Возникающие при решении физических задач теплопроводности, прочности и разрушения тонких оболочек вращения из композиционных материалов большие сложности связаны, во-первых, с большим объемом перерабатываемой информации, а во-вторых, с математическими проблемами, возникающими из-за наличия в решениях особенностей типа погранслоев [21]. Первая из этих проблем может быть решена несколькими способами, которые имеют как свои достоинства, так и недостатки [1, 7, 15]. Но всякие уточнения математической модели физического процесса теряют смысл, если полученные в конечном счете краевые задачи не могут быть решены с необходимой точностью численно или аналитически, чему как раз и препятствует вторая из отмеченных проблем.

Тонкостенность оболочки означает, что разрешающая система сингулярно зависит от малого параметра (толщина оболочки), и поэтому естественно воспользоваться методами асимптотического интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений, которые достаточно хорошо развиты [2, 5, 6, 8, 10, 16, 17, 23, 24]. Однако для линейных систем удалось найти и обосновать новую модификацию метода Сибуйя – Вазова [6] получения асимптотических разложений решений линейных гамильтоновых систем обыкновенных дифференциальных уравнений, которая позволяет в несколько раз уменьшить (по сравнению с традиционным вариантом метода) количество вычислений при проведении асимптотического анализа системы. С использованием этой методики получены асимптотические разложения решений линейных уравнений теории слоистых композиционных оболочек [1] вращения, учитывающей поперечный сдвиг, и исследовано влияние некоторых параметров модели на характер получаемого решения. Аналитическое исследование подтверждено и численными экспериментами, базирующимися на предлагаемой ниже новой методике решения линейных краевых задач для гамильтоновых систем.

На сегодняшний день наиболее надежным методом решения краевых задач теории оболочек является метод конечных элементов. Однако необходимость численного дифференцирования для определения напряжений и деформаций в теле из-за наличия погранслоев вынуждает повышать порядок аппроксимации на элементе либо значительно измельчать сетку, что приводит к системам линейных алгебраических уравнений с очень большими числами обусловленности [19].

Альтернативный подход связан с переходом к смешанной постановке задачи теории упругости, при которой усилия выступают как неизвестные функции. В тех случаях, когда задача допускает разделение переменных, смешанные постановки приводят к системам обыкновенных дифференциальных уравнений, правые части которых обладают симметрией, – к гамильтоновым системам уравнений.

Разработке специальных численных методов решения задачи Коши для гамильтоновых систем обыкновенных дифференциальных уравнений уделяется достаточно большое внимание [22], считая при этом, что решение краевой задачи может быть сведено к решению нескольких задач Коши. В этой работе предлагаем новый подход к решению именно краевых задач для гамильтоновых систем, в полной мере учитывающий специфику гамильтоновых система уравнений. В работе на конкретных примерах показана эффективность предложенного метода.

Основные математические положения работы были апробированы [14] и обобщены в работе [13].

Рассмотрим ортотропную замкнутую в окружном направлении многослойную оболочку вращения (рис. 1). Положение точки на отсчетной поверхности вращения Ω определяется как декартовыми координатами (X, Y, Z), так и цилиндрическими (X, φ, R), связанными между собой соотношениями $X = X(s)$, $Y = R(s)\sin\varphi$, $Z = R(s)\cos\varphi$, $\left(\frac{\partial X}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial s}\right)^2 = 1$. Здесь $R(s)$ − расстояние от точки M до оси вращения; φ − угол, образуемый YZ-проекцией радиуса-вектора $\overrightarrow{OM}$ рассматриваемой точки M и осью OZ; s − длина дуги меридиана, отсчитываемая от плоскости YOZ до точки M.

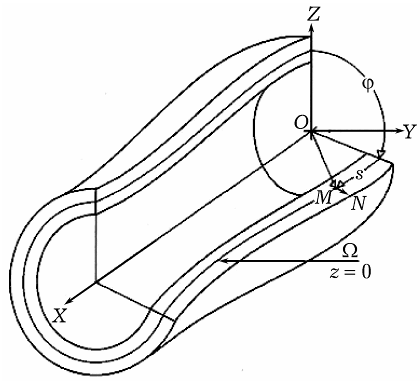

Рис. 1

С поверхностью Ω и криволинейными координатами (s, φ) на ней ассоциируется пространственная (s, φ, z) система координат некоторой окрестности Ω, в которой радиус-вектор $\overrightarrow{ON}$ близкой к Ω точки N задается соотношением

$$\overrightarrow{ON}(s, \varphi, z) = \overrightarrow{OM}(s, \varphi) + z\mathbf{n}(s, \varphi),$$

где через $\mathbf{n}(s, \varphi)$ обозначена нормаль к Ω, проходящая через рассматриваемую точку N, а z − расстояние по нормали от N до Ω : $z \in [z_\ell, z_r]$.

Таким образом, оболочка вращения − это трехмерное упругое тело вращения, криволинейные координаты (s, φ, z) которого принадлежат параллелепипеду $[s_\ell, s_r] \times [0, 2\pi] \times [z_\ell, z_r]$, а поверхность вращения Ω $(z = 0)$ является отсчетной (базовой) поверхностью оболочки вращения. Для простоты будем считать, что z_ℓ и z_r постоянны, т. е. не зависят ни от s, ни от φ.

Тройка чисел (s, φ, z) образует криволинейные координаты точки N рассматриваемой оболочки вращения, а соответствующие ей координатные векторы ортогональны между собой.

Изменение радиуса-вектора произвольной точки при деформировании оболочки описывается вектором перемещений $\mathbf{U}(s, \varphi, z)$, физические координаты которого в соответствующем координатном базисе обозначаем как U_s, U_φ, U_z − меридиональное, окружное и нормальное перемещения соответственно. Возникает тензор линейных деформаций, физические компоненты которого обозначаем через $\varepsilon_{\alpha\beta}$, $\alpha, \beta = s, \varphi, z$.

Будем предполагать, что материал каждого слоя многослойной оболочки − ортогонально армированный композит, полученный методом продольно-поперечной намотки, параметры которой не зависят от координаты φ; структура такой оболочки изображена на рис. 2. Упругие осредненные характеристики такого материала согласно [1, 7, 15] ортотропны и оси ортотропии совпадают с координатными направлениями.

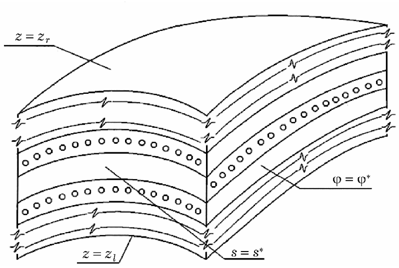

Рис. 2

Это означает, что связь между физическими компонентами тензоров макронапряжений и макродеформаций (закон Дюгамеля – Неймана) в оболочке можно представить в векторном виде:

$$\boldsymbol{\sigma} = D_\sigma(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_\theta), \qquad \boldsymbol{\tau} = D_\tau \boldsymbol{\gamma}.$$

Здесь $\boldsymbol{\varepsilon}(\varepsilon_s, \varepsilon_\varphi, \varepsilon_z)$ вектор нормальных, а $\boldsymbol{\gamma}(\gamma_{s\varphi}, \gamma_{sz}, \gamma_{\varphi z})$ – вектор касательных деформаций; $\boldsymbol{\sigma}(\sigma_s, \sigma_\varphi, \sigma_z)$, $\boldsymbol{\tau}(\tau_{s\varphi}, \tau_{sz}, \tau_{\varphi z})$ – векторы нормальных и скалывающих напряжений соответственно; $\boldsymbol{\varepsilon}_\theta$ – температурные деформации; $\varepsilon_\alpha = \varepsilon_{\alpha\alpha}$, $\gamma_{\alpha\beta} = 2\varepsilon_{\alpha\beta}$, $\alpha, \beta = s, \varphi, z$; матрица D_τ диагональна. Элементы симметричных положительно определенных матриц D_σ и D_τ будем обозначать следующим образом:

$$(D_\sigma)_{\alpha\beta} = D_{\alpha\beta}, \quad \alpha, \beta = s, \varphi, z, \quad (D_\tau)_{11} = D_\gamma, \quad (D_\tau)_{22} = D_s, \quad (D_\tau)_{33} = D_\varphi.$$

Теперь уравнения равновесия для макронапряжений можно получить из вариационного принципа Лагранжа. Однако, даже предполагая, что к рассматриваемой оболочке вращения приложена осесимметричная нагрузка, возникающую задачу теории упругости вряд ли возможно разрешить с приемлемой точностью на современных компьютерах. Поэтому необходимо делать упрощающие предположения как геометрического характера, так и предположения о характере искомого решения.

Будем считать, что оболочка тонкостенна, т. е. при всех $z \in [z_\ell, z_r]$ и $s \in [s_\ell, s_r]$ имеем $|zB_s(s)| \ll 1$ и $|zB_\varphi(s)| \ll 1$ (здесь $B_s(s)$ и $B_\varphi(s)$ – главные кривизны базовой поверхности оболочки). Тогда для параметров Ляме введенной пространственной ортогональной системы координат принимаем следующие приближенные выражения: $A_s = 1$, $A_\varphi = R$, $A_z = 1$. Следуя же [1], примем такой закон распределения поперечных компонент тензора деформаций по толщине:

$$\varepsilon_z(s,z) \equiv 0,$$

$$\tau_{\alpha z}(s,z) = \tau_{\ell\alpha z} + \frac{z - z_\ell}{z_r - z_\ell}(\tau_{r\alpha z} - \tau_{\ell\alpha z}) + f_\alpha(z)\pi_\alpha(s),$$

$$\gamma_{\alpha z}(s,z) = \frac{\tau_{\alpha z}(s,z)}{D_\alpha(s,z)}, \qquad f_\alpha(z_\ell) = f_\alpha(z_r) = 0, \qquad \alpha = s, \varphi. \tag{1}$$

Как показано в [1], из этих соотношений прямыми вычислениями можно получить распределения вектора перемещений по толщине оболочки; опуская подробности, приведем окончательные соотношения для полей смещений и деформаций:

$$U_s(s,z) = u(s) + z\eta_s(s) + \mu_s(s,z)\pi_s(s) + \lambda_s(s,z),$$

$$U_z(s,z) = \omega(s),$$

$$U_\varphi(s,z) = R(s)\psi(s) + \mu_\varphi(s,z)\pi_\varphi(s) + \lambda_\varphi(s,z).$$

Здесь $\eta_s(s) = -\frac{d\omega(s)}{ds} - B_s(s)u(s)$ – угол поворота нормали к поверхности Q при деформировании,

$$\lambda_\alpha(s,z) = \int_0^z \left\{ \tau_{\ell\alpha z}(s) + \frac{\zeta - z_\ell}{z_r - z_\ell}\left(\tau_{r\alpha z}(s) - \tau_{\ell\alpha z}(s)\right) \right\} \frac{d\zeta}{D_\alpha(s,\zeta)},$$

$$\mu_\alpha(s,z) = \int_0^z \frac{f_\alpha(\zeta)}{D_\alpha(s,\zeta)} d\zeta, \qquad \alpha = s,\varphi .$$

Выражения для деформаций в оболочке имеют такой вид:

$$\varepsilon_s = \frac{du}{ds} - B_s\omega + z\frac{d\eta_s}{ds} + \frac{\partial}{\partial s}(\mu_s\pi_s + \lambda_s), \qquad \varepsilon_z = 0,$$

$$\varepsilon_\varphi = \frac{1}{R}\left[R'u - RB_\varphi\omega + zR'\eta_s + R'(\mu_s\pi_s + \lambda_s)\right],$$

$$\gamma_{s\varphi} = R\left\{\frac{d\psi}{ds} + \frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{1}{R}(z\eta_\varphi + \mu_\varphi\pi_\varphi + \lambda_\varphi)\right]\right\},$$

$$\gamma_{sz} = \frac{1}{D_s}\left\{\tau_{\ell sz} + \frac{z - z_\ell}{z_r - z_\ell}(\tau_{rsz} - \tau_{\ell sz}) + f_s\pi_s\right\},$$

$$\gamma_{\varphi z} = \frac{1}{D_\varphi}\left\{\tau_{\ell\varphi z} + \frac{z - z_\ell}{z_r - z_\ell}(\tau_{r\varphi z} - \tau_{\ell\varphi z}) + f_\varphi\pi_\varphi\right\}.$$

Теперь, варьируя функционал Лагранжа по функциям $\omega(s)$, $u(s)$, $\pi_s(s)$, $\psi(s)$, $\pi_\varphi(s)$ придем к системе из 5-ти линейных дифференциальных уравнений равновесия 12-го порядка [1]. При этом разрешающая система распадается на две, одна из которых имеет 8-й порядок и описывает изгиб оболочки, а другая − 4-го порядка и отвечает задаче кручения. Каждая из подсистем имеет по два первых интеграла, механический смысл которых разъяснен, например, в [4], что позволяет перейти к рассмотрению систем 8-го и 2-го порядков. Однако и модифицированная система разрешающих соотношений осесимметричного изгиба упругих оболочек вращения достаточно сложна для аналитического исследования и громоздка для численного решения. Поэтому вопрос о наиболее рациональном выборе формы разрешающей системы дифференциальных уравнений имеет большое значение.

Вопрос о выборе искомых функций обсуждается, начиная с работ Мейсиера, почти столетие [4, 18]. Используемая ниже векторно-матричная форма системы уравнений статики упругих оболочек вращения аналогична гамильтоновой форме дифференциальных уравнений лагранжевой механики системы материальных точек [2].

Для того чтобы явно выделить характерные значения величин, определяющих коэффициенты этой системы уравнений, перейдем к безразмерным переменным. Сначала обозначим: R_* − характерный линейный размер в оболочке; $D_{*\sigma}$ − характерная жесткость оболочки в плоскости (s,φ); $D_{*\tau} = \delta D_{*\sigma}$ − характерная сдвиговая жесткость оболочки в плоскостях (s,z) и (φ,z); $\varepsilon R_* = z_r - z_\ell$ − толщина оболочки. Введем в рассмотрение безразмерные переменные

$$t = \frac{s}{R_*}, \qquad \omega(t) = \frac{\omega(s)}{z_r - z_\ell}, \qquad u(t) = \frac{u(s)}{z_r - z_\ell},$$

$$\eta(t) = \eta_s(s), \qquad \psi(t) = \frac{\psi_s(s)}{\varepsilon}, \qquad \pi_\alpha(t) = \frac{\pi_\alpha(s)}{D_{*\tau}}, \qquad \alpha = s,\varphi . \tag{2}$$

Тогда, применяя преобразование Лежандра, задачу кручения можно сформулировать в виде краевой задачи для системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\mathbf{y}_{\mathrm{tor}}(t)}{dt} = H_{\mathrm{tor}}(t)\mathbf{y}_{\mathrm{tor}}(t) + \mathbf{h}_{\mathrm{tor}}(t),$$

$$\mathbf{y}_{\mathrm{tor}} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{\upsilon}_{\mathrm{tor}}\\ \mathbf{q}_{\mathrm{tor}}\end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{\upsilon}_{\mathrm{tor}} = \begin{pmatrix}\psi(t)\\ \pi_\varphi(t)\end{pmatrix}, \qquad \mathbf{q}_{\mathrm{tor}} = \begin{pmatrix}r^2T(t)\\ rM_\varphi(t)\end{pmatrix}. \tag{3}$$

Здесь $r^2T(t)$ и $rM_\varphi(t)$ – обобщенные усилия, соответствующие обобщенным перемещениям $\psi(t)$ и $\pi_\varphi(t)$.

Система замыкается естественными краевыми условиями, когда на каждом из торцов $t = t_k$, $k = \ell, r$, и для каждого $j = 1, 2$ задается одно из двух краевых условий:

$$\upsilon_{\mathrm{tor}\, j}(t_k) = \upsilon_{\mathrm{tor}\, jk} \qquad \text{или} \qquad q_{\mathrm{tor}\, j}(t_k) = q_{\mathrm{tor}\, jk}, \tag{4}$$

где $\upsilon_{\mathrm{tor}\, jk}$, $q_{\mathrm{tor}\, jk}$ – заданные величины.

Подобным же образом формулируется задача осесимметричного изгиба в виде краевой задачи для линейных системы

$$\frac{d\mathbf{y}_{\mathrm{ben}}(t)}{dt} = H_{\mathrm{ben}}(t)\mathbf{y}_{\mathrm{ben}}(t) + \mathbf{h}_{\mathrm{ben}}(t),$$

$$\mathbf{y}_{\mathrm{ben}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\upsilon}_{\mathrm{ben}} \\ \mathbf{q}_{\mathrm{ben}} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{\upsilon}_{\mathrm{ben}} = \begin{pmatrix} \omega \\ u \\ \eta \\ \pi_s \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{q}_{\mathrm{ben}} = r\begin{pmatrix} Q_s \\ T_s \\ M_s \\ \mathcal{M}_s \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Система уравнений осесимметричного изгиба замыкается краевыми условиями типа (4):

$$\omega(t_k) = \omega_k, \quad Q_s(t_k) = Q_{sk}, \quad u(t_k) = u_k, \quad T_s(t_k) = T_{sk},$$

$$\eta(t_k) = \eta_k, \quad M_s(t_k) = M_{sk}, \quad \pi_s(t_k) = \pi_{sk}, \quad \mathcal{M}_s(t_k) = \mathcal{M}_{sk}. \tag{6}$$

Здесь rQ_s, rT_s, rM_s, $r\mathcal{M}_s$ – обобщенные усилия, соответствующие обобщенным перемещениям ω, u, η, π_s.

Для получения явных выражений коэффициентов и правых частей приведенных выше уравнений через характеристики оболочки и действующие на нее нагрузки введем в рассмотрение безразмерные переменные и функции

$$\nu = \frac{z}{z_r - z_\ell}, \qquad r(t) = \frac{R(s)}{R_*}, \qquad b_\alpha(t) = B_\alpha(s)R_*, \qquad \alpha = s, \varphi,$$

$$D_{\alpha\beta} = \frac{D_{\alpha\beta}}{D_{*\sigma}}, \qquad \alpha, \beta = s, \varphi, \qquad D_\gamma = \frac{D_\gamma}{D_{*\sigma}}, \qquad D_\alpha = \frac{D_\alpha}{D_{*\tau}}, \qquad \alpha = s, \varphi,$$

$$f_\alpha(\nu) = f_\alpha(z), \quad \alpha = s, \varphi, \qquad \mu_\alpha(\nu) = \mu_\alpha(z)\frac{D_{*\tau}}{z_r - z_\ell} = \int_0^\nu \frac{f_\alpha(\zeta)}{D_\alpha}\, d\zeta, \quad \alpha = s, \varphi,$$

$$\tau_{k\alpha}(t, \nu) = \frac{\tau_{k\alpha z}(s, z)}{D_{*\tau}}, \qquad \alpha = s, \varphi, \qquad k = r, \ell,$$

$$\sigma_{k\alpha}(t, \nu) = \frac{\sigma_{k\alpha z}(s, z)}{D_{*\sigma}}, \qquad \alpha = s, \varphi, \qquad k = r, \ell,$$

$$F_m(t, \nu) = F_m(s, z)\frac{R_*}{\varepsilon D_{*\sigma}}, \qquad m = s, \varphi, z,$$

и следующие обозначения для моментов от функции $F(\nu)$:

$$F^0 = \int_{\nu_\ell}^{\nu_r} F(\zeta)\, d\zeta, \qquad F^\nu = \int_{\nu_\ell}^{\nu_r} \zeta F(\zeta)\, d\zeta,$$

$$F^\alpha = \int_{\nu_\ell}^{\nu_r} \mu_\alpha(\zeta) F(\zeta)\, d\zeta, \qquad F^{\alpha\beta} = \int_{\nu_\ell}^{\nu_r} \mu_\alpha(\zeta)\mu_\beta(\zeta) F(\zeta)\, d\zeta,$$

$$F^{\nu\nu} = \int\limits_{\nu_\ell}^{\nu_r} \zeta^2 F(\zeta)\, d\zeta, \qquad F^{\nu\alpha} = \int\limits_{\nu_\ell}^{\nu_r} \zeta \mu_\alpha(\zeta) F(\zeta)\, d\zeta\,,$$

$$F_\alpha = \int\limits_{\nu_\ell}^{\nu_r} \frac{f_\alpha(\zeta)}{D_\alpha} F(\zeta)\, d\zeta, \qquad \alpha,\beta = s,\varphi. \tag{7}$$

Тогда, вводя в рассмотрение «начальные» напряжения и деформации

$$\tau_{*\alpha}(t,\nu) = \tau_{\ell\alpha} + (\nu - \nu_\ell)(\tau_{r\alpha} - \tau_{\ell\alpha}), \qquad \alpha = s,\varphi\,,$$

$$\lambda_a(t,\nu) = \int\limits_0^{\nu} \frac{\tau_{*\alpha}(t,\zeta)}{D_\alpha} d\zeta, \qquad \alpha = s,\varphi\,,$$

$$\varepsilon_{*s}(t,\nu) = \frac{\partial}{\partial t}\lambda_s - \frac{\varepsilon_{s\theta}}{\varepsilon}, \qquad \varepsilon_{*\varphi}(t,\nu) = \frac{\dot r}{r}\lambda_s - \frac{\varepsilon_{s\theta}}{\varepsilon} + i\frac{\omega}{r}\lambda_\varphi\,,$$

$$\gamma_*(t,\nu) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\lambda_\varphi}{r}\right) + i\frac{\omega}{r}\lambda_s, \qquad \sigma_{*s}(t,\nu) = D_{ss}\varepsilon_{*s}(t,\nu) + D_{s\varphi}\varepsilon_{*\varphi}(t,\nu)\,,$$

$$\sigma_{*\varphi}(t,\nu) = D_{s\varphi}\varepsilon_{*s}(t,\nu) + D_{\varphi\varphi}\varepsilon_{*\varphi}(t,\nu), \qquad \tau_*(t,\nu) = D_\gamma \gamma_*(t,\nu)\,,$$

в случае задачи кручения получаем

$$H_{\text{tor}} = \begin{pmatrix} H^{\text{tor}}_{\nu\nu} & H^{\text{tor}}_{\nu q} \\ H^{\text{tor}}_{q\nu} & H^{\text{tor}}_{qq} \end{pmatrix}, \qquad H^{\text{tor}}_{\nu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{\dot r}{r} \end{pmatrix} = -H^{\text{tor}}_{qq}\,,$$

$$H^{\text{tor}}_{\nu q} = \frac{1}{r^3\Delta_\gamma}\begin{pmatrix} D_\gamma^{\varphi\varphi} & -rD_\gamma^{\varphi} \\ -rD_\gamma^{\varphi} & r^2 D_\gamma^0 \end{pmatrix}, \qquad H^{\text{tor}}_{q\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{\dot r\delta}{\varepsilon^2} f_{\varphi\varphi} \end{pmatrix},$$

$$\Delta_\gamma = D_\gamma^0 D_\gamma^{\varphi\varphi} - (D_\gamma^{\varphi})^2, \qquad \mathbf{h}_{\text{tor}} = \begin{pmatrix} \mathbf{h}^{\text{tor}}_\nu \\ \mathbf{h}^{\text{tor}}_q \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{h}^{\text{tor}}_\nu = \frac{1}{r\Delta_\gamma}\begin{pmatrix} D_\gamma^{\varphi\varphi}\tau_*^0 - D_\gamma^{\varphi}\tau_*^{\varphi} \\ -r(D_\gamma^{\varphi}\tau_*^0 + D_\gamma^0\tau_*^{\varphi}) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{h}^{\text{tor}}_q = \begin{pmatrix} -r^2\left(F_\varphi^0 - \dfrac{\delta}{\varepsilon}(\tau_{r\varphi} - \tau_{\ell\varphi})\right) \\ -rF_\varphi^\varphi + \dfrac{r\delta}{\varepsilon^2}(\tau_{*\varphi\varphi} - \varepsilon\mu_\varphi(\nu_r)\tau_{r\varphi} + \varepsilon\mu_\varphi(\nu_\ell)\tau_{\ell\varphi}) \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Коэффициенты и правые части уравнений осесимметричного изгиба выражаются через характеристики оболочки и действующие на нее нагрузки гораздо сложнее. Поэтому для явного разделения между собой геометрических и механических факторов в коэффициентах уравнений осесимметричного изгиба, введем следующие вектор-функции:

$$\mathbf{a}_1^s(\nu) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{a}_2^s(\nu) = \begin{pmatrix} \nu \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{a}_3^s(\nu) = \begin{pmatrix} \mu_s(\nu) \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{a}_1^\varphi(\nu) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{a}_2^\varphi(\nu) = \begin{pmatrix} 0 \\ \nu \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{a}_3^\varphi(\nu) = \begin{pmatrix} 0 \\ \mu_s(\nu) \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Определим матрицы A^s, $A^{s\varphi} = (A^{\varphi s})^\top$ и A^φ:

$$A^s_{ij} = \left\langle \mathbf{a}_i^s, \mathbf{a}_j^s \right\rangle_D, \qquad A^{s\varphi}_{ij} = \left\langle \mathbf{a}_i^s, \mathbf{a}_j^\varphi \right\rangle_D, \qquad A^{\varphi}_{ij} = \left\langle \mathbf{a}_i^\varphi, \mathbf{a}_j^\varphi \right\rangle_D.$$

Здесь

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle_D = \int\limits_{\nu_\ell}^{\nu_r} \left(\mathbf{a}(\zeta), D(\zeta), \mathbf{b}(\zeta)\right) d\zeta, \qquad D = \begin{pmatrix} D_{ss} & D_{s\varphi} \\ D_{s\varphi} & D_{\varphi\varphi} \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Матрица (A_{ij}^{s}) положительно определена, так как она является матрицей Грамма [12] векторов $\mathbf{a}_1^s$, $\mathbf{a}_2^s$, $\mathbf{a}_3^s$ в метрике (10) и поэтому обратима. Обратную к ней матрицу обозначаем через (A^{ij}):

$$\sum_{k=1}^{3} A^{ik} A_{kj}^{s} = \delta_j^i = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j. \end{cases}$$

Рассмотрим векторы $\mathbf{a}_s^1$, $\mathbf{a}_s^2$, $\mathbf{a}_s^3$, взаимные [18] к векторам $\mathbf{a}_1^s$, $\mathbf{a}_2^s$, $\mathbf{a}_3^s$ в метрике $\langle \cdot \rangle_D$ и связанные с ними величины A_i^j:

$$\mathbf{a}_s^i = \sum_{k=1}^{3} A^{ij} \mathbf{a}_j^s, \qquad A_i^j = \left\langle \mathbf{a}_i^{\varphi}, \mathbf{a}_s^j \right\rangle_D = \sum_{k=1}^{3} A_{ik}^{s\varphi} A^{kj}. \tag{11}$$

Теперь можем построить ортогональные дополнения $\mathbf{a}_j$ векторов $\mathbf{a}_j^{\varphi}$ к векторам $\mathbf{a}_j^s$, $j = 1,2,3$:

$$\mathbf{a}_j = \mathbf{a}_j^{\varphi} - \sum_{k=1}^{3} A_j^k \mathbf{a}_k^s, \qquad A_{ij} = \left\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j \right\rangle_D = A_{ij}^{\varphi} - \sum_{k=1}^{3} A_i^k A_{kj}^{s\varphi}. \tag{12}$$

Тогда, поскольку

$$D_{\alpha}^{\beta} = A_{1i(\alpha)}^{\beta}, \qquad D_{\beta}^{\alpha_1\alpha_2} = A_{i(\alpha_1)i(\alpha_2)}^{\beta}, \qquad D_{sj}^{\alpha_1\alpha_2} = A_{i(\alpha_1)i(\alpha_2)}^{sj},$$

где $\alpha, \alpha_1, \alpha_2 = 0, \nu, s$, $\beta = s, \varphi$, $i(\alpha) = \begin{cases} 1, & \alpha = 0, \\ 2, & \alpha = \nu, \\ 3, & \alpha = s, \end{cases}$ то после достаточно громоздких преобразований приходим к выражению для матрицы H_{ben} и вектора $\mathbf{h}_{\text{ben}}$, имеющим следующий блочный вид:

$$H_{\text{ben}} = \begin{pmatrix} H_{\nu\nu}^{\text{ben}} & H_{\nu q}^{\text{ben}} \\ H_{q\nu}^{\text{ben}} & H_{qq}^{\text{ben}} \end{pmatrix}, \qquad H_{qq}^{\text{ben}} = -\left(H_{\nu\nu}^{\text{ben}}\right)^{\top}, \tag{13}$$

где

$$H_{\nu\nu}^{\text{ben}} = \begin{pmatrix} 0 & -b_s & -\varepsilon^{-1} & 0 \\ b_s + b_{\varphi} A_1^1 & -\dfrac{\dot r}{r} A_1^1 & -\dfrac{\dot r}{r} A_2^1 & -\dfrac{\dot r}{r} A_3^1 \\ b_{\varphi} A_1^2 & -\dfrac{\dot r}{r} A_1^2 & -\dfrac{\dot r}{r} A_2^2 & -\dfrac{\dot r}{r} A_3^2 \\ b_{\varphi} A_1^3 & -\dfrac{\dot r}{r} A_1^3 & -\dfrac{\dot r}{r} A_2^3 & -\dfrac{\dot r}{r} A_3^3 \end{pmatrix},$$

$$H_{q\nu}^{\text{ben}} = \begin{pmatrix} r(b_{\varphi})^2 A_{11} & -\dot r b_{\varphi} A_{11} & -\dot r b_{\varphi} A_{12} & -\dot r b_{\varphi} A_{13} \\ -\dot r b_{\varphi} A_{11} & \dfrac{\dot r^2}{r} A_{11} & \dfrac{\dot r^2}{r} A_{12} & \dfrac{\dot r^2}{r} A_{13} \\ -\dot r b_{\varphi} A_{21} & \dfrac{\dot r^2}{r} A_{21} & \dfrac{\dot r^2}{r} A_{22} & \dfrac{\dot r^2}{r} A_{23} \\ -\dot r b_{\varphi} A_{31} & \dfrac{\dot r^2}{r} A_{31} & \dfrac{\dot r^2}{r} A_{32} & \dfrac{\dot r^2}{r} A_{33} + \dfrac{r\delta}{\varepsilon^2} f_{ss} \end{pmatrix},$$

$$H_{\nu q}^{\text{ben}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A^{11} & A^{12} & A^{13} \\ 0 & A^{21} & A^{22} & A^{23} \\ 0 & A^{31} & A^{32} & A^{33} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{h}_{\text{ben}} = \begin{pmatrix} \mathbf{h}_{\nu}^{\text{ben}} \\ \mathbf{h}_q^{\text{ben}} \end{pmatrix},$$

$$
\mathbf{h}_\nu^{\text{ben}} = -\begin{pmatrix} 0 \\ A^{11}\sigma_{*s}^0 + A^{12}\sigma_{*s}^\nu + A^{13}\sigma_{*s}^s \\ A^{21}\sigma_{*s}^0 + A^{22}\sigma_{*s}^\nu + A^{23}\sigma_{*s}^s \\ A^{31}\sigma_{*s}^0 + A^{32}\sigma_{*s}^\nu + A^{33}\sigma_{*s}^s \end{pmatrix},
$$

$$
\mathbf{h}_q^{\text{ben}} = -\begin{pmatrix} rb_\varphi(A_1^1\sigma_{*s}^0 + A_1^2\sigma_{*s}^\nu + A_1^3\sigma_{*s}^s) \\ -\dot{r}(A_1^1\sigma_{*s}^0 + A_1^2\sigma_{*s}^\nu + A_1^3\sigma_{*s}^s) \\ -\dot{r}(A_2^1\sigma_{*s}^0 + A_2^2\sigma_{*s}^\nu + A_2^3\sigma_{*s}^s) \\ -\dot{r}(A_3^1\sigma_{*s}^0 + A_3^2\sigma_{*s}^\nu + A_3^3\sigma_{*s}^s) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -rb_\varphi\sigma_{*\varphi}^0 - rF_z^0 \\ \dot{r}\sigma_{*\varphi}^0 - rF_s^0 \\ \dot{r}\sigma_{*\varphi}^\nu - rF_s^\nu \\ \dot{r}\sigma_{*\varphi}^s - rF_s^s + \dfrac{r\delta}{\varepsilon^2}\tau_{*ss} \end{pmatrix} -
$$

$$
-\frac{r\delta}{\varepsilon}\begin{pmatrix} \dfrac{1}{\delta}(\sigma_{rs} - \sigma_{\ell z}) \\ \tau_{rs} - \tau_{\ell s} \\ \nu_r\tau_{rs} - \nu_\ell\tau_{\ell s} \\ \mu_s(\nu_r)\tau_{rs} - \mu_s(\nu_\ell)\tau_{\ell s} \end{pmatrix}.
$$

Анализ этих выражений показывает, что в обоих случаях приходится решать краевую задачу для линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$
\frac{d\mathbf{y}(t)}{dt} = H(t)\mathbf{y}(t) + \mathbf{h}(t), \tag{14}
$$

где $t \in [t_\ell, t_r]$, а матрица H и вектор $\mathbf{y}$ имеют следующее блочное представление:

$$
H = \begin{pmatrix} H_{\upsilon\upsilon} & H_{uq} \\ H_{q\upsilon} & H_{qq} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\upsilon} \\ \mathbf{q} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{\upsilon}(t),\ \mathbf{q}(t) \in \mathbb{R}^n,
$$

$$
H_{\upsilon\upsilon} = -H_{qq}^\top, \qquad H_{\upsilon q} = H_{\upsilon q}^\top, \qquad H_{q\upsilon} = H_{q\upsilon}^\top.
$$

Здесь $\mathbb{R}^n$ – евклидово пространство размерности n, $n = 2,4$; «$\top$» – символ операции транспонирования, а матричные блоки $H_{\upsilon q}$ и $H_{q\upsilon}$ – симметричные неотрицательно определенные матрицы. Последние соотношения симметрии эквивалентны одному матричному равенству

$$
J_n H + H^\top J_n = 0, \tag{15}
$$

где

$$
J_n = \begin{pmatrix} 0 & -E_n \\ E_n & 0 \end{pmatrix}, \tag{16}
$$

здесь E_n – единичная матрица размерности n. Подобные матрицы H называются гамильтоновыми [2]; система линейных дифференциальных уравнений называется гамильтоновой, если ее матрица гамильтонова.

Гамильтоновы системы уравнений обладают рядом специфических свойств, которые существенно облегчают их аналитическое исследование. Например, для собственных чисел и собственных векторов гамильтоновой матрицы справедливы утверждения, являющиеся следствиями известной теоремы Вильямсона (J. Williamson, 1936) [2]:

Теорема 1. *Вещественная гамильтонова матрица имеет только четыре типа собственных чисел: вещественные пары* $\{a, -a\}$, *чисто мнимые пары* $\{ib, -ib\}$, *четверки* $\{\pm a, \pm b\}$ *и нулевые собственные числа;*

жордановы клетки, соответствующие двум членам пары или четырем членам четверки, имеют одинаковую структуру;

если $\mathbf{x}_1$ *и* $\mathbf{x}_2$ *– собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям* λ_1 *и* λ_2, *причем* $\lambda_1 + \overline{\lambda}_2 \neq 0$, *то скалярное в* C^{2n} *про-*

изведение $(\mathbf{x}_1, J\mathbf{x}_2) = 0$*; если же рассматривать скалярное в* $\mathbb{R}^{2n}$ *произведение, то* $(\mathbf{x}_1, J\mathbf{x}_2) = 0$ *при* $\lambda_1 + \lambda_2 \neq 0$.

Положительная же определенность блоков $H_{\upsilon q}$ и $H_{q\upsilon}$ играет решающую роль как для доказательства существования решения соответствующих линейных краевых задач [20], так и для обоснования вычислительных схем их решения.

При построении и обосновании численных и аналитических методов исследования линейных гамильтоновых систем оказалось возможным и полезным абстрагироваться от конкретного вида матрицы J_n из соотношений (15), то есть рассматривать более общий с математической точки зрения случай симметрии системы. В результате приходим к следующему определению, являющимся непосредственным обобщением определения гамильтоновости системы.

Определение. Квадратную матрицу G назовем J*-матрицей*, если для нее выполнено равенство

$$JG + G^{\top}J = 0\,, \tag{17}$$

где J − невырожденная матрица той же размерности, что и G.

Линейная система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\mathbf{z}(t)}{dt} = G(t)\mathbf{z}(t) + \mathbf{g}(t), \qquad \mathbf{z}, \mathbf{g} \in \mathbb{R}^m\,, \tag{18}$$

называется J*-системой*, если матрица $G(t)$ − J-матрица.

Множество всех J-матриц G_J является матричной алгеброй Ли [11], которой соответствует матричная группа Ли T_J, и для любого элемента T группы T_J выполняются равенства

$$T^{-1} = J^{-1}T^{\top}J, \qquad \det(T) = 1\,. \tag{19}$$

Это эквивалентно тому, что при преобразовании пространства $\mathbb{R}^m$ элементами группы T_J значения квадратичной формы с матрицей J не изменяются:

$$(\mathbf{x}, J\mathbf{y}) = (T\mathbf{x}, TJ\mathbf{y}), \qquad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m, \qquad T \in T_J\,,$$

здесь через $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ обозначено скалярное произведение векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$.

Если на отрезке $[t_\ell, t_r]$ для J-системы обыкновенных дифференциальных уравнений (18) существует фундаментальная матрица решений $Z(t)$ и при некотором $t^* \in [t_\ell, t_r]$ она принадлежит группе T_J, то $Z(t) \in T_J$ для любого t из $[t_\ell, t_r]$.

Верно и обратное в некотором смысле утверждение. Пусть на отрезке $[t_\ell, t_r]$ матричная функция $T(t)$ дифференцируема и принадлежит группе T_J. Тогда матрицы

$$\frac{dT(t)}{dt}(T(t))^{-1}, \qquad (T(t))^{-1}\frac{dT(t)}{dt}\,,$$

принадлежат алгебре G_J.

В случае, когда G_J совпадает с алгеброй гамильтоновых матриц, группа Ли T_J является симплектической, элементы которой − симплектические матрицы. Напомним, что матрица S порядка $2n \times 2n$ называется симплектической [2], если она удовлетворяет соотношениям

$$S^{-1} = -J_n S^{\top} J_n, \qquad \det(S) = 1\,.$$

Можно показать, что почти все практически значимые краевые условия в теории оболочек можно сформулировать в терминах обобщенных смещений и обобщенных усилий, надлежащим образом определенных. Поэтому, рассматривая для простоты лишь однородные краевые условия, можно ограничиться исследованием краевых задач с граничными условиями типа

$$B_\ell \mathbf{z}(t_\ell) + B_r \mathbf{z}(t_r) = \mathbf{0}, \tag{20}$$

где B_ℓ и B_r – такие $(m \times m)$-матрицы, что ранг блочной матрицы $(B_\ell\ B_r)$ равен m, а решение краевой задачи (18)–(20) существует и единственно для любой вектор-функции $\mathbf{g}(t)$ с интегрируемым квадратом евклидовой нормы, то есть для любой $\mathbf{g}(t) \in L_2^m$.

Тогда в силу известных теорем вложения [12], можно говорить об интегральном операторе B_G,

$$B_G : \mathbf{g}(t) \to \mathbf{z}(t),$$

ставящем в соответствие любой вектор-функции $\mathbf{g}(t) \in L_2^m$ решение краевой задачи (18)–(20). При этом из предположений следует, что оператор B_G, рассматриваемый как оператор из L_2^n в L_2^n, ограничен некоторой константой $C_G > 0$:

$$\|\mathbf{z}\| \le C_G \|\mathbf{g}\|,$$

где

$$\|\mathbf{z}\| = \sqrt{\langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle}, \qquad \langle \mathbf{z}, \mathbf{y} \rangle = \int_{t_l}^{t_r} (\mathbf{z}(t), \mathbf{y}(t))\, dt.$$

Для J-систем имеет место легко доказываемое утверждение.

Теорема 2. *Пусть* (18) – *J-система, матрица J невырождена, а матрицы B_ℓ и B_r из краевых условий* (20) *удовлетворяют ограничению*

$$B_\ell J^{-1} B_\ell^\top = B_r J^{-1} B_r^\top. \tag{21}$$

Тогда оператор B_G, порожденный линейной краевой задачей (18)–(20), *является J-оператором в метрике пространства L_2^m, то есть*

$$J B_G + B_G^\top J = 0,$$

здесь $B_G^\top$ – оператор, сопряженный к B_G в L_2^m.

Необходимо отметить, что условию (21) с матрицей $J = J_n$ из (15) удовлетворяют практически все краевые условия в теории оболочек.

Если известна фундаментальная система решений однородной системы, то решение неоднородной системы линейных дифференциальных уравнений может быть сведено методом неопределенных коэффициентов к квадратурам. Поэтому особое значение приобретают методы анализа линейных однородных гамильтоновых систем дифференциальных уравнений, рассматриваемые ниже.

Аналитическим методам исследования гамильтоновых систем посвящена обширная литература, достаточно полный обзор которой можно найти, например, в [2] и [10]. Однако большинство из этих работ ориентировано на исследование нелинейных задач и использует, как правило, технику канонических преобразований, определяемых через производящие функции, удовлетворяющие уравнению Гамильтона – Якоби. Для линейных задач эта техника может быть значительно упрощена, если использовать методику получения асимптотических разложений решений линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, описанную в монографии [6]. Однако прямое применение ее для анализа линейных гамильтоновых систем приводит к тому, что после первого шага теряется гамильтонова симметрия системы, что приводит к неоправданно большим вычислительным затратам. Ниже предлагается модификация методики Сибуйя – Вазова [6] получения асимптотических разложений решений не только для гамильтоновых, но и для J-систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений.

Традиционное упрощение [6] исходной системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений (18) заключается в переходе от нее посредством линейного преобразования

$$\mathbf{z}(t) = T(t)\mathbf{y}(t), \qquad \mathbf{z}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m, \tag{22}$$

к системе

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = F(t)\mathbf{y}(t) + \mathbf{f}(t), \qquad \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m, \tag{23}$$

матрица которой имеет более простую блочно-диагональную структуру

$$F = \begin{pmatrix} F_{11} & 0 \\ 0 & F_{22} \end{pmatrix},$$

здесь F_{11} и F_{22} – квадратные матрицы размерностей m_1 и m_2 соответственно $(m_1 + m_2 = m)$.

Задачу определения невырожденного преобразования $T(t)$, переводящего систему (18) в систему (23), матрица которой имеет блочно-диагональную структуру, назовем задачей декомпозиции. Решение этой задачи лежит в основе аналитических методов исследования линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений [6], поскольку таким образом можно перейти от исходной системы дифференциальных уравнений к системе, допускающей аналитическое решение.

Подставляя (22) в (18) и сравнивая полученный результат с (23), получаем соотношение, связывающее матрицы G, F и T:

$$F(t) = T^{-1}(t)\left(G(t)T(t) - \frac{d}{dt}T(t)\right). \tag{24}$$

При этом желательно, чтобы преобразованная система (23) сохраняла основные свойства, которыми обладает исходная линейная система уравнений (18). В этой связи является полезным следующее легко доказываемое утверждение.

Лемма 1. *Преобразование* (22) *при* $T(t) \in T_J$ *переводит* J*-систему* (18) *в* J*-систему* (23).

Из этой леммы следует, что при поиске матрицы преобразования $T(t)$ можно ограничиться только матрицами из группы T_J. Например, $T(t)$ можно представить в виде экспоненты некоторой матрицы из алгебры G_J [11], так что задача определения $T(t)$ трансформируется в поиск такой J-матрицы, экспонента которой обеспечивает переход от системы (18) к системе (23). К сожалению, в этом случае приходится иметь дело с трансцендентными матричными соотношениями. Поэтому ниже используется предложенное в середине прошлого века английским математиком Кэли (Ceyly) представление матриц из группы T_J матрицами алгебры G_J, приводящее к алгебраическим матричным уравнениям. Матрицу $T(t)$ будем искать как преобразование Кэли [3] матрицы $C(t) \in G_J^C$:

$$T(t) = \frac{E_m + C(t)}{E_m - C(t)}, \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & C_{12} \\ C_{21} & 0 \end{pmatrix}. \tag{25}$$

Блочная структура матрицы $C(t)$ выбрана специальным образом, по аналогии с подобными построениями из монографии [6]. Предполагается, что все собственные значения блоков C_{12} и C_{21} по модулю меньше единицы.

Полагая, что матрицы $T(t)$ и $G(t)$ имеют блочную структуру того же типа, что и матрицы $F(t)$ и $C(t)$:

$$G = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{pmatrix} = G^d + G^c, \qquad T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix}, \tag{26}$$

(здесь j-й блок имеет размерность $m_i \times m_j$) из (25) получаем

$$T_{11}(t) = \left[E_{m1} + C_{12}(t)C_{21}(t)\right]\left[E_{m2} - C_{12}(t)C_{21}(t)\right]^{-1},$$

$$T_{12}(t) = 2C_{12}(t)\left[E_{m2} - C_{21}(t)C_{12}(t)\right]^{-1},$$

$$T_{21}(t) = 2C_{21}(t)\left[E_{m1} - C_{12}(t)C_{21}(t)\right]^{-1},$$

$$T_{22}(t) = \left[E_{m2} + C_{21}(t)C_{12}(t)\right]\left[E_{m2} - C_{21}(t)C_{12}(t)\right]^{-1}. \tag{27}$$

Матричное же соотношение (24) после несложных алгебраических преобразований распадается на две группы:

$$F_{11} = -T_{11}^{-1}\frac{dT_{11}}{dt} + T_{11}^{-1}G_{11}T_{11} + T_{11}^{-1}G_{12}T_{21},$$

$$F_{22} = -T_{22}^{-1}\frac{dT_{22}}{dt} + T_{22}^{-1}G_{22}T_{22} + T_{22}^{-1}G_{21}T_{12}, \tag{28}$$

и

$$\frac{dX_{12}}{dt} = G_{12} + G_{11}X_{12} - X_{12}G_{22} - X_{12}G_{21}X_{12},$$

$$\frac{dX_{21}}{dt} = G_{21} + G_{22}X_{21} - X_{21}G_{11} - X_{21}G_{12}X_{21}, \tag{29}$$

где матрицы X_{12} и X_{21} следующим образом связаны с матрицей T:

$$T_{12} = X_{12}T_{22}, \qquad T_{21} = X_{21}T_{11}. \tag{30}$$

Учитывая равенства (27), в последних соотношениях перейдем от блоков матрицы T к блокам матрицы C:

$$2C_{12}(t) = X_{12}(t)\left(E_{m2} - C_{21}(t)C_{12}(t)\right),$$

$$2C_{21}(t) = \left(E_{m2} - C_{21}(t)C_{12}(t)\right)X_{21}(t). \tag{31}$$

Считая матрицы X_{12} и X_{21} известными, эти выражения можно рассматривать как систему матричных уравнений относительно блоков C_{12} и C_{21}. Если все собственные значения матриц X_{12} и X_{21} по модулю меньше единицы, то можно показать [9], что эта система имеет решения. Одно из них имеет вид

$$C_{12}(t) = X_{12}(t)\left[E_{m2} + X_{22}(t)\right]^{-1},$$

$$C_{21}(t) = \left[E_{m2} + X_{22}(t)\right]^{-1}X_{21}(t), \tag{32}$$

где

$$X_{11}(t) = \sqrt{E_{m1} - X_{12}(t)X_{21}(t)},$$

$$X_{22}(t) = \sqrt{E_{m2} - X_{21}(t)X_{12}(t)}.$$

Здесь выражение $\sqrt{E_m - X}$ обозначает сходящийся степенной ряд:

$$\sqrt{E_m - X} = E_m - \frac{1}{2}X - \frac{1}{8}X^2 - \ldots - \frac{(2k-3)!!}{2^k k!}X^k - \ldots.$$

Такой выбор производящей функции гарантирует невырожденность матриц $E_{m1} + X_{11}(t)$ и $E_{m2} + X_{22}(t)$, поскольку при сделанных предположениях о спектрах матриц X_{12} и X_{21} все их собственные числа имеют положительные действительные части.

Подставляя (32) в (27), получим выражение матриц $T_{11}(t)$ и $T_{22}(t)$ через матрицы $X_{12}(t)$ и $X_{21}(t)$:

$$T_{11}(t) = \left[X_{11}(t)\right]^{-1}, \qquad T_{22}(t) = \left[X_{22}(t)\right]^{-1}, \tag{33}$$

которые совместно с (30) дают представление матрицы $T(t)$ через решения $X_{12}(t)$ и $X_{21}(t)$ уравнений (29).

В заключении приведем основные соотношения, приводящие к декомпозиции системы (18):

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = G(t)\mathbf{z}(t) + \mathbf{g}(t), \qquad G = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{z}, \mathbf{g} \in C^m,$$

$$\mathbf{z}(t) = T(t)\mathbf{y}(t), \qquad T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{f}(t) = T^{-1}(t)\mathbf{g}(t),$$

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = F(t)\mathbf{y}(t) + \mathbf{f}(t), \qquad F = \begin{pmatrix} F_{11} & 0 \\ 0 & F_{22} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{y}, \mathbf{f} \in C^m,$$

$$\frac{dX_{\alpha\beta}}{dt} = G_{\alpha\beta} + G_{\alpha\alpha}X_{\alpha\beta} - X_{\alpha\beta}G_{\beta\beta} - X_{\alpha\beta}G_{\beta\alpha}X_{\alpha\beta},$$

$$T_{\alpha\alpha} = (E_{m\alpha} - X_{\alpha\beta}X_{\beta\alpha})^{-1/2}, \qquad T_{\alpha\beta} = X_{\alpha\beta}T_{\beta\beta} = T_{\alpha\alpha}X_{\alpha\beta},$$

$$F_{\alpha\alpha} = T_{\alpha\alpha}^{-1}\left(G_{\alpha\alpha}T_{\alpha\alpha} + G_{\alpha\beta}T_{\beta\alpha} - \frac{dT_{\alpha\alpha}}{dt}\right), \qquad \alpha \neq \beta, \qquad \alpha, \beta = 1, 2. \tag{34}$$

Здесь все матрицы с индексами 11 и 22 имеют размерности соответственно $m_1 \times m_1$ и $m_2 \times m_2$; блоки с индексами 12 и 21 имеют размерности $m_1 \times m_2$ и $m_2 \times m_1$ (при этом $m_2 + m_1 = m$).

В (34) не приведена связь (32) блоков $C_{\alpha\beta}$ и $X_{\alpha\beta}$ между собой, поскольку в окончательных соотношениях преобразование Кэли явно не используется.

Соотношения (33), описывающие формальное решение задачи декомпозиции, значительно сложнее, чем аналогичные соотношения из [6]. Однако приведенная выше схема решения задачи декомпозиции, в отличие от схемы из [6], обладает дополнительным свойством, которое можно сформулировать в виде такого утверждения.

Теорема 3. *Пусть система* (18) *является J-системой, а алгебра Ли G_J J-матриц разлагается в прямую сумму*

$$\mathrm{G}_J = \mathrm{G}_J^d \oplus \mathrm{G}_J^c,$$

где $\mathrm{G}_J^d = \{\mathrm{G}^d\}$ – подалгебра блочно-диагональных J-матриц, а $\mathrm{G}_J = \{\mathrm{G}^c\}$ – подпространство J-матриц специального вида

$$\mathrm{G}^d = \begin{pmatrix} \mathrm{G}_{11} & 0 \\ 0 & \mathrm{G}_{22} \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{G}^c = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{G}_{12} \\ \mathrm{G}_{21} & 0 \end{pmatrix},$$

и размерности всех матричных блоков согласованы с соответствующими размерностями из (34). *Тогда, если на отрезке $[t_\ell, t_r]$ существуют решения* (29) *$X_{12}(t)$ и $X_{21}(t)$ системы из* (34) *такие, что все их собственные* *значения по модулю меньше единицы и хотя бы в одной из точек промежутка* $[t_\ell, t_r]$ *матрица* $T(t)$ *принадлежит группе* T_J *(в этом случае* $T(t)$ *принадлежит группе* T_J *на всем промежутке), то матрица* $T(t)$ *из* (34) *осуществляет преобразование* (22), *переводящее* J*-систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений* (18) *в* J*-систему* (23) *с блочно-диагональной матрицей* $F(t)$ (28).

Непосредственное использование теоремы 3 для анализа J-систем приводит, вообще говоря, к задаче, более сложной, чем исходная, поскольку связано с интегрированием нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений высокого порядка. Однако, если анализируемая линейная J-система обладает некоторыми особенностями, то удается построить сравнительно простые соотношения, дающие хорошее приближение к решению задачи декомпозиции [6].

Пусть, например, коэффициенты уравнений линейной J-системы зависят от некоторого малого параметра ε, причем эта зависимость имеет по ε лишь особенности типа полюса. Таковыми являются уравнения статики замкнутых в окружном направлении оболочек вращения, где в качестве малого параметра ε выступает толщина оболочки. Иными словами, будем рассматривать дифференциальную J-систему вида

$$\varepsilon^k \frac{d\mathbf{z}(t)}{dt} = G(t,\varepsilon)\mathbf{z}(t), \qquad \mathbf{z} \in C^m, \tag{35}$$

где $k > 0$ − целое число, матрица $G(t,\varepsilon)$ аналитична по t при $|t| \le t_*$ и обладает асимптотическим разложением [6] вида

$$G(t,\varepsilon) \sim_{\varepsilon\to 0} \sum_{j=0}^{\infty} G_j(t)\varepsilon^j, \tag{36}$$

которое справедливо при ε, лежащем в некотором секторе комплексной плоскости ε равномерно по t при $|t| \le t_*$. Для асимптотического анализа по малому параметру J-систем такого типа полезна следующая теорема, аналогичная теореме 26.2 из [6]:

Теорема 4. *Пусть* $G(t,\varepsilon) \in G_J$ − *аналитическая по совокупности переменных* t *и* ε *при*

$$|t| \le t_*, \qquad |\varepsilon| \le \varepsilon_*, \qquad \varepsilon \in \Sigma_*,$$

матричная функция (здесь t_*, ε_* − *положительные постоянные, а* Σ_* − *некоторый сектор в плоскости* ε*), обладающая асимптотическим разложением вида* (36), $G_0(t) \in G_J^d$ *и ни одно собственное значение диагонального блока* $G_{011}(t)$ *матрицы* $G_0(t)$ *в представлении*

$$G_0(t) = \begin{pmatrix} G_{011}(t) & 0 \\ 0 & G_{022}(t) \end{pmatrix}$$

не совпадает ни с одним собственным значением блока $G_{022}(t)$.

Пусть преобразование

$$G \to J^{-1}GJ \tag{37}$$

пространства G *(множества всех квадратных матриц порядка* m*) переводит* G^c *(подпространство всех квадратных матриц порядка* m*, имеющих вид*

$$G^c = \begin{pmatrix} 0 & G_{12} \\ G_{21} & 0 \end{pmatrix},$$

здесь G_{ij} − *прямоугольные* $(m_i \times m_j)$*-матрицы;* $m_2 + m_1 = m$*) в себя.*

Тогда существует матричная функция $T(t,\varepsilon) \in T_J$, *аналитичная по совокупности переменных в некоторой подобласти области аналитичности функции* $G(t,\varepsilon)$, *имеющая в секторе* $\Sigma_{**} \subseteq \Sigma_*$ *асимптотическое разложение*

$$T(t,\varepsilon) \sim_{\varepsilon\to 0} \sum_{j=0}^{\infty} T_j(t)\varepsilon^j, \qquad T_0(t) \equiv E_m, \qquad |t| \le t_{**} \le t_*,$$

равномерное по t, *и такая, что преобразование*

$$\mathbf{z}(t) = T(\varepsilon,t)\mathbf{y}(t), \qquad \mathbf{z},\, \mathbf{y} \in C^m,$$

приводит дифференциальное уравнение (35) *к виду*

$$\varepsilon^k \frac{d\mathbf{y}(t)}{dt} = F(\varepsilon,t)\mathbf{y}(t).$$

Здесь матрица $F(\varepsilon,t) \in G_J^d$ *и разлагается в секторе* Σ_{**} *в асимптотический при* $\varepsilon \to 0$ *ряд по степеням* ε:

$$F(t,\varepsilon) \sim_{\varepsilon\to 0} \sum_{j=0}^{\infty} F_j(t)\varepsilon^j, \qquad F_0(t) \equiv G_0(t), \qquad |t| \le t_{**} \le t_*.$$

Опираясь на эти теоремы, можно провести асимптотический анализ однородной системы линейных дифференциальных уравнений осесимметричной задачи для оболочки вращения, если дополнительно использовать технику срезающих преобразований, развитую в [6].

Утверждения, аналогичные приведенным теоремам, подробно обоснованы в [6]. Поэтому доказательства этих теорем в данной работе опущены.

1. *Андреев А. Н., Немировский Ю. В.* К теории упругих многослойных анизотропных оболочек // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1977. – № 5. – С. 87–96.
2. *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики. – Москва: Наука, 1989. – 472 с.
3. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц. – Москва: Наука, 1976. – 351 с.
4. *Бидерман В. Л.* Механика тонкостенных конструкций. – Москва: Машиностроение, 1977. – 488 с.
5. *Богаевский В. Н., Повзнер А. Я.* Алгебраические методы в нелинейной теории возмущений. – Москва: Наука, 1987. – 256 с.
6. *Вазов В.* Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. – Москва: Мир, 1968. – 464 с.
7. *Ванин Г. А.* Микромеханика композиционных материалов. – Киев: Наук. думка, 1985. – 304 с.
8. *Васильева А. В., Бутузов В. Ф.* Асимптотические методы решения сингулярно возмущенных уравнений. – Москва: Наука, 1973. – 272 с.
9. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. – Москва: Наука, 1988. – 552 с.
10. *Гребеников Е. А.* Метод усреднения в прикладных задачах. – Москва: Наука, 1986. – 255 с.
11. *Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.* Современная геометрия: Методы и приложения. – Москва: Наука, 1986. – 760 с.
12. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. – Москва: Наука, 1977. – 741 с.
13. *Киреев И. В.* Аналитические и численные методы исследования линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений на однородных пространствах // Тр. III междунар. конф. «Симметрия и дифференциальные уравнения», Красноярск, 25–29 авг. 2002 г. – Красноярск: Ин-т вычисл. моделирования СО РАН, 2002. – С. 126–130.
14. *Немировский Ю. В., Киреев И. В.* Гамильтонов подход к решению линейных задач упругих оболочек вращения // Численные методы решения задач теории упругости и пластичности: Материалы X Всесоюз. конф. – Новосибирск, ИТПМ СО АН СССР, 1988. – С. 115–122.
15. *Немировский Ю. В., Резников В. С.* Прочность элементов конструкций из композиционных материалов. – Новосибирск: Наука, 1986. – 166 с.

16. *Олвер Ф.* Асимптотика и специальные функции. – Москва: Наука, 1990. – 528 с.
17. *Чернина В. С.* Статика тонкостенных оболочек вращения. – Москва: Наука, 1968. – 455 с.
18. *Черных К. Ф.* Линейная теория оболочек. – Ленинград: Изд-во ЛГУ, 1962. – Ч. 1. – 272 с.; – 1964. – Ч. 2. – 395 с.
19. *Шайдуров В. В.* Многосеточные методы конечных элементов. – Москва: Наука, 1989. – 288 с.
20. *Bucy R. S.* Two-point boundary value problems of linear Hamiltonian system // SIAM J. Appl. Math. – 1967. – **5**, No. 6. – P. 1385–1389.
21. *Composite* materials / Eds. L. J. Broutman, R. H. Krock. – Vol. 1–8. – New York: Acad. Press.
22. *Feng Kang, Qin Meng-Zao.* The computation of Hamiltonian equation // Lect. Notes in Math. – 1987. – **1297**. – P. 1–37.
23. *O'Malley P. E.* Boundary-value problems for linear system of ordinary differential equations involving many small parameters // J. Math. and Mech. – 1969. – **18**, No. 9. – P. 835–855.
24. *Stenger F.* Error bounds for asymptotic solutions of differential equations. I. The distinct eigenvalue case. II. The general case // J. Res. Nat. Bur. Standards Sect. B70. – 1966. – P. 167–187–210.

ГАМІЛЬТОНІВ ПІДХІД ДО ДОСЛІДЖЕННЯ ТОНКИХ ОБОЛОНОК ОБЕРТАННЯ ІЗ КОМПОЗИТНИХ МАТЕРІАЛІВ

Запропоновано метод побудови визначальних співвідношень лінійної теорії оболонок обертання у комплексній гамільтоновій формі. На основі варіаційного принципу Лагранжа побудовано математичну модель багатошарової ортотропної оболонки обертання. Отримано явні вирази коефіцієнтів і правих частин комплексної гамільтонової системи рівнянь статики оболонок обертання через її жорсткісні характеристики і діючі навантаження. Сформульована в осесиметричному випадку розв'язувальна гамільтонова система лінійних диференціальних рівнянь має ряд специфічних властивостей, які полегшують як аналітичні дослідження, так і чисельні процедури їх розв'язування.

HAMILTONIAN APPROACH TO STUDY THIN SHELLS OF REVOLUTION OF COMPOSITES

A method of construction of defining relations of the linear theory of shells of revolution in complex Hamiltonian form is proposed. On the base of Lagrange variational principle a mathematical model of multilayer orthotropic shell of revolution is constructed. The explicit expressions of the coefficients and the right-hand parts of the Hamiltonian complex system of equations of statics of the shells of revolution in terms of its rigid characteristics and acting loads are obtained. The Hamiltonian resolving system of linear differential equations formulated in the axisymmetric case has some specific properties facilitating both analytical studies and numerical procedures of their solution.

[1] Ин-т вычисл. математики
СО РАН, Красноярск, Россия,
[2] Ин-т теорет. и прикл. механики
им. С. А. Христиановича СО РАН,
Новосибирск, Россия

Получено
20.08.09