

ОСЕСИМЕТРИЧНІ ТЕМПЕРАТУРНІ НАПРУЖЕННЯ У ПРУЖНОМУ ІЗОТРОПНОМУ ЦИЛІНДРІ СКІНЧЕНОЇ ДОВЖИНИ

Розглянуто осесиметричну задачу про термонапружений стан суцільного скінченного циліндра з вільною від навантажень поверхнею. З використанням методу суперпозиції побудовано її повний аналітичний розв'язок, який зводиться до розв'язування систем лінійних алгебричних рівнянь. Запропоновано спосіб визначення асимптотичної поведінки коефіцієнтів у цих системах, що дозволяє розробити ефективний алгоритм розрахунку напружень у циліндрі, включаючи області біля торцевих кіл. Розглянуто типові приклади.

1. Вступ. Починаючи з середини ХХ століття, проблема теплових напружень в елементах конструкцій отримала істотний розвиток у зв'язку з важливими практичними задачами, які виникають при розробці нових конструкцій парових і газових турбін, реактивних і ракетних двигунів, атомних реакторів тощо. Елементи цих конструкцій працюють в умовах нерівномірного і найчастіше – нестационарного нагрівання, при якому виникають градієнти температури й неоднакове теплове розширення окремих частин. Таке нерівномірне теплове розширення не може відбуватися вільно в пружному тілі і викликає теплові (термічні, температурні) напруження. Знання величини та характеру дії теплових напружень є необхідним для всебічного аналізу міцності конструкцій.

З іншого боку, термопружність як самостійний розділ теорії пружності виникла досить давно – лінійні рівняння для врахування впливу нагріву були незалежно встановлені Ж. Дюгамелем [25] і Ф. Нейманом [36]. Нерівномірність нагріву пружного ізотропного тіла викликає появу додаткових членів, пропорційних температурі в законі Гука, і фіктивної сили, пропорційної градієнтові температури, в рівняннях для переміщень Ляме. З того часу типові задачі термопружності постійно знаходили місце у класичних і сучасних підручниках з теорії пружності, наприклад, С. П. Тимошенка [19, §66], [43, §§65, 113–115], [44, §§148–164], П. Ф. Папковича [16, розд. IV, §§10, 11, розд. VI, §3, розд. IX, §§11–13, розд. X, §§3, 15, 16], Дж. Р. Барбера [22, розд. 14, 22], М. Х. Садда [40, розд. 12]. Крім того, таким задачам присвячені підручники з термопружності А. Д. Коваленка [7, 8, 31] і Р. Б. Гетнарського й М. Р. Есламі [28] та низка вітчизняних [1, 10, 12, 13, 17] і закордонних [23, 24, 26, 30, 34, 37–39] монографій, які містять докладну бібліографію з предмету.

При цьому найбільше уваги було присвячено вивченню термонапруженого стану пружного тіла в умовах плоскої задачі: плоска деформація довгого тіла сталого поперечного перерізу, коли термічні процеси не залежать від поздовжньої координати та (узагальненого) плоского напруженого стану тонкої однозв'язної ізотропної пластинки сталої товщини. Плоскі квазістатичні задачі термопружності в напруженнях за відомого температурного поля і за відсутності поверхневих силових навантажень на контурі тіла зводяться до неоднорідного бігармонічного рівняння стосовно однієї скалярної функції при нульових значеннях цієї функції і її нормальної похідної на всій границі [14].

Просторові задачі термопружності для скінченного ізотропного циліндра почали інтенсивно вивчатися в другій половині ХХ століття у зв'язку з розвитком атомної енергетики [3, 20, 26]. Термічні напруження в паливних стрижнях ядерних реакторів досягають високих рівнів, внаслідок чого ними не можна нехтувати при розрахунку на міцність у просторовому температурному полі. Вплив вільних від силових навантажень торців скінченного циліндра при осесиметричному розподілі температури вивчався різними аналітичними та числовими методами [21, 29, 33, 45]. При цьому досліджу-

вали лише радіальну зміну температури, яка, взагалі кажучи, не задовольняє рівняння Лапласа. Загальне подання стаціонарного осесиметричного температурного поля було розглянуто в роботах [41, 42], у яких (із зайвою громіздкістю, на наш погляд) методом суперпозиції побудовано розв'язок задачі та розглянуто приклад «кубоподібного» циліндра, на торцях якого задана постійна температурна «пляма». Головна ідея методу суперпозиції для осесиметричних задач у скінченному циліндрі полягає у використанні суми рядів Фур'є та Бесселя – Діні за повними системами тригонометричних та бесселевих функцій відповідно за осьюою і радіальною координатами. Ці ряди окремо тотожно задовольняють рівняння рівноваги Ляме у досліджуваній області й мають послідовності коефіцієнтів, достатні для задоволення двох довільних силових крайових умов для нормальних і дотичних напружень на торцях і бічній поверхні циліндра. Внаслідок взаємної перехресної неортогональності функцій у складі рядів вираз для коефіцієнтів одного ряду залежить від *усіх* коефіцієнтів другого ряду, і навпаки. Це призводить до необхідності розв'язування нескінченної системи лінійних алгебричних рівнянь, яка виражає залежність між коефіцієнтами рядів Фур'є й Бесселя – Діні та прикладеними навантаженнями. Така система розв'язувалася простим урізанням, тобто з використанням алгоритму простої редукції. При цьому точність виконання граничних умов на поверхні циліндра, особливо біля торцевого кола, ніяк не контролювалася.

У роботі [4], яка пізніше була використана в підручниках [7, §7.3; 8, §45; 31, §6.2], метод суперпозиції було застосовано із належним вивченням асимптотики поведінки коефіцієнтів рядів при великих номерах. Зокрема, встановлено, що ці коефіцієнти прямують до деякої спільної сталої величини, яка, взагалі кажучи, не дорівнює нулеві. Тому пряме використання алгоритму простої редукції за будь-якої кількості рівнянь не дає змоги правильно оцінити поведінку *усіх* коефіцієнтів, що конче потрібно для вивчення збіжності рядів біля границь. У класичному мемуарі Б. М. Кояловича [11] на типовій нескінченній системі, яка відповідає бігармонічній проблемі для прямокутної області, розвинуто спеціальну теорію *лімітант*, яка дозволяє за розв'язком скінченної системи визначити верхню і нижню границі для *усіх* невідомих коефіцієнтів. У монографії В. Т. Грінченка [6, §10] наведено детальну схему цієї методики для обчислення напружень в усьому циліндрі, включаючи його границю; ці результати у вигляді таблиць і графіків стали вже канонічними. Однак при цьому була вибрана лише незалежна від осьової координати квадратична радіальна залежність температури, що призводить до симетричного відносно серединної площини термонапруженого стану циліндра. У такому випадку стаціонарне рівняння Лапласа для температури не задовольняється, і тому цей канонічний приклад можна розглядати як тестовий при оцінці можливостей інших аналітичних і числових підходів. Слід відмітити, що задача про циліндр, що обертається навколо центральної осі з постійною кутовою швидкістю [5], повністю тотожна вказаній температурній задачі.

Мета пропонованої роботи подвійна. По-перше, розглядаємо повний (симетричний та антисиметричний відносно серединної площини) термонапружений стан скінченного циліндра з вільною від силових навантажень поверхнею у стаціонарному температурному полі, яке задовольняє рівняння Лапласа. По-друге, удосконалюємо та дещо спрощуємо алгоритм обчислення напружень на основі більш повного використання закону асимптотичної поведінки коефіцієнтів, що визначаються при розв'язанні коректно урізаної скінченної системи лінійних алгебричних рівнянь. Розглянуто конкретні приклади застосування алгоритму.

2. Постановка термopужної задачі та зведення її до силової. Розглядаємо осесиметричну задачу про пружну рівновагу суцільного ізотропного циліндра, який займає область $0 \leq r \leq a$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $-h \leq z \leq h$ в циліндричній системі координат (r, θ, z) . Циліндр перебуває під дією темпера-

турного поля $T = T(r, z)$ за відсутності масових сил і поверхневих зусиль. Для цієї задачі радіальна $u_r(r, z)$ та осьова $u_z(r, z)$ компоненти вектора пружних переміщень $\mathbf{u}(r, z)$ визначаються з рівнянь Ляме [7]

$$\begin{aligned} \mu \nabla^2 u_r + (\lambda + \mu) \frac{\partial \Theta}{\partial r} - \mu \frac{u_r}{r^2} - (3\lambda + 2\mu) \alpha_T \frac{\partial T}{\partial r} &= 0, \\ \mu \nabla^2 u_z + (\lambda + \mu) \frac{\partial \Theta}{\partial z} - (3\lambda + 2\mu) \alpha_T \frac{\partial T}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

при однорідних крайових умовах для нормальних σ_r і σ_z та дотичної τ_{rz} компонент тензора напружень:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= 0, & \tau_{rz} &= 0, & r &= a, \\ \sigma_z &= 0, & \tau_{rz} &= 0, & z &= \pm h. \end{aligned} \quad (2)$$

Тут $\Theta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru_r) + \frac{\partial u_z}{\partial z}$ – об'ємне розширення; $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – осесиметричний оператор Лапласа; λ та μ – пружні сталі Ляме; σ та α_T – відповідно коефіцієнти Пуассона та лінійного температурного видовження.

Компоненти тензора напружень визначаються через переміщення як

$$\begin{aligned} \sigma_r &= 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r} + \lambda \Theta - (3\lambda + 2\mu) \alpha_T T, & \sigma_\theta &= 2\mu \frac{u_r}{r} + \lambda \Theta - (3\lambda + 2\mu) \alpha_T T, \\ \sigma_z &= 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z} + \lambda \Theta - (3\lambda + 2\mu) \alpha_T T, & \tau_{rz} &= \mu \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right). \end{aligned} \quad (3)$$

З огляду на лінійність вихідної задачі (1), (2) компоненти вектора переміщень подамо у вигляді

$$u_r = u_r^* + u_r^{(T)}, \quad u_z = u_z^* + u_z^{(T)},$$

де складові з верхнім індексом «(T)» зумовлені наявністю температурних градієнтів і задовольняють неоднорідні рівняння (1). Ці переміщення згідно з (3) призводять до виникнення температурних напружень (далі також з індексом «(T)») і, як наслідок, спричиняють певні зовнішні зусилля на бічній поверхні й торцях циліндра. Складові вектора переміщень, позначені індексом «*», задовольняють однорідні рівняння (1), компенсуючи вплив вказаних напружень на поверхні циліндра так, щоб задовольнялись умови (2). Таким чином, приходимо до граничних умов

$$\begin{aligned} \sigma_r^* &= f(z), & \tau_{rz}^* &= s(z), & r &= a, \\ \sigma_z^* &= g^\pm(r), & \tau_{rz}^* &= p^\pm(r), & z &= \pm h, \end{aligned} \quad (4)$$

де $f(z) = -\sigma_r^{(T)}(a, z)$, $s(z) = -\tau_{rz}^{(T)}(a, z)$, $g^\pm(r) = -\sigma_z^{(T)}(r, \pm h)$, $p^\pm(r) = -\tau_{rz}^{(T)}(r, \pm h)$, а величини напружень, позначених «*», визначаються за формулами (3) за відсутності температурних членів.

Зауважимо, що умови пружної рівноваги накладають на праві частини умов (4) певні обмеження, які можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} a \int_{-h}^h s(z) dz &= \int_0^a r(g^-(r) - g^+(r)) dr, \\ a \int_{-h}^h f(z) dz + \int_0^a r(p^+(r) - p^-(r)) dr &= \int_0^a \int_{-h}^h \sigma_\theta^* dz dr. \end{aligned} \quad (5)$$

Існує загальна методика [2] інтегрування рівнянь рівноваги задля виведення інтегральних умов для компонент тензора напружень.

«Температурний» розв'язок рівнянь (1) можна знайти з використанням потенціалу П. Ф. Папковича [15] – Дж. Гудьєра [27] $\Phi = \Phi(r, z)$ у вигляді

$$u_r^{(T)} = \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \quad u_z^{(T)} = \frac{\partial \Phi}{\partial z},$$

де функція Φ є частковим розв'язком рівняння Пуассона

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1 + \sigma}{1 - \sigma} \alpha_T T. \quad (6)$$

Напруження, що відповідають переміщенням (4), записуються у вигляді

$$\begin{aligned} \sigma_r^{(T)} &= 2\mu \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} - \nabla^2 \Phi \right), & \sigma_\theta^{(T)} &= 2\mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \nabla^2 \Phi \right), \\ \sigma_z^{(T)} &= 2\mu \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \nabla^2 \Phi \right), & \tau_{rz}^{(T)} &= 2\mu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial z}. \end{aligned} \quad (7)$$

3. Побудова розв'язку силової задачі. Побудову компонентів вектора переміщень \mathbf{u}^* і відповідних напружень можна здійснювати у різний спосіб. У підручниках з теорії пружності й термопружності, а також спеціальних монографіях, зокрема [9, 18], присвячених виключно задачам для циліндричних тіл, наводяться різноманітні підходи до побудови загального розв'язку рівнянь Ляме, які мають певні переваги або недоліки для різних видів крайових умов. Зокрема, використовуються функції напружень Лява, Вебера, Тімпе, Папковича – Нейбера та інші. У підручниках А. Д. Коваленка [7, §7.2; 8, §45; 31, §6.2] використано подання П. Ф. Папковича [16] через гармонічні скалярну та векторну функції, а у монографії В. Т. Грінченка [6, §9] застосовано безпосереднє інтегрування однорідних рівнянь Ляме (1) у переміщеннях. У випадку задачі для скінченного циліндра, як і взагалі для тіл скінчених розмірів, вибір форми подання загального розв'язку рівняння Ляме є принциповим лише у тому розумінні, що отриманий розв'язок повинен містити достатню кількість функцій з довільними коефіцієнтами, щоб задовольнити крайові умови (4) на всій поверхні циліндра.

У цій роботі використаємо функцію Лява $\chi = \chi(r, z)$, яка задовольняє однорідне бігармонічне рівняння [32, §99]

$$\nabla^2 \nabla^2 \chi = 0.$$

Тоді радіальні та осьові переміщення визначаються за формулами

$$u_r^* = -\frac{1}{2\mu} \frac{\partial^2 \chi}{\partial r \partial z}, \quad u_z^* = \frac{1}{2\mu} \left(2(1 - \sigma) \nabla^2 \chi - \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} \right),$$

а компоненти тензора напружень обчислюються як

$$\begin{aligned} \sigma_r^* &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\sigma \nabla^2 \chi - \frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} \right), & \sigma_z^* &= \frac{\partial}{\partial z} \left((2 - \sigma) \nabla^2 \chi - \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} \right), \\ \sigma_\theta^* &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\sigma \nabla^2 \chi - \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial r} \right), & \tau_{rz}^* &= \frac{\partial}{\partial r} \left((1 - \sigma) \nabla^2 \chi - \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} \right). \end{aligned} \quad (8)$$

При розв'язанні крайової задачі доцільно розглянути окремо симетричний та антисиметричний відносно площини $z = 0$ напружений стан циліндра, подавши температурне поле у вигляді

$$T(r, z) = T^{(e)}(r, z) + T^{(o)}(r, z), \quad (9)$$

де $T^{(e)}(r, z) = (T(r, z) + T(r, -z))/2$ – розподіл температурного поля, що є симетричним відносно плоского поперечного перерізу циліндра $z = 0$, а $T^{(o)}(r, z) = (T(r, z) - T(r, -z))/2$ – відповідно антисиметричний розподіл.

3.1. Симетричний за координатою z розподіл температури. Розглянемо випадок пружної рівноваги циліндра, що знаходиться під дією температурного поля $T^{(e)}(r, z)$. Цей випадок ретельно розглянуто у книгах [6, §10; 7, §7.2; 31, §6.2], тому тут наведемо його схематично, зосередившись на окремих елементах, що залишалися поза увагою.

Стационарне (або миттєве для фіксованого моменту часу) температурне поле завжди можна подати у вигляді розвинення у ряд Фур'є

$$T^{(e)}(r, z) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n^{(e)}(r) \cos k_n z, \quad (10)$$

де

$$T_0^{(e)}(r) = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h T^{(e)}(r, z) dz, \quad T_n^{(e)}(r) = \frac{1}{h} \int_{-h}^h T^{(e)}(r, z) \cos k_n z dz, \\ k_n = n\pi/h, \quad n = 1, 2, \dots$$

За заданим температурним полем визначаємо частковий розв'язок рівняння (6) для термопружного потенціалу, записаного в аналогічному у вигляді:

$$\Phi(r, z) = \frac{1+\sigma}{1-\sigma} \alpha_T \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n(r) \cos k_n z. \quad (11)$$

Підстановка (10) та (11) у рівняння (6) з урахуванням повноти системи $\{\cos k_n z, n = 0, 1, \dots\}$ для цього випадку дає диференціальне рівняння

$$\Phi_n''(r) + \frac{1}{r} \Phi_n'(r) - k_n^2 \Phi_n(r) = T_n^{(e)}(r), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

яке має розв'язки, наведені у [7, §7.3]. Тут і надалі штрихом позначено диференціювання функцій однієї змінної. Вирази для напружень (7) мають вигляд

$$\sigma_r^{(T)} = K \sum_{n=0}^{\infty} [\Phi_n''(r) - T_n^{(e)}(r)] \cos k_n z, \quad \sigma_\theta^{(T)} = K \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{r} \Phi_n'(r) - T_n^{(e)}(r) \right] \cos k_n z, \\ \sigma_z^{(T)} = -K \sum_{n=0}^{\infty} [k_n^2 \Phi_n(r) + T_n^{(e)}(r)] \cos k_n z, \quad \tau_{rz}^{(T)} = -K \sum_{n=0}^{\infty} k_n \Phi_n'(r) \sin k_n z, \quad (12)$$

де $K = 2\mu(1+\sigma)\alpha_T/(1-\sigma)$.

З урахуванням виразів (12) праві частини «силового» навантаження (4) подамо у вигляді розвинень

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n f_n \cos k_n z, \quad s(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n s_n \sin k_n z, \\ g^+(r) = g^-(r) = g(r), \quad g(r) = g_0 + \sum_{j=1}^{\infty} g_j \frac{J_0(\lambda_j r)}{J_0(\lambda_j a)}, \quad p^\pm(r) \equiv 0 \quad (13)$$

з очевидними виразами для коефіцієнтів f_n, s_n (множник $(-1)^n$ уведено для спрощення запису подальших формул). Вирази для g_0, g_j отримуємо стандартним розвиненням функцій $k_n^2 \Phi_n(r) + T_n^{(e)}(r)$ у ряди Бесселя – Діні за повною системою функцій $\{1, J_0(\lambda_j r), j = 1, 2, \dots\}$ і подальшим підсумовуванням за індексом n . Тут λ_j – додатні корені рівняння $J_1(\lambda a) = 0$, пронумеровані в порядку зростання; J_0, J_1 – функції Бесселя першого роду нульового і першого порядків.

Для побудови розв'язку вихідної задачі (1), (2) для температурного поля (10) залишається знайти компоненти тензора напружень (8), які задовольняють крайові умови (4) з правими частинами (13). Використаємо функцію Лява у вигляді [35]

$$\chi = B_0 z^3 + D_0 r^2 z + \chi_s + h \sum_{j=1}^{\infty} Y_j R_j(z) \frac{J_0(\lambda_j r)}{\lambda_j^3 J_0(\lambda_j a)} + a \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n X_n S_n(r) \frac{\sin k_n z}{k_n^3}, \quad (14)$$

де

$$\chi_s = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n s_n \frac{I_0(k_n r)}{I_1(k_n a)} \frac{\sin k_n z}{k_n^3}, \\ R_j(z) = \left(h \operatorname{cth} \lambda_j h + \frac{2\sigma}{\lambda_j} \right) \frac{\operatorname{sh} \lambda_j z}{\operatorname{sh} \lambda_j h} - z \frac{\operatorname{ch} \lambda_j z}{\operatorname{sh} \lambda_j h}, \\ S_n(r) = \left(2 \frac{\sigma-1}{k_n} - a \frac{I_0(k_n a)}{I_1(k_n a)} \right) \frac{I_0(k_n r)}{I_1(k_n a)} + r \frac{I_1(k_n r)}{I_1(k_n a)},$$

$B_0, D_0, Y_j, X_n, \{j, n\} = 1, 2, \dots$, – невідомі коефіцієнти, які слід знайти з умов (4), (13); I_0, I_1 – модифіковані функції Бесселя першого роду нульового і першого порядків. Згідно з формулами (8) і (14) відповідні напруження мають вигляд

$$\begin{aligned}
\sigma_r^* &= 6\sigma B_0 + 2(2\sigma - 1)D_0 + \frac{\partial}{\partial z} \left(\sigma \nabla^2 \chi_s - \frac{\partial^2 \chi_s}{\partial r^2} \right) - h \sum_{j=1}^{\infty} Y_j R_j'(z) \frac{J_1(\lambda_j r)}{\lambda_j^2 r J_0(\lambda_j a)} + \\
&+ h \sum_{j=1}^{\infty} Y_j \left[\sigma R_j''(z) + (1 - \sigma) \lambda_j^2 R_j'(z) \right] \frac{J_0(\lambda_j r)}{\lambda_j^3 J_0(\lambda_j a)} + \\
&+ a \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n X_n \left[(\sigma - 1) S_n''(r) + \frac{\sigma}{r} S_n'(r) - k_n^2 \sigma S_n(r) \right] \frac{\cos k_n z}{k_n^2}, \\
\sigma_0^* &= 6\sigma B_0 + 2(2\sigma - 1)D_0 + \frac{\partial}{\partial z} \left(\sigma \nabla^2 \chi_s - \frac{1}{r} \frac{\partial \chi_s}{\partial r} \right) + h \sum_{j=1}^{\infty} Y_j R_j'(z) \frac{J_1(\lambda_j r)}{\lambda_j^2 r J_0(\lambda_j a)} + \\
&+ h \sigma \sum_{j=1}^{\infty} Y_j \left[R_j''(z) - \lambda_j^2 R_j'(z) \right] \frac{J_0(\lambda_j r)}{\lambda_j^3 J_0(\lambda_j a)} + \\
&+ a \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n X_n \left[\sigma S_n''(r) + \frac{\sigma - 1}{r} S_n'(r) - k_n^2 \sigma S_n(r) \right] \frac{\cos k_n z}{k_n^2}, \\
\sigma_z^* &= 6(1 - \sigma)B_0 + 4(2 - \sigma)D_0 + \frac{\partial}{\partial z} \left((2 - \sigma) \nabla^2 \chi_s - \frac{\partial^2 \chi_s}{\partial z^2} \right) + h \sum_{j=1}^{\infty} Y_j \left[(1 - \sigma) R_j''(z) - \right. \\
&- \left. \lambda_j^2 R_j'(z) \right] \frac{J_0(\lambda_j r)}{\lambda_j^3 J_0(\lambda_j a)} + a \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n X_n \left[(2 - \sigma) \left(S_n''(r) + \frac{1}{r} S_n'(r) \right) - \right. \\
&- \left. (1 - \sigma) k_n^2 S_n(r) \right] \frac{\cos k_n z}{k_n^2}, \\
\tau_{rz}^* &= \frac{\partial}{\partial r} \left((1 - \sigma) \nabla^2 \chi_s - \frac{\partial^2 \chi_s}{\partial z^2} \right) + h \sum_{j=1}^{\infty} Y_j \left[\sigma R_j''(z) + \lambda_j^2 R_j'(z) \right] \frac{J_1(\lambda_j r)}{\lambda_j^2 J_0(\lambda_j a)} + \\
&+ a \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n X_n \left[\frac{1 - \sigma}{r} \left((r S_n'(r))'' - \right. \right. \\
&- \left. \left. \frac{1}{r} (r S_n'(r))' \right) + \sigma k_n^2 S_n(r) \right] \frac{\sin k_n z}{k_n^3}. \tag{15}
\end{aligned}$$

Нескладно перекоонатись, що дотичні напруження τ_{rz}^* тотожно задовольняють крайові умови (4), (13) на торцях і бічній поверхні циліндра. Задовольняючи ж крайові умови (4) для нормальних напружень σ_r^* і σ_z^* отримуємо з використанням **(A3)**, **(A12)**, **(A14)**, **(A18)** та **(A20)** два рівняння

$$6\sigma B_0 + 2(2\sigma - 1)D_0 = f_0, \quad 6(1 - \sigma)B_0 + 4(2 - \sigma)D_0 = g_0 + s_0, \tag{16}$$

та нескінченну систему лінійних алгебричних рівнянь

$$\begin{aligned}
X_n P_n - \sum_{j=1}^{\infty} Y_j \frac{4k_n^2}{(k_n^2 + \lambda_j^2)^2} &= f_n + s_n q_n, \quad n = 1, 2, \dots, \\
Y_j \Delta_j - \sum_{n=1}^{\infty} X_n \frac{4\lambda_j^2}{(k_n^2 + \lambda_j^2)^2} &= -g_j - c_j, \quad j = 1, 2, \dots, \tag{17}
\end{aligned}$$

де позначено

$$s_0 = -\frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s_n}{k_n} = \frac{1}{ah} \int_{-h}^h z s(z) dz, \quad c_j = -\frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s_n k_n}{k_n^2 + \lambda_j^2} = \frac{1}{a} \int_{-h}^h s(z) \frac{\operatorname{sh} \lambda_j z}{\operatorname{sh} \lambda_j h} dz,$$

$$P_n = a^2 \left(\frac{I_0^2(k_n a)}{I_1^2(k_n a)} - 1 \right) + 2 \frac{\sigma - 1}{k_n^2}, \quad \Delta_j = \frac{h \operatorname{cth} \lambda_j h}{\lambda_j} + \frac{h^2}{\operatorname{sh}^2 \lambda_j h},$$

$$q_n = \frac{I_0(k_n a)}{I_1(k_n a)} - \frac{1}{k_n a}. \quad (18)$$

Таким чином, задача зводиться до визначення двох нескінченних послідовностей коефіцієнтів X_n , $n = 1, 2, \dots$, та Y_j , $j = 1, 2, \dots$, з нескінченної системи (17). У роботах [6, §10; 7, §7.2; 31, §6.2] доведено, що ця система є регулярною (тобто сума елементів кожного рядка матриці поза головною діагоналлю є меншою, ніж відповідний завжди додатний діагональний елемент P_n або Δ_j , на скінченну додатну величину, яка прямує до нуля зі збільшенням номера рядка) і допускає застосування до її розв'язання алгоритму простої редукції (ця ідея походить ще від класичної роботи Ж. Фур'є 1807 р., див. у [14] докладніше). При використанні цього алгоритму в системі (17) залишають $N + J$ перших рівнянь для скінченних послідовностей коефіцієнтів X_n , $n = 1, 2, \dots, N$, та Y_j , $j = 1, 2, \dots, J$, відкинувши решту рівнянь і невідомих для $n > N$ та $j > J$. Однак, незважаючи на доведену збіжність такого алгоритму при $N \rightarrow \infty$ і $J \rightarrow \infty$ до єдиного (головного) розв'язку вихідної нескінченної системи, алгоритм простої редукції виявляється не досить ефективним для визначення полів напружень у внутрішніх точках циліндра, а в околах ребер призводить до неусувних похибок для будь-яких скінченних значень N та J [6, §10]. Це пов'язано з асимптотичною поведінкою невідомих

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = \lim_{j \rightarrow \infty} Y_j = G = \operatorname{const} \neq 0, \quad (19)$$

виявленою в [4] на основі застосування теорії лімітант Б. М. Кояловича [11]. З огляду на це важливим питанням є відшукання константи G , встановлення якої забезпечує можливість адекватного визначення полів напружень, особливо поблизу ребер.

Традиційний підхід [6, §10; 7, §7.2; 31, §6.2] алгоритму удосконаленої редукції полягає у припущенні

$$X_n = X_N, \quad n > N, \quad Y_j = Y_J, \quad j > J,$$

у нескінченних сумах перших N рівнянь першого рядка системи (17) і J рівнянь другого рядка системи (17), після чого покладають

$$G = \frac{1}{2}(X_N + Y_J).$$

Пропонуємо інший підхід урахування асимптотичної поведінки невідомих у системі (17). Ідею такого підходу заклав Б. М. Коялович [11], посиляючись на зауваження І. Г. Бубнова, зроблене ще у 1902 році.

Грунтуючись на законі (19), покладемо

$$X_n = G + x_n, \quad Y_j = G + y_j, \quad (20)$$

де

$$x_n = o(1), \quad n \rightarrow \infty, \quad y_j = o(1), \quad j \rightarrow \infty. \quad (21)$$

З використанням (A19)–(A22) система (17) набуває вигляду

$$x_n P_n - \sum_{j=1}^{\infty} y_j \frac{4k_n^2}{(k_n^2 + \lambda_j^2)^2} + G \frac{2(1 + \sigma)}{k_n^2} = f_n + s_n q_n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$y_j \Delta_j - \sum_{n=1}^{\infty} x_n \frac{4\lambda_j^2}{(k_n^2 + \lambda_j^2)^2} + G \frac{2}{\lambda_j^2} = -g_j - c_j, \quad j = 1, 2, \dots, \quad (22)$$

у термінах нових невідомих (20). При цьому слід вивести додаткове рівняння для визначення сталої G . Його можна отримати декількома способами.

Наприклад, можна підсумувати першу групу рівнянь системи (22) по n , а другу – по j . Така дія є допустимою з огляду на збіжність відповідних рядів та асимптотику (21). Додавши отримані в такий спосіб рівняння, з використанням формул (A19)–(A22) знаходимо

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} x_n \left[P_n + \frac{1-\sigma}{k_n^2} - \frac{aI_0(k_n a)}{k_n I_1(k_n a)} \right] + \sum_{j=1}^{\infty} y_j \frac{h^2}{\text{sh}^2 \lambda_j h} + G \left(\frac{1+\sigma}{6} h^2 + \frac{a^2}{8} \right) = \\ = \frac{f(h) - f_0}{2} - \frac{g(a) - g_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} s_n q_n + \frac{s_0}{4}. \end{aligned} \quad (23)$$

У рівнянні (23) (яке виражає рівність різниці нормальних напружень σ_r^* і σ_z^* на ребрі різниці відповідних крайових умов) коефіцієнти при x_n спадають, як k_n^{-2} , а при y_j – як $\exp(-2\lambda_j h)$. Тому навіть невелика кількість невідомих забезпечує значення G , яке майже не змінюється зі зростанням n та j .

Додаткове рівняння можна вивести й в інший спосіб. Якщо попередньо поділити рівняння першої групи системи (22) на k_n^2 , а другої – на λ_j^2 , а потім проробити ті ж самі дії, які застосовувалися для отримання рівняння (23), то з використанням формул (A5), (A6), (A11), (A23)–(A26) отримаємо

$$\begin{aligned} (1+\sigma) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{k_n^4} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{y_j}{\lambda_j^4} + G \left(\frac{1+\sigma}{90} h^4 + \frac{a^4}{192} \right) = \int_{-h}^h f(z) \frac{3z^2 - h^2}{24h} dz - \\ - \int_0^a r g(r) \frac{2r^2 - a^2}{8a^2} dr + \int_{-h}^h z s(z) \frac{2(z^2 - h^2) - 3}{48h} dz. \end{aligned} \quad (24)$$

Коефіцієнти при x_n та y_j у рівнянні (24) спадають пропорційно до четвертого степеня відповідних значень індексів і мають простіший вигляд, ніж відповідні коефіцієнти у рівнянні (23).

Таким чином, тепер систему рівнянь (22) разом з додатковим рівнянням (23) або (24) можна розв'язувати з використанням алгоритму простої редукції, залишаючи скінченну кількість N та J перших невідомих відповідно x_n і y_j та $N + J + 1$ рівнянь. При цьому числа N та J є невеликими, що має суттєве значення, навіть при сучасному вельми розвинутому стані персональних комп'ютерів. Конкретні значення N та J , як і загалом точність обчислення розв'язку нескінченної системи (22), при переході до основної скінченної системи значною мірою залежать від характеру крайових умов (13), що відповідає поведінці вільних членів у вказаних системах.

Варто також звернути увагу на задоволення інтегральних умов рівноваги (5). Перша з цих умов з урахуванням формул (13) перетворюється на вимогу самозрівноваження дотичних зусиль на бічній поверхні циліндра:

$$\int_{-h}^h s(z) dz = 0,$$

яка задовольняється автоматично внаслідок непарності функції $s(z)$. Друга ж умова (5) набуває вигляду

$$f_0 = \frac{1}{2ah} \int_0^a \int_{-h}^h \sigma_0^*(r, z) dr dz.$$

Безпосередньою підстановкою σ_0^* , яке подається другою з формул (15) з урахуванням розв'язків (16), переконаємось, що ця умова задовольняється.

Отже, напружений стан циліндра, спричинений температурним полем (10), знаходиться шляхом суперпозиції напружень (12) і (15). Практичні обчислення напружень здійснюються за формулами

$$\sigma_\ell = \sigma_\ell^{(T)} + \bar{\sigma}_\ell^* + \sigma_{\ell\{G\}}^*, \quad \tau_{rz} = \tau_{rz}^{(T)} + \bar{\tau}_{rz}^* + \tau_{rz\{G\}}^*, \quad \ell = \{r, \theta, z\}, \quad (25)$$

де $\sigma_\ell^{(T)}, \tau_{rz}^{(T)}$ мають вигляд (12);

$$\begin{aligned} \sigma_r^* &= f_0 - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n s_n \left[\frac{I_0(k_n r)}{I_1(k_n a)} - \frac{I_1(k_n r)}{k_n r I_1(k_n a)} \right] \cos k_n z + \\ &\quad + h \sum_{j=1}^J y_j \left[\left(h \operatorname{cth} \lambda_j h - \frac{1}{\lambda_j} \right) \frac{\operatorname{ch} \lambda_j z}{\operatorname{sh} \lambda_j h} - z \frac{\operatorname{sh} \lambda_j z}{\operatorname{sh} \lambda_j h} \right] \frac{J_0(\lambda_j r)}{J_0(\lambda_j a)} - \\ &\quad - h \sum_{j=1}^J y_j \left[\left(h \operatorname{cth} \lambda_j h + \frac{2\sigma - 1}{\lambda_j} \right) \frac{\operatorname{ch} \lambda_j z}{\operatorname{sh} \lambda_j h} - z \frac{\operatorname{sh} \lambda_j z}{\operatorname{sh} \lambda_j h} \right] \frac{J_1(\lambda_j r)}{\lambda_j r J_0(\lambda_j a)} + \\ &\quad + a \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^n x_n}{k_n} \left[\left(k_n a \frac{I_0(k_n a)}{I_1(k_n a)} + 1 \right) \frac{I_0(k_n r)}{I_1(k_n a)} - k_n r \frac{I_1(k_n r)}{I_1(k_n a)} + \right. \\ &\quad \left. + \left(2\sigma - 2 - k_n a \frac{I_0(k_n a)}{I_1(k_n a)} \right) \frac{I_1(k_n r)}{k_n r I_1(k_n a)} \right] \cos k_n z, \\ \sigma_\theta^* &= f_0 - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{s_n}{k_n r} \frac{I_1(k_n r)}{I_1(k_n a)} \cos k_n z - h \sum_{j=1}^J y_j \frac{2\sigma}{\lambda_j} \frac{\operatorname{ch} \lambda_j z}{\operatorname{sh} \lambda_j h} \frac{J_0(\lambda_j r)}{J_0(\lambda_j a)} + \\ &\quad + h \sum_{j=1}^J y_j \left[\left(h \operatorname{cth} \lambda_j h + \frac{2\sigma - 1}{\lambda_j} \right) \frac{\operatorname{ch} \lambda_j z}{\operatorname{sh} \lambda_j h} - z \frac{\operatorname{sh} \lambda_j z}{\operatorname{sh} \lambda_j h} \right] \frac{J_1(\lambda_j r)}{\lambda_j r J_0(\lambda_j a)} - \\ &\quad - a \sum_{n=1}^N (-1)^n \frac{x_n}{k_n} \left[\left(2 \frac{1 - \sigma}{k_n} + a \frac{I_0(k_n a)}{I_1(k_n a)} \right) \frac{I_1(k_n r)}{r I_1(k_n a)} + \right. \\ &\quad \left. + (2\sigma - 1) \frac{I_0(k_n r)}{I_1(k_n a)} \right] \cos k_n z, \\ \sigma_z^* &= g_0 + s_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n s_n \frac{I_0(k_n r)}{I_1(k_n a)} \cos k_n z - h \sum_{j=1}^J y_j \left[\left(h \operatorname{cth} \lambda_j h + \frac{1}{\lambda_j} \right) \frac{\operatorname{ch} \lambda_j z}{\operatorname{sh} \lambda_j h} - \right. \\ &\quad \left. - z \frac{\operatorname{sh} \lambda_j z}{\operatorname{sh} \lambda_j h} \right] \frac{J_0(\lambda_j r)}{J_0(\lambda_j a)} + a \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^n x_n}{k_n} \left[\left(2 - k_n a \frac{I_0(k_n a)}{I_1(k_n a)} \right) \frac{I_0(k_n r)}{I_1(k_n a)} + \right. \\ &\quad \left. + k_n r \frac{I_1(k_n r)}{I_1(k_n a)} \right] \cos k_n z, \\ \tau_{rz}^* &= h \sum_{j=1}^J y_j \left[h \operatorname{cth} \lambda_j h \frac{\operatorname{sh} \lambda_j z}{\operatorname{sh} \lambda_j h} - z \frac{\operatorname{ch} \lambda_j z}{\operatorname{sh} \lambda_j h} \right] \frac{J_1(\lambda_j r)}{J_0(\lambda_j a)} + \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n s_n I_1(k_n r)}{I_1(k_n a)} \sin k_n z - \\ &\quad - a \sum_{n=1}^N (-1)^n x_n \left[a \frac{I_0(k_n a)}{I_1(k_n a)} \frac{I_1(k_n r)}{I_1(k_n a)} - r \frac{I_0(k_n r)}{I_1(k_n a)} \right] \sin k_n z, \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\{G\}}^* &= G \left(\frac{\sigma}{8} (a^2 - 3r^2) + \frac{1 + \sigma}{2} \left(z^2 - \frac{h^2}{3} \right) \right), & \sigma_{z\{G\}}^* &= G \left(\frac{a^2}{4} - \frac{r^2}{2} \right), \\ \sigma_{r\{G\}}^* &= G \left(\frac{1 + \sigma}{2} \left(z^2 - \frac{h^2}{3} \right) + \frac{\sigma}{8} (a^2 - r^2) \right), & \tau_{rz\{G\}}^* &= 0. \end{aligned} \quad (27)$$

Формули (26), (27) отримано з (15), де з урахуванням (20) покладаємо $X_n = x_n + G$, $n = 1, 2, \dots, N$, $X_n = G$, $n > N$ та $Y_j = y_j + G$, $j = 1, 2, \dots, J$, $Y_j = G$, $j > J$, з використанням (A1)–(A4), (A11)–(A18).

3.2. Антисиметричний за координатою z розподіл температури. Розглянемо випадок пружної рівноваги циліндра, що знаходиться під дією температурного поля $T^{\{0\}}(r, z)$, яке подамо у вигляді розвинення

$$T_n^{\{o\}}(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n^{\{o\}}(r) \sin \alpha_n z, \quad T_n^{\{o\}}(r) = \frac{1}{h} \int_{-h}^h T^{\{o\}}(r, z) \sin \alpha_n z dz, \quad (28)$$

де $\alpha_n = (2n-1)\pi/(2h)$. Коефіцієнти $\Phi_n(r)$ у виразі

$$\Phi(r, z) = \frac{1+\sigma}{1-\sigma} \alpha_T \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(r) \sin \alpha_n z$$

знаходяться аналогічно до попереднього випадку. Компоненти тензора напружень (7) записуються у вигляді

$$\begin{aligned} \sigma_r^{(T)} &= K \sum_{n=1}^{\infty} (\Phi_n''(r) - T_n^{\{o\}}(r)) \sin \alpha_n z, & \sigma_\theta^{(T)} &= K \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{r} \Phi_n'(r) - T_n^{\{o\}}(r) \right) \sin \alpha_n z, \\ \sigma_z^{(T)} &= -K \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n^2 \Phi_n(r) + T_n^{\{o\}}(r)) \sin \alpha_n z, & \tau_{rz}^{(T)} &= K \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \Phi_n'(r) \cos \alpha_n z. \end{aligned} \quad (29)$$

Як і у випадку з симетричною залежністю від координати z , дотичні напруження (29) не створюють зусиль на торцях циліндра. Праві частини крайових умов (4) подаються у вигляді розвинень

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n f_n \sin \alpha_n z, & s(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n s_n \cos \alpha_n z, \\ g^+(r) &= g(r), \quad g^-(r) = -g(r), & g(r) &= g_0 + \sum_{j=1}^{\infty} g_j \frac{J_0(\lambda_j r)}{J_0(\lambda_j a)}, \quad p^\pm(r) \equiv 0, \end{aligned} \quad (30)$$

коефіцієнти яких явно виражаються через температурне поле (28).

Для знаходження напружень (8) використаємо функцію Лява (14), де k_n замінено на α_n та $\sin k_n z$ на $\cos \alpha_n z$, $B_0 = D_0 = 0$, а $R_j(z)$ має вигляд

$$R_j(z) = - \left(h \operatorname{th} \lambda_j h + \frac{2\sigma}{\lambda_j} \right) \frac{\operatorname{ch} \lambda_j z}{\operatorname{ch} \lambda_j h} + z \frac{\operatorname{sh} \lambda_j z}{\operatorname{ch} \lambda_j h}.$$

Відповідні напруження мають вигляд (15), де відсутня елементарна частина і відповідно замінено k_n на α_n , $\cos k_n z$ на $-\sin \alpha_n z$ та $\sin k_n z$ на $\cos \alpha_n z$.

Перша з умов (5) у випадку температурного поля (28) набуває вигляду

$$a g_0 = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s_n}{\alpha_n} = - \int_{-h}^h s(z) dz, \quad (31)$$

і задовольняється коефіцієнтами виразів (30). Друга з умов (5) записується як

$$\int_0^a \int_{-h}^h \sigma_\varphi^* dr dz = 0$$

і задовольняється внаслідок непарності колових напружень за змінною z .

Як і в попередньому випадку, дотичні напруження тотожно задовольняють крайові умови (4) на торцях та бічній поверхні циліндра. Задовольняючи крайові умови для радіальних та осевих напружень за допомогою розвинень (A7)–(A10), (A12), (A14), отримуємо нескінченну систему

$$\begin{aligned} X_n P_n - \sum_{j=1}^{\infty} Y_j \frac{4\alpha_n^2}{(\alpha_n^2 + \lambda_j^2)^2} &= -f_n + s_n q_n, & n &= 1, 2, \dots, \\ Y_j \bar{\Delta}_j - \sum_{n=1}^{\infty} X_n \frac{4\lambda_j^2}{(\alpha_n^2 + \lambda_j^2)^2} &= -g_j - b_j, & j &= 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (32)$$

де

$$b_j = -\frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s_n \alpha_n}{\alpha_n^2 + \lambda_j^2} = \frac{1}{a} \int_{-h}^h s(z) \frac{\operatorname{ch} \lambda_j z}{\operatorname{ch} \lambda_j h} dz, \quad \bar{\Delta}_j = \frac{h}{\lambda_j} \left(\operatorname{th} \lambda_j h + \frac{\lambda_j h}{\operatorname{ch}^2 \lambda_j h} \right),$$

а вирази для q_n та P_n подаються формулами (18) із заміною k_n на α_n .

Застосувавши закон асимптотичних розвинень (19) і ввівши нові змінні на зразок (20), систему (32) запишемо у вигляді

$$\begin{aligned} x_n P_n - \sum_{j=1}^{\infty} y_j \frac{4x_n^2}{(x_n^2 + \lambda_j^2)^2} + 2 \frac{1 + \sigma}{x_n^2} G &= -f_n + s_n q_n, \quad n = 1, 2, \dots, \\ y_j \bar{\Delta}_j - \sum_{n=1}^{\infty} x_n \frac{4\lambda_j^2}{(x_n^2 + \lambda_j^2)^2} &= -g_j - b_j, \quad j = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (33)$$

На відміну від системи (22), у цьому випадку друга група рівнянь (33) не містить сталої G . Підсумувавши першу групу рівнянь (33) за індексом n , а другу – за j і додавши результат, з використанням (A7)–(A10), (A13) отримуємо таке рівняння:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} x_n \left[P_n + \frac{1 - \sigma}{x_n^2} - \frac{a I_0(x_n a)}{x_n I_1(x_n a)} \right] - \sum_{j=1}^{\infty} y_j \frac{h^2}{\text{ch}^2 \lambda_j h} + G \frac{h^2(1 + \sigma)}{4} &= \\ = \frac{f(h)}{2} - \frac{g(a) - g_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} s_n q_n + \frac{1}{4a} \int_{-h}^h s(z) dz. \end{aligned} \quad (34)$$

Якщо поділити рівняння першого та другого рядків системи (33) на x_n^2 і λ_j^2 відповідно, а потім підсумувати за відповідними індексами, то отримаємо рівняння

$$\begin{aligned} 2(1 + \sigma) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{x_n^4} + (1 + \sigma) G \frac{h^4}{3} &= \int_0^a r g(r) \frac{2r^2 - a^2}{4a^2} dr - \frac{1}{2} \int_{-h}^h z f(z) dz + \\ + \frac{1}{8a} \int_{-h}^h s(z) (2z^2 - 2h^2 - a^2) dz, \end{aligned} \quad (35)$$

яке не містить невідомих y_j .

Як і в попередньому випадку, систему рівнянь (33) можна розв'язувати методом простої редукції, взявши у відповідних сумах $n = 1, 2, \dots, N$, $j = 1, 2, \dots, J$ і використавши для знаходження сталої G рівняння (34) або (35).

Остаточний розв'язок задачі (1), (2) для антисиметричного за змінною z температурного поля (28) знаходимо у вигляді (25), де $\sigma_{\ell}^{(T)}$, $\tau_{rz}^{(T)}$ виражаються формулами (29), вирази для напружень $\bar{\sigma}_{\ell}^*$, $\bar{\tau}_{rz}^*$ мають вигляд

$$\begin{aligned} \sigma_r^* &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n s_n \left[\frac{I_0(x_n r)}{I_1(x_n a)} - \frac{I_1(x_n r)}{x_n r I_1(x_n a)} \right] \sin x_n z + \\ &+ h \sum_{j=1}^J y_j \left[\left(h \text{th} \lambda_j h - \frac{1}{\lambda_j} \right) \frac{\text{sh} \lambda_j z}{\text{ch} \lambda_j h} - z \frac{\text{ch} \lambda_j z}{\text{ch} \lambda_j h} \right] \frac{J_0(\lambda_j r)}{J_0(\lambda_j a)} - \\ &- h \sum_{j=1}^J y_j \left[\left(h \text{th} \lambda_j h + \frac{2\sigma - 1}{\lambda_j} \right) \frac{\text{sh} \lambda_j z}{\text{ch} \lambda_j h} - z \frac{\text{ch} \lambda_j z}{\text{ch} \lambda_j h} \right] \frac{J_1(\lambda_j r)}{\lambda_j r J_0(\lambda_j a)} - \\ &- \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^n x_n}{x_n} \left[\left(x_n a \frac{I_0(x_n a)}{I_1(x_n a)} + 1 \right) \frac{I_0(x_n r)}{I_1(x_n a)} - x_n r \frac{I_1(x_n r)}{I_1(x_n a)} + \right. \\ &\left. + \left(2\sigma - 2 - x_n a \frac{I_0(x_n a)}{I_1(x_n a)} \right) \frac{I_1(x_n r)}{x_n r I_1(x_n a)} \right] \sin x_n z, \\ \sigma_{\theta}^* &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{s_n}{x_n r} \frac{I_1(x_n r)}{I_1(x_n a)} \sin x_n z - h \sum_{j=1}^J y_j \frac{2\sigma}{\lambda_j} \frac{\text{sh} \lambda_j z}{\text{ch} \lambda_j h} \frac{J_0(\lambda_j r)}{J_0(\lambda_j a)} + \\ &+ h \sum_{j=1}^J y_j \left[\left(h \text{th} \lambda_j h + \frac{2\sigma - 1}{\lambda_j} \right) \frac{\text{sh} \lambda_j z}{\text{ch} \lambda_j h} - z \frac{\text{ch} \lambda_j z}{\text{ch} \lambda_j h} \right] \frac{J_1(\lambda_j r)}{\lambda_j r J_0(\lambda_j a)} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{n=1}^N (-1)^n \frac{x_n}{x_n} \left[\left(2 \frac{\sigma - 1}{x_n} - a \frac{I_0(x_n a)}{I_1(x_n a)} \right) \frac{I_1(x_n r)}{r I_1(x_n a)} + \right. \\
& \left. + (1 - 2\sigma) \frac{I_0(x_n r)}{I_1(x_n a)} \right] \sin x_n z, \\
\sigma_z^* = & - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n s_n I_0(x_n r)}{I_1(x_n a)} \sin x_n z - h \sum_{j=1}^J y_j \left[\left(h \operatorname{th} \lambda_j h + \frac{1}{\lambda_j} \right) \frac{\operatorname{sh} \lambda_j z}{\operatorname{ch} \lambda_j h} - z \frac{\operatorname{ch} \lambda_j z}{\operatorname{ch} \lambda_j h} \right] \times \\
& \times \frac{J_0(\lambda_j r)}{J_0(\lambda_j a)} + a \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^n x_n}{x_n} \left[\left(x_n a \frac{I_0(x_n a)}{I_1(x_n a)} - 2 \right) \frac{I_0(x_n r)}{I_1(x_n a)} - \right. \\
& \left. - x_n r \frac{I_1(x_n r)}{I_1(x_n a)} \right] \sin x_n z, \\
\tau_{rz}^* = & \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n s_n \frac{I_1(x_n r)}{I_1(x_n a)} \cos x_n z + h \sum_{j=1}^J y_j \left[h \operatorname{th} \lambda_j h \frac{\operatorname{ch} \lambda_j z}{\operatorname{ch} \lambda_j h} - z \frac{\operatorname{sh} \lambda_j z}{\operatorname{ch} \lambda_j h} \right] \frac{J_1(\lambda_j r)}{J_0(\lambda_j a)} - \\
& - a \sum_{n=1}^N (-1)^n x_n \left[a \frac{I_0(x_n a)}{I_1(x_n a)} \frac{I_1(x_n r)}{I_1(x_n a)} - r \frac{I_0(x_n r)}{I_1(x_n a)} \right] \cos x_n z,
\end{aligned}$$

а вирази $\sigma_{\ell\{G\}}^*$, $\tau_{rz\{G\}}^*$ отримано з використанням формул, наведених **Додатку А** (частини **А.2–А.5**), у вигляді

$$\sigma_{r\{G\}}^* = \sigma_{\theta\{G\}}^* = G(1 + \sigma)hz, \quad \sigma_{z\{G\}}^* = \tau_{rz\{G\}}^* = 0. \quad (36)$$

Величини x_n , $n = 1, \dots, N$, y_j , $j = 1, \dots, J$, та сталу G знаходимо з основної скінченної системи, що відповідає (33), разом з рівнянням (34) або (35).

4. Приклади обчислень. Базовою задачею для апробації методів розв'язування задач термопружності для скінченного циліндра є визначення термонапружень, спричинених температурним полем, що не змінюється за осью координат і поліноміально залежить від радіальної координати. Зокрема, у книгах [6, §10; 7, §7.3; 42] розглядався типовий приклад лише радіальної залежності температурного поля

$$T = T_0 r^2 / a^2, \quad T_0 = \text{const}. \quad (37)$$

Як було сказано вище, такий розподіл не задовольняє однорідне рівняння Лапласа, і його можна розглядати як миттєве значення нестационарної температури у певний момент часу. Результати розрахунку напружень для такого температурного поля за нашим підходом визначення сталої G повністю відповідають результатам, наведеним у табл. 7–9 і рис. 8–10 з [6] і табл. 18–21 та рис. 50–52 з [7] з тією різницею, що отримані нами результати досягаються при меншій кількості рівнянь і невідомих, утриманих у нескінченній системі та мають кращу точність задоволення крайових умов, зокрема, на ребрі (див. табл. 1, де наведено розподіл осьових напружень $\sigma_z / (KT_0)$ на бічній поверхні $r = a$ «кубоподібного» циліндра $h/a = 1$, розрахованих запропонованим способом при $N = J = 3$, та наведених в останньому стовпці результати з табл. 9 у [6] і з табл. 20 в [7]). Це свідчить про ефективність підходу до визначення сталої G на основі рівнянь (23) або (24).

Для повнішої ілюстрації можливостей удосконаленого алгоритму врахуємо можливість зміни стаціонарної температури вздовж осі z циліндра.

Таблиця 1

| z | $N = J = 3$ | [6, табл. 9, с. 107], [7, табл. 20, с. 238] |
|-----|-------------|--|
| 0.0 | -6.533 | -6.532 |
| 0.1 | -6.443 | -6.457 |
| 0.2 | -6.180 | -6.211 |
| 0.3 | -5.766 | -5.807 |
| 0.4 | -5.197 | -5.218 |
| 0.5 | -4.447 | -4.454 |
| 0.6 | -3.494 | -3.508 |
| 0.7 | -2.379 | -2.426 |
| 0.8 | -1.245 | -1.284 |
| 0.9 | -0.330 | -0.326 |
| 1.0 | 0.059 | 0.200 |

Розглянемо розрахунок термонапружень, спричинених температурним полем

$$T(r, z) = T_0 \left[r^2 - \frac{a^2}{2} - 2 \left(z^2 - \frac{h^2}{3} \right) + \left(z^2 - \frac{3r^2}{2} \right) z \right], \quad T_0 = \text{const}, \quad (38)$$

що є гармонічною функцією і розкладається згідно з (9) на суму парної та непарної за змінною z складових:

$$T^{\{e\}}(r, z) = T_0 \left[r^2 - \frac{a^2}{2} - 2 \left(z^2 - \frac{h^2}{3} \right) \right], \quad T^{\{o\}}(r, z) = T_0 \left(z^2 - \frac{3r^2}{2} \right) z. \quad (39)$$

Усі компоненти напружень нормуємо сталим множником KT_0 , який для скорочення запису надалі опускаємо. При розрахунках взято $\sigma = 1/3$.

Напруження (12) для температурного поля $T^{\{e\}}$, заданого формулою (39), записуються у простому вигляді

$$\begin{aligned} \sigma_r^{(T)} &= \frac{a^2 - r^2}{4} + 2z^2 - \frac{2h^2}{3}, & \sigma_\theta^{(T)} &= \frac{a^2 - 3r^2}{4} + 2z^2 - \frac{2h^2}{3}, \\ \sigma_z^{(T)} &= \frac{a^2 - 2r^2}{2}, & \tau_{rz}^{(T)} &= 0, \end{aligned}$$

як і напруження (29) для $T^{\{o\}}$:

$$\begin{aligned} \sigma_r^{(T)} &= \sigma_\theta^{(T)} = \frac{3z}{2} (r^2 + h^2 - z^2), \\ \sigma_z^{(T)} &= z(z^2 - 3h^2), & \tau_{rz}^{(T)} &= \frac{3a}{2} (h^2 - z^2). \end{aligned}$$

У випадку симетричного за змінною z розподілу температури, коефіцієнти крайових умов (13) записуються у вигляді

$$f_0 = g_0 = s_n = 0, \quad f_n = -\frac{8}{k_n^2}, \quad g_j = \frac{4}{\lambda_j^2}, \quad (40)$$

а у випадку антисиметричного розподілу відповідні функції (30) мають коефіцієнти

$$f_n = 6 \frac{x_n^2 h^2 - 3}{x_n^4 h} - \frac{3a^2}{x_n^2 h}, \quad s_n = \frac{6a}{x_n^3 h}, \quad g_0 = 2h^3, \quad g_j = 0. \quad (41)$$

Зауважимо, що у випадку температурного поля $T^{\{e\}}$, заданого першою з рівностей (39), інтегральні умови (5) задовольняються внаслідок рівності нулеві відповідних коефіцієнтів (40), а у випадку $T^{\{o\}}$, заданого другою з рівностей (39), має місце рівність (31) для коефіцієнтів (41).

Основним критерієм перевірки точності обчислення напружень (15) є задоволення нормальними напруженнями σ_r^* та σ_z^* відповідних крайових умов, що пов'язано з розв'язанням систем рівнянь (22) і (33) для скінченної кількості доданків у відповідних сумах. Для циліндра $h/a = 1$ для цього прикладу у випадку температурного поля $T^{\{e\}}$ осьові напруження σ_z^* задовольняють відповідні крайові умови (4), (13), (40) з точністю до 5% при $N = J = 1$ у системі (22). При $N = J = 2$ ця точність становить 2%, а при $N = J = 3$ – не перевищує 0.4%. Для радіальних напружень σ_r^* відповідно маємо 1.4%, 0.3% та 0.07%. У випадку температурного поля $T^{\{o\}}$ осьові напруження σ_z^* задовольняють крайові умови (4), (30), (41) з точністю до 0.1% вже при $N = J = 1$ у системі (33), а радіальні напруження відповідно з точністю 0.4% для тих же значень N і J . Зі збільшенням відношення h/a точність задоволення крайових умов покращується внаслідок зменшення взаємовпливу торців циліндра. Це свідчить про ефективність підходу в цілому, зокрема, і методики визначення асимптотичної поведінки невідомих у від-

повідних нескінченних системах на основі закону асимптотичних розвинень (19). Тому, на противагу алгоритму простої редукції, розглянутий у роботі підхід дає можливість ефективного обчислення термонапруженого стану скінченного циліндра всюди, включаючи точки ребер.

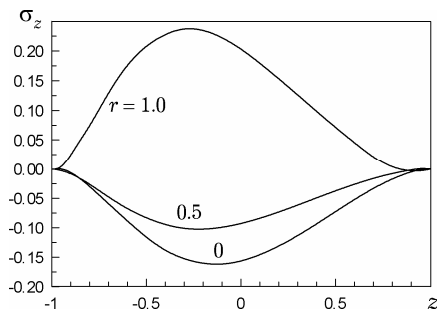


Рис. 1

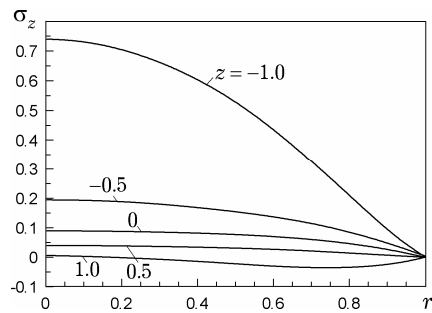
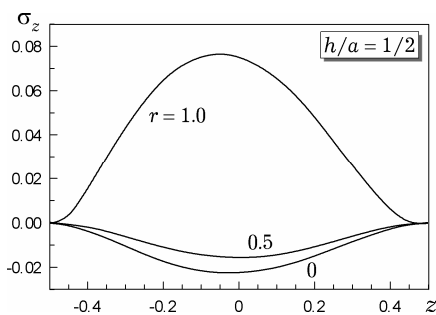


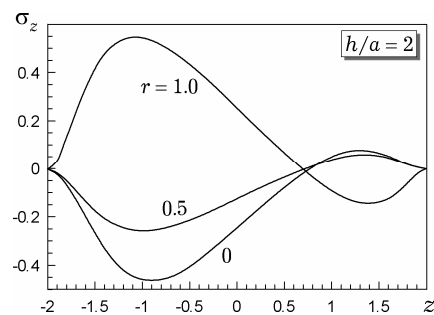
Рис. 2

Врахування залежності температурного поля від осової координати відбивається на характері розподілів напружень. На рис. 1 наведено розподіл осьових напружень σ_z за координатою z на радіусах $r = 0, 0.5, 1.0$, розрахованих для температурного поля (38) у циліндрі $h = a = 1$ при $N = J = 3$ у системах (22) та (33). Ці напруження досягають максимуму на бічній поверхні циліндра, причому, на відміну від випадку температурного поля (37), максимум знаходиться не у центральному перерізі $z = 0$, а зміщений до торця $z = -h$, що спричинено внеском у (38) антисиметричної складової $T^{(o)}$, поданої другою з формул (39). При цьому поблизу осі циліндра ці напруження є стискуєчими, а при наближенні до бокової поверхні $r = a$ – розтягуючими майже по всій довжині циліндра, затухаючи при наближенні до торців. Останнє спричинено задоволенням напруженнями σ_z крайових умов на торцях $z = \pm h$, включаючи ребра (крива $r = 1$).

На рис. 2 зображено розподіли радіальних напружень σ_r за координатою r у перерізах $z = 0, \pm 0.5, \pm 1.0$, розрахованих для тих самих параметрів $h = a = 1, N = J = 3$. Порівнянням кривих для додатних і від'ємних значень z виявляємо вплив залежності температурного поля від осової змінної, внаслідок чого максимальні значення радіальних напружень досягаються на торці $z = -h$ на осі циліндра $r = 0$. Напруження σ_r задовольняють однорідні умови на бічній поверхні в кожному перерізі $z = \text{const}$, включаючи ребра (криві $z = \pm 1$).



а)



б)

Рис. 3

Цікаво дослідити вплив відношення довжини до діаметра циліндра h/a на його напружений стан, спричинений температурним полем (38). На рис. 3 зображено розподіли осьових напружень, розрахованих для значень

$h/a = 1/2$ (рис. 3а) та $h/a = 2$ (рис. 3б). Зі зменшенням відношення h/a максимальні значення напружень зменшуються. При цьому слабшає вплив на напруження антисиметричної частини $T^{(0)}$, у результаті чого вони розподіляються майже симетрично відносно площини $z = 0$ (рис. 3а). Зі збільшенням відношення h/a вплив антисиметричної частини спричинює зміщення максимумів напружень до торця $z = -h$ і, крім того, при наближенні до протилежного торця $z = h$ напруження змінюють знак (рис. 3б).

5. Висновки. Розглядаючи метод суперпозиції і деякі конкретні числові результати, отримані за його допомогою, можна стверджувати, що тільки після відповідної математичної обробки, викладеної вище, він є ефективним аналітичним підходом до розв'язування осесиметричних задач термопружності для суцільного ізотропного циліндра скінченної довжини. Запропоновано ефективний спосіб визначення асимптотичного значення коефіцієнтів нескінченних систем, що дозволяє здійснювати розрахунок напруженого стану в усьому циліндрі, включно з околами ребер, з високим ступенем точності при невеликій кількості рівнянь і невідомих у основних системах. Виявлено характерні особливості нескінченної системи у випадку антисиметричного за осью координатою напруженого стану. Показано, що наявність у повних виразах для напружень складових (27) і (36) є суттєвим для адекватного обчислення напруженого стану поблизу ребер циліндра. Хоча алгебраїчна робота може здаватися дещо громіздкою, кінцеві формули виявляються простими для проведення обчислень. Запропонований спосіб трактування нескінченних систем, отриманих з розгляду осесиметричних задач термопружності для циліндра, забезпечує як надійний шлях одержання акуратного інженерного розв'язку, так і ряд цікавих математичних результатів.

Додаток А

А.1. Розвинення функцій у ряди Фур'є за повною системою тригонометричних функцій $1, \cos k_n z, \sin k_n z$, де $k_n = n\pi/h$, $n = 1, 2, \dots$:

$$z^2 - \frac{h^2}{3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{k_n^2} \cos k_n z, \quad (\text{A1}) \quad \frac{\text{ch } \lambda z}{\text{sh } \lambda h} - \frac{1}{\lambda h} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\lambda(-1)^n}{h(k_n^2 + \lambda^2)} \cos k_n z, \quad (\text{A2})$$

$$z \frac{\text{sh } \lambda z}{\text{sh } \lambda h} + \left(\frac{1}{\lambda} - h \text{cth } \lambda h \right) \frac{\text{ch } \lambda z}{\text{sh } \lambda h} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n k_n^2}{h(k_n^2 + \lambda^2)^2} \cos k_n z, \quad (\text{A3})$$

$$z \frac{\text{ch } \lambda z}{\text{sh } \lambda h} - h \text{cth } \lambda h \frac{\text{sh } \lambda z}{\text{sh } \lambda h} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\lambda(-1)^n k_n}{h(k_n^2 + \lambda^2)^2} \sin k_n z, \quad (\text{A4})$$

$$\frac{z}{2} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{k_n} \sin k_n z, \quad (\text{A5}) \quad \frac{z(z^2 - h^2)}{12} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{k_n^3} \sin k_n z. \quad (\text{A6})$$

А.2. Розвинення функцій у ряди Фур'є за повними системами тригонометричних функцій $\cos \alpha_n z, \sin \alpha_n z$, де $\alpha_n = (2n - 1)\pi/(2h)$, $n = 1, 2, \dots$:

$$z \frac{\text{ch } \lambda z}{\text{ch } \lambda h} - \left(h \text{th } \lambda h - \frac{1}{\lambda} \right) \frac{\text{sh } \lambda z}{\text{ch } \lambda h} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \alpha_n^2}{h(\alpha_n^2 + \lambda^2)^2} \sin \alpha_n z, \quad (\text{A7})$$

$$\frac{zh}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\alpha_n^2} \sin \alpha_n z, \quad (\text{A8}) \quad \frac{\text{sh } \lambda z}{\text{ch } \lambda h} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2\lambda}{h(\alpha_n^2 + \lambda^2)} \sin \alpha_n z, \quad (\text{A9})$$

$$\frac{\text{ch } \lambda z}{\text{ch } \lambda h} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \alpha_n}{h(\alpha_n^2 + \lambda^2)} \cos \alpha_n z. \quad (\text{A10})$$

A.3. Розвинення функцій у ряди Фур'є – Бесселя за повною системою функцій $J_0(\lambda_j r)$, де $J_1(\lambda_j a) = 0$:

$$\frac{r^2}{2} - \frac{a^2}{4} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2}{\lambda_j^2} \frac{J_0(\lambda_j r)}{J_0(\lambda_j a)}, \quad (\text{A11}) \quad a \frac{I_0(kr)}{I_1(ka)} - \frac{2}{k} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2k}{\lambda_j^2 + k^2} \frac{J_0(\lambda_j r)}{J_0(\lambda_j a)}, \quad (\text{A12})$$

$$\frac{I_0(ka) I_0(kr)}{I_1(ka) I_1(ka)} - \frac{r}{a} \frac{I_1(kr)}{I_1(ka)} - \frac{4}{k^2 a^2} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{4k^2}{a^2(\lambda_j^2 + k^2)^2} \frac{J_0(\lambda_j r)}{J_0(\lambda_j a)}, \quad (\text{A13})$$

$$\frac{r}{a} \frac{I_1(kr)}{I_1(ka)} + \left(\frac{2}{ka} - \frac{I_0(ka)}{I_1(ka)} \right) \frac{I_0(kr)}{I_1(ka)} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{4\lambda_j^2}{a^2(\lambda_j^2 + k^2)^2} \frac{J_0(\lambda_j r)}{J_0(\lambda_j a)}. \quad (\text{A14})$$

A.4. Розвинення у ряди Діні за повною системою функцій $J_1(\lambda_j r)$, де $J_1(\lambda_j a) = 0$:

$$r = - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2}{\lambda_j} \frac{J_1(\lambda_j r)}{J_0(\lambda_j a)}, \quad (\text{A15}) \quad \frac{r(r^2 - a^2)}{16} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j^3} \frac{J_1(\lambda_j r)}{J_0(\lambda_j a)}, \quad (\text{A16})$$

$$a \frac{I_1(kr)}{I_1(ka)} = - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2\lambda_j}{\lambda_j^2 + k^2} \frac{J_1(\lambda_j r)}{J_0(\lambda_j a)}, \quad (\text{A17})$$

$$\frac{r}{a} \frac{I_0(kr)}{I_1(ka)} - \frac{I_0(ka) I_1(kr)}{I_1(ka) I_1(ka)} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2\lambda_j k}{a^2(\lambda_j^2 + k^2)^2} \frac{J_1(\lambda_j r)}{J_0(\lambda_j a)}. \quad (\text{A18})$$

A.5. Значення нескінченних сум:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4k_n^2}{(\lambda^2 + k_n^2)^2} = \frac{h}{\lambda} \left[\text{cth } \lambda h - \frac{\lambda h}{\text{sh}^2 \lambda h} \right], \quad (\text{A19}) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k_n^2} = \frac{h^2}{6}, \quad (\text{A20})$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{4\lambda_j^2}{(k^2 + \lambda_j^2)^2} = a^2 \left(1 - \frac{I_0^2(ka)}{I_1^2(ka)} \right) + \frac{2a}{k} \frac{I_0(ka)}{I_1(ka)}, \quad (\text{A21}) \quad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j^2} = \frac{a^2}{8}, \quad (\text{A22})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(k_n^2 + \lambda^2)^2} = \frac{h}{4\lambda^3} \left[\text{cth } \lambda h + \frac{\lambda h}{\text{sh}^2 \lambda h} - \frac{2}{\lambda h} \right], \quad (\text{A23}) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k_n^4} = \frac{h^4}{90}, \quad (\text{A24})$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(k^2 + \lambda_j^2)^2} = \frac{a^2}{4k^2} \left(\frac{I_0^2(ka)}{I_1^2(ka)} - 1 \right) - \frac{1}{k_n^4}, \quad (\text{A25}) \quad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j^4} = \frac{a^4}{192}, \quad (\text{A26})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x_n^2 + \lambda^2)^2} = \frac{h}{4\lambda^3} \left(\text{th } \lambda h - \frac{\lambda h}{\text{ch}^2 \lambda h} \right), \quad (\text{A27}) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x_n^4} = \frac{h^4}{6}. \quad (\text{A28})$$

1. Вигак В. М. Управление температурными напряжениями и перемещениями. – Киев: Наук. думка, 1988. – 311 с.
2. Вигак В. М., Токовий Ю. В. Точний розв'язок осесиметричної задачі теорії пружності в напруженнях для суцільного циліндра певної довжини // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2003. – Вип. 1. – С. 55–60.
3. Гольденблатт И. И. Расчет температурных напряжений в ядерных реакторах. – Москва: Энергия, 1962. – 158 с.
4. Гринченко В. Т. Стационарные тепловые напряжения в сплошном цилиндре конечной длины // Тепловые напряжения в элементах конструкций. – 1962. – Вип. 2. – С. 41–49.
5. Гринченко В. Т. Напряженное состояние круглого толстого диска в поле центробежных сил // Тр. IV Всесоюз. конф. по теории пластин и оболочек. – Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1964. – С. 423–430.
6. Гринченко В. Т. Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров. – Киев: Наук. думка, 1978. – 264 с.
7. Коваленко А. Д. Основы термоупругости. – Киев: Наук. думка, 1970. – 307 с.

8. Коваленко А. Д. Термоупругость. – Киев: Вища шк., 1975. – 216 с.
9. Колтунов М. А., Васильев Ю. Н., Черных В. А. Упругость и прочность цилиндрических тел. – Москва: Высш. шк., 1975. – 526 с.
10. Коренев Б. Г. Задачи теории теплопроводности и термоупругости. – Москва: Наука, 1980. – 400 с.
11. Коялович Б. М. Исследование о бесконечных системах линейных алгебраических уравнений // Изв. Физ.-Мат. ин-та им. В. А. Стеклова. – 1930. – **3**. – С. 41–167.
12. Лебедев Н. Н. Температурные напряжения в теории упругости. – Ленинград – Москва: ОНТИ, 1937. – 110 с.
13. Майзель В. М. Температурная задача теории упругости. – Киев: Изд-во АН УССР, 1951. – 152 с.
14. Мелешко В. В. Теплові напруження у прямокутних пластинах // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2005. – **48**, № 4. – С. 140–164.
15. Папкович П. Ф. Общий интеграл тепловых напряжений (По поводу статьи Н. Н. Лебедева «Тепловые напряжения в теории упругости») // Прикл. математика и механика. – 1937. – **1**, № 2. – С. 245–246.
16. Папкович П. Ф. Теория упругости. – Ленинград – Москва: Оборонгиз, 1939. – 640 с.
17. Подстригач Я. С., Коляно Ю. М. Неустановившиеся температурные поля и напряжения в тонких пластинках. – Киев: Наук. думка, 1972. – 308 с.
18. Соляник-Красса К. В. Осесимметричная задача теории упругости. – Москва: Стройиздат, 1987. – 336 с.
19. Тимошенко С. П. Курс теории упругости. – Киев: Наук. думка, 1972. – 508 с.
20. Федик И. И., Колесов В. С., Михайлов В. Н. Температурные поля и термонапряжения в ядерных реакторах. – Москва: ЭнергATOMиздат, 1985. – 279 с.
21. Arpacı V. S. Steady axially symmetric three-dimensional thermoelastic stresses in fuel rods // Nucl. Eng. Design. – 1984. – **80**. – P. 301–307.
22. Barber J. R. Elasticity. – New York: Springer, 2010. – 534 p.
23. Boley B. A., Weiner J. H. Theory of thermal stresses. – New York: Wiley, 1960. – 586 p.
Те саме: Боли Б., Уэйнер Дж. Теория температурных напряжений. – Москва: Мир, 1964. – 547 с.
24. Burgreen D. Elements of thermal stress analysis. – Jamaica: C.P. Press, 1971. – 462 p.
25. Duhamel J. M. C. Mémoire sur le calcul des actions moléculaires développées par les changements de la temperature dans les corps solides // Mém. Acad. Sci. Savans Étrang. – 1838. – **5**. – P. 440–498.
26. Gatewood B. E. Thermal stresses, with applications to airplanes, missiles, turbines and nuclear reactors. – New York: McGraw-Hill, 1957. – 232 p.
Те саме: Гейтвуд Б. Е. Температурные напряжения применительно к самолетам, снарядам, турбинам и ядерным реакторам. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1959. – 350 с.
27. Goodier J. N. On the integration of the thermo-elastic equations // Philos. Mag. (Ser. 7). – 1937. – **23**. – P. 1017–1032.
28. Hetnarski R. B., Eslami M. R. Thermal stresses. Advanced theory and applications. – Dordrecht: Springer, 2009. – 559 p.
29. Horvay G., Givner I., Mirabal J. A. Thermal stresses in a heat-generating cylinder: The variational solution of a boundary layer problem in three-dimensional elasticity // Ing.-Archiv. – 1959. – **27**. – P. 179–194.
30. Johns D. J. Thermal stress analysis. – Oxford–New York: Pergamon, 1965. – 211 p.
31. Kovalenko A. D. Thermoelasticity. Basic theory and applications. – Groningen: Wolters-Noordhoff, 1969. – 251 p.
Те саме: Коваленко А. Д. Введение в термоупругость. – Киев: Наук. думка, 1965. – 204 с.
32. Love A. E. H. A treatise on the mathematical theory of elasticity. – 4th edn. – Cambridge: Cambridge University Press, 1927. – 643 p.
Те саме: Ляв А. Математическая теории упругости. – Москва–Ленинград: ОНТИ НКТП СССР, 1935. – 674 с.
33. Matthews J. R. Thermal stress in a finite heat generating cylinder // Nucl. Eng. Design. – 1970. – **12**. – P. 291–296.
34. Melan E., Parkus H. Wärmespannungen infolge stationärer Temperaturfelder. – Wien: Springer, 1953. – 114 S.
Те саме: Мелан Э., Паркус Г. Термоупругие напряжения, вызываемые стационарными температурными полями. – Москва: Физматгиз, 1958. – 167 с.

35. *Meleshko V. V.* Equilibrium of an elastic finite cylinder: Filon's problem revisited // *J. Engng Math.* – 2003. – 46. – P. 355–376.
36. *Neuman F. E.* Die Geetze der Doppelbrechung des Lichtes in comprimierten oder ungleichförmig erwärmten uncrystallinischen Körpern // *Abhandl. Königl. Akad. Wissen.* Berlin. – 1841. – 2. Teil. – S. 1–254.
37. *Noda N., Hetnarski R. B., Tanigawa Y.* Thermal stresses. – New York: Taylor & Francis, 2003. – 493 p.
38. *Nowacki W.* Zagadnienia termosprężystości. – Warszawa: PAN, 1960. – 394 s.
Te same: *Nowacki W.* Thermoelasticity. – London: Pergamon, 1962. – 628 p.
Te same: *Новацкий В.* Вопросы термоупругости. – Москва: Изд-во АН СССР, 1962. – 364 с.
39. *Parkus H.* Instationärer Wärmespannungen. – Wien: Springer, 1959. – 165 S.
Te same: *Паркус Г.* Неустановившиеся температурные напряжения. – Москва: Физматгиз, 1963. – 257 с.
40. *Sadd M. H.* Elasticity: Theory, applications, and numerics. – Burlington: Academic, 2009. – 536 p.
41. *Sundara Raja Iyengar K. T., Chandrashekhara K.* Thermal stresses in a finite solid cylinder due to an axisymmetric temperature field at the end surface // *Nucl. Eng. Design.* – 1966. – 3. – P. 382–393.
42. *Sundara Raja Iyengar K. T., Chandrashekhara K.* Thermal stresses in a finite solid cylinder due to steady temperature variation along the curved and end surfaces // *Int. J. Engng Sci.* – 1967. – 5. – P. 393–413.
43. *Timoshenko S.* Theory of elasticity. – New York–London: McGraw-Hill, 1934. – 416 p.
Te same: *Тимошенко С. П.* Теория упругости. – Ленинград–Москва: ОНТИ, 1934. – 451 с.
44. *Timoshenko S. P., Goodier J. N.* Theory of elasticity. – New York: McGraw-Hill, 1970. – 567 p.
Te same: *Тимошенко С. П., Гудьер Дж.* Теория упругости. – Москва: Наука, 1975. – 576 с.
45. *Valentin R. A., Carey J. J.* Thermal stresses and displacements in finite, heat-generating cylinders // *Nucl. Eng. Design.* – 1970. – 12. – P. 277–290.

ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ ТЕМПЕРАТУРНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В УПРУГОМ ИЗОТРОПНОМ ЦИЛИНДРЕ КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ

Рассмотрена осесимметричная задача о термоупругом состоянии сплошного конечного цилиндра со свободной от нагрузок поверхностью. С использованием метода суперпозиции построено ее полное аналитическое решение, сводящееся к решению бесконечных систем линейных алгебраических уравнений. Предложен способ определения асимптотического поведения коэффициентов, позволяющий разработать эффективный алгоритм расчета напряжений в цилиндре, включая области возле торцевых колец. Рассмотрены типичные примеры.

AXISYMMETRIC THERMAL STRESSES IN AN ELASTIC ISOTROPIC CYLINDER OF FINITE LENGTH

The axisymmetric thermal stresses problem for a solid cylinder of finite length with traction-free boundary is considered. By means of the method of superposition, the complete analytical solution to the problem is constructed. The solution is reduced to solving the infinite systems of linear algebraic equations. The algorithm for determination of the asymptotic behavior of the coefficients in infinite systems is presented. It is shown that the proposed algorithm is efficient for determination of the thermal stresses in the cylinder including rims. Two typical examples are examined.

¹ Київ. нац. ун-т ім. Тараса Шевченка, Київ,

² Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів,

³ Мічиганський університет, Анн-Арбор, США

Одержано
09.01.10